Didattica delle scienze (1998) XXIII, 193, 52-56

Un'intuizione dell'infinitesimo attuale: *De nihilo geometrico* (1758) di Giuseppe Torelli

GIORGIO T. BAGNI

TRA MATEMATICA E FILOLOGIA

La corretta e moderna introduzione delle nozioni principali dell'analisi matematica, in particolare dei concetti di infinitesimo e di infinito (da intendersi in senso potenziale ed in senso attuale), fu storicamente preceduta da un lungo periodo di tentativi e di incertezze. In questo articolo presenteremo alcune idee proposte, nel XVIII secolo, da uno studioso italiano la cui opera è solo marginalmente considerata dalla storiografia matematica.

A Giuseppe Torelli (Verona, 1721-1781) è ricondotta una ricca ed accurata edizione delle *Opere* di Archimede in greco e in latino, pubblicata a Oxford nel 1792 da A. Robertson sulla base di materiali dovuti allo studioso veronese, acquistati dall'Università di Oxford presso gli eredi (Loria, 1929-1933, pp. 786-787). Il capolavoro torelliano è *Archimedis quae supersunt omnia, cum Eutocii Ascalonitae commentariis, ex recensione Josephii Torelli Veronensi cum nova versione latina (accedunt versiones variantes ex codd. Mediceo et Parisiensibus)*, "un'opera tipograficamente splendida" (ricorda A. Frajese in: Archimede, 1974, pp. 30 e 39); Torelli condusse inoltre una prima, attenta riorganizzazione cronologica dei lavori archimedei.

Torelli merita però l'attenzione degli storici della scienza anche per alcune idee espresse in *De nihilo geometrico libri II*, un breve lavoro (117 pagine in-VIII) pubblicato nel 1758 a Verona da A. Carattoni ([1]). Nel presente articolo ci occuperemo specificamente di quest'ultima opera, il cui interesse storico e didattico appare rilevante anche agli occhi dei matematici contemporanei.

IL TRATTATO DEL 1758

De nihilo geometrico si apre con un'ampia prefazione, nella quale l'Autore dichiara di proporsi la dimostrazione del vero principio ("verum germanumque principium", Torelli, 1758, pp. 7-14) sul quale si basa il calcolo differenziale.

([1]) P. Riccardi, nella *Biblioteca matematica italiana dalle origini della stampa ai primi anni del secolo XIX* (1893 e 1928), così ricorda *De nihilo geometrico*: "L'Autore tentò di sostituire un nuovo e rigoroso principio a fondamento dell'analisi infinitesimale, non parendogli abbastanza rigorosi i principi di Newton e Leibniz" (I, p. 538).

Ricordiamo che così si esprimeva Leibniz in un manoscritto del 1695:

"Sarà sufficiente se, quando parliamo di quantità indefinitamente piccole (le più piccole di cui possiamo venire a conoscenza) si intenda che vogliamo indicare quantità piccole quanto si vuole, in modo che l'errore che si può commettere sia minore di una quantità assegnata" (in Kline, 1991, I, p. 451) (2).

La posizione leibniziana sarà implicitamente ricordata (e criticata) da Torelli in *De nihilo geometrico*; così, ad esempio, lo studioso veronese enuncia il principio che afferma essere fondamentale per l'intero calcolo infinitesimale:

"Due qualsiasi grandezze dello stesso genere sono vicendevolmente uguali quando differiscono tra di loro di una quantità infinitamente piccola" (Torelli, 1758, p. 7; le traduzioni sono nostre).

Tuttavia tale principio, osserva Torelli, "manifestamente contrasta con la nozione di uguaglianza indotta dalla stessa natura nell'animo umano" e trovò pertanto "molti tenaci oppositori" (Torelli, 1758, p. 79). Per eludere queste difficoltà Torelli propone di sostituire quel principio con il seguente, nel quale la concezione potenziale dell'infinitesimo viene corretta in senso attuale:

"Due qualsiasi grandezze dello stesso genere sono vicendevolmente uguali quando differiscono tra di loro di una quantità nulla" (Torelli, 1758, p. 9).

Ciò però richiede una ridefinizione del "nulla", che sarà "geometrico, per distinguerlo dal nulla metafisico, a tutti ben noto" (Torelli, 1758, p. 10). Scopo dell'opera di Torelli è dunque l'introduzione rigorosa del "nulla geometrico", concetto che può essere interpretato in una visione attuale dell'infinitesimo.

---

(2) Interessanti sono inoltre alcune osservazioni contenute in una lettera (datata 30 marzo 1690) di Leibniz a Wallis: "È utile considerare quantità infinitamente piccole tali che, quando si cerca il loro rapporto, esse possono non essere considerate uguali a zero, ma che vengono respinte non appena compaiono insieme con quantità incomparabilmente più grandi. Così, se abbiamo $x+dx$, dx viene respinto. È però diverso se cerchiamo la differenza fra $x+dx$ e x. Analogamente, non possiamo avere insieme xdx e $dxdx$. Se quindi dobbiamo differenziare xy, scriveremo $(x+dx)(y+dy)–xy = xdy+ydx+dxdy$. Così, in ogni caso particolare l'errore è minore di qualsiasi quantità finita (Leibniz, 1849-1863, IV, p. 63) F. Enriques riconosce una qualche ambiguità circa il ruolo del differenziale nell'opera di Leibniz: "La derivazione... viene considerata da lui come quoziente di due *differentiae* o (come si è detto in seguito secondo Giov. Bernoulli e L. Eulero) di due differenziali... Se questi incrementi vadano intesi soltanto in senso potenziale, cioè come quantità variabili evanescenti, ovvero staticamente come infinitesimi attuali non appare chiaramente nell'opera di Leibniz" (Enriques, 1938, p. 60; per l'applicazione didattica si veda: Bagni, 1997).

“NULLA GEOMETRICO” E INFINITESIMO ATTUALE

Anticipiamo sin d’ora che *De nihilo geometrico* deve essere considerato un lavoro matematicamente debole: spesso, come potremo constatare, le definizioni proposte sono insufficienti e talvolta vengono suggerite proprietà e situazioni analiticamente non corrette. Ma l’opera appare globalmente interessante per l’approccio (che sottolineiamo ancora essere più attuale che potenziale) da essa indicato, frutto ed espressione di un evidente disagio causato della scarsa precisazione dei fondamenti del calcolo infinitesimale ([3]), disagio che nel Settecento era avvertito da molti matematici.

Il libro I si apre con alcune definizioni: le prime due di esse, che si limitano ad introdurre i termini “unità” e “nulla”, non ci illuminano sulle concezioni dell’Autore ([4]); e neppure le definizioni seguenti appaiono particolarmente significative:

“III. Finito è ciò che ha confini.
IV. Infinito è ciò che non ha confini” (Torelli, 1758, p. 15).

L’Autore introduce poi il concetto di “comparazione” ricorrendo ancora sostanzialmente ad un sinonimo ([5]); Torelli dichiara di distinguere due diversi tipi di comparazione:

“VI. Si ha comparazione dello stesso genere quando si accostano due enti con le stesse dimensioni. Si dice che esiste il rapporto di ciascuno di tali enti rispetto all’altro.

VII. Si ha comparazione di genere diverso è quando si accostano due enti non aventi le stesse dimensioni. Si dice che non esiste il rapporto di ciascuno di tali enti rispetto all’altro” (Torelli, 1758, p. 16).

([3]) Lo stesso Leibniz riconobbe in più occasioni le difficoltà teoriche comportate da una vaga concezione dell’infinitesimo; ad esempio, nel manoscritto del 1695 precedentemente ricordato, egli ammette: “È tuttavia possibile immaginare uno stato di transizione o di evanescenza in cui non è ancora sorta l’esatta uguaglianza... ma in cui si sta passando in uno stato tale che la differenza è minore di qualunque quantità assegnabile... Se tale stato di transizione istantanea dalla disuguaglianza all’uguaglianza... possa essere sostenuto in senso rigoroso o metafisico, o se estensioni... infinitamente piccole sempre minori siano considerazioni legittime, è una questione che riconosco possa essere aperta al dubbio” (Kline, 1991, I, p. 451).

([4]) Nei termini originali: “I. Unitas est, per quam unumquodque eorum, quæ sunt, dicitur unum. II. Nihilum est, per quam unumquodque eorum, quæ non sunt, dicitur nihilum. Dicitur autem unum aliquid non esse, quod antea quum esset, non esse amplius concipitur” (Torelli, 1758, p. 15).

([5]) Nei termini originali: “V. Comparatio est duorum quorumdam mutua collatio” (Torelli, 1758, p. 15).

Da queste ultime definizioni e dalle applicazioni che di esse saranno fornite nell'opera, possiamo concludere che la comparazione torelliana di due quantità (ad esempio di due infinitesimi) equivale alla proprietà, riferita a tali quantità, di ammettere rapporto finito. Dopo aver dato le due ultime definizioni ([6]), l'Autore elenca sei assiomi; i primi cinque di essi appaiono di qualche interesse:

"I. Moltiplicando o dividendo l'unità per se stessa, si ottiene l 'unità.
II. Moltiplicando o dividendo una quantità per l'unità, si ottiene tale quantità stessa.
III. Sottraendo il nulla dal nulla, si ottiene il nulla.
IV. Moltiplicando il nulla per il nulla, si ottiene il nulla.
V. Dividendo il nulla per se stesso, si ottiene l'unità" (Torelli, 1758, pp. 16 - 17).

Un ultimo assioma introdotto sembra confermare quanto affermato nel V ([7]). Gli assiomi I-V fissano dunque le proprietà dell'unità (che indicheremo con il simbolo 1) e del nulla (che indicheremo con il simbolo 0) rispetto ad alcune operazioni aritmetiche ed equivalgono alle scritture seguenti (interessante appare l'assioma V sul "rapporto" di due non meglio specificate quantità nulle):

Ax. I.	$1 \times 1 = 1$	Ax. II.	$1 : 1 = 1$
Ax. III.	$0 - 0 = 0$	Ax. IV.	$0 \times 0 = 0$
Ax. V.	$0 : 0 = 1$		

L'Autore passa poi ad enunciare (e a dimostrare) alcune proposizioni.

"**Proposizione I.** Se una grandezza qualsiasi è sottratta da se stessa, si ottiene il nulla.
Corollario. Da ciò segue che se la grandezza x è assunta quale unità, l'eccesso, del quale l'unità supera se stessa, sarà nullo. Ciò sarà chiamato nulla del primo ordine, espresso da $1 - 1$, essendo 1 l'unità" (Torelli, 1758, pp. 17 e 18).

La II e la IV proposizione si occupano dell'analoga operazione effettuata con grandezze bidimensionali e tridimensionali.

([6]) Nei termini originali: "VIII. Si duo quædam, aut pluria sese inficem multiplicent, quod inde oritur, vocetur factum; quæ vero sese invicem multiplicant, latera. IX. Factum cum facto conferri dicitur, quando latera cum lateribus conferuntur", (Torelli, 1758, p. 15).
([7]) Nei termini originali: "VI. Nihilum cum semetipso eodem modo confertur, quo unitas cum unitate" (Torelli, 1758, p. 17).

"**Proposizione II.** Sia assegnata una grandezza di due dimensioni; se si sottrae da ciascuna di tali dimensioni se stessa, e gli eccessi sono moltiplicati tra di loro, si ottiene il nulla" (Torelli, 1758, p. 18).

La proposizione è introdotta come lemma per la dimostrazione della IV, che è così enunciata:

"**Proposizione IV.** Sia assegnata una grandezza di tre dimensioni; se si sottrae da ciascuna di tali dimensioni se stessa, e gli eccessi sono moltiplicati tra di loro, si ottiene il nulla" (Torelli, 1758, p. 20).

La proposizione V introduce il nulla diverso dal nulla del primo ordine:

"**Proposizione V.** Il nulla ottenuto da qualsiasi grandezza, che dicesi ricavato per sottrazione, è uguale al prodotto della grandezza stessa per il nulla del primo ordine" (Torelli, 1758, pp. 20-21).

Le proposizioni VI e VII stabiliscono la confrontabilità (o la non confrontabilità) delle quantità nulle ottenute da grandezze diverse:

"**Proposizione VI.** Se il nulla ottenuto da una grandezza finita è accostato al nulla ottenuto da un'altra grandezza della stessa dimensione ed entrambi siano generati per sottrazione, la comparazione è dello stesso genere.

Proposizione VII. Se una grandezza finita è accostata al nulla ottenuto da un'altra grandezza finita della stessa dimensione, la quale sia generata per sottrazione, la comparazione è di genere diverso" (Torelli, 1758, pp. 21 e 23).

Le proposizioni VIII-XII esprimono considerazioni analoghe per grandezze bidimensionali e tridimensionali. Interessante è la proposizione XIII che, con il relativo corollario, introduce l'infinito:

"**Proposizione XIII.** Se una qualsiasi grandezza finita è divisa per il nulla di ordine primo, si ottiene una grandezza infinita.

Corollario. Se l'unità è divisa per il nulla del primo ordine, si ottiene un numero infinito" (Torelli, 1758, pp. 28 e 29).

Con la proposizione XIV, e fino alla XX, Torelli tenta di introdurre il nulla generato per sottrazione da una grandezza infinita da se stessa e di porlo in relazione con una grandezza finita; i presupposti sono poco rigorosi (a tratti errati) e il tentativo è destinato al fallimento ([8]) (Torelli, 1758, pp. 30-37).

([8]) "Nihilum ex infinita magnitudine ortum, quod subductione fieri dicitur, finitæ magnitudini æquale est, ex qua ipsa oritur infinita magnitudo" (Torelli, 1758, p. 30).

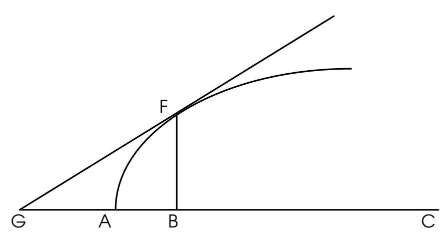
In sostanza, Torelli afferma che sottraendo un infinito, ottenuto dividendo una quantità finita a per un infinitesimo (il "nulla") del primo ordine, da se stesso si ottiene la quantità a: ciò è evidentemente errato. Il tentativo quindi non può che arenarsi: la rivisitazione radicale dei fondamenti del Calcolo, quasi settant'anni prima del *Cours d'analyse* di Cauchy, non era ancora matura (in particolare essa non era basata sull'indispensabile corretta nozione di limite).

LE APPLICAZIONI DEL SECONDO LIBRO

Le osservazioni significative sui fondamenti dell'analisi infinitesimale sono contenute nel primo dei due libri di *De nihilo geometrico*. Il secondo libro è dedicato ad alcune applicazioni geometriche dei concetti precedentemente descritti (Torelli, 1758, pp. 38-117), con particolare riferimento alla nozione di derivata prima. Per dare un esempio di quanto in esso riportato, presentiamo una proposizione (la III) dimostrata in tale sezione; essa viene così introdotta:

"Sia [data] la parabola AF, il cui asse [sia] AB e il cui latus rectum [sia] AC, e [sia dato] il punto F su di essa, dal quale si conduca la normale FB ad AB. Sia condotta la tangente FG alla parabola, avente in comune il punto G con il prolungamento di AB" (Torelli, 1758, p. 41).

Ricordiamo che il "latus rectum" di una parabola (tale deno minazione è di origine rinascimentale), con riferimento alla curva di equazione $y^2 = kx$, è "l'altezza (costante) del rettangolo che ha per base l'ascissa x di un generico punto della curva ed è equivalente al quadrato dell'ordinata y del predetto punto" (Freguglia, 1982, p. 77). Dunque nel caso considerato il latus rectum è k.



Torelli si propone di determinare "il rapporto tra il nulla generato per sottrazione da BF ed il nulla generato per sottrazione da BG" (Torelli, 1758, p. 44). Questa costruzione corrisponde al calcolo del coefficiente angolare della retta GF, ovvero alla derivata prima (usualmente intesa come rapporto di differenziali) della funzione corrispondente alla curva considerata, che possiamo esprimere con $y = \sqrt{kx}$.

Nella proposizione in esame, Torelli prova geometricamente che tale rapporto risulta uguale al rapporto tra il "latus rectum" ed il doppio di BF (Torelli, 1758, pp. 44-45). Ciò corrisponde, correttamente, ad affermare che:

$$y = \sqrt{kx} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{k}{2\sqrt{kx}} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{k}{2y}$$

Analoghi procedimenti sono ripetuti per molte altre curve piane: essi confermano dunque un'apprezzabile preparazione tecnica dell'Autore nel campo del calcolo differenziale e della geometria delle coordinate.

VALUTAZIONE STORICA DELL'OPERA DI TORELLI

Senza dubbio *De nihilo geometrico* è un lavoro teoricamente debole e contiene imprecisioni ed alcuni errori. Ma esso appare interessante e significativo in riferimento al periodo storico in cui venne concepito e pubblicato.

Per giustificare tale affermazione dobbiamo riprendere qualche momento di storia dell'analisi: alcuni procedimenti matematici dell'Antichità indicano la considerazione di questioni infinitesimali; al concetto di limite viene spesso affiancato il metodo di esaustione, introdotto da Eudosso (408?-355? a.C.), teorizzato negli *Elementi* di Euclide (300 a.C.) quindi applicato da Archimede (287-212 a.C.), autore ben noto a Torelli (Archimede, 1974, pp. 30, 39, 41) ([9]).

La nascita della moderna analisi, nel XVII secolo, riportò alla ribalta i procedimenti infinitesimali, sebbene la forma nella quale essi vennero impiegati differisse notevolmente dalla forma nella quale oggi li intendiamo ([10]). La critica contemporanea ha ripreso alcune posizioni leibniziane originali (talvolta riferite all'infinitesimo attuale) ed ha elaborato sistemazioni teoriche interessanti (anche dal punto di vista didattico), quali l'analisi non standard ([11]).

([9]) Un simile accostamento necessita di cautela: le dimostrazioni per esaustione non sono logicamente equivalenti ad un passaggio al limite; erano utilizzate per conferire il necessario rigore ai risultati individuati con procedimenti intuitivi (Archimede, 1974).

([10]) Osserva M. Kline: "Alcuni germi della formulazione corretta dei nuovi concetti possono essere già trovati nella letteratura del Seicento. Wallis, nell'*Arithmetica infinitorum*, introdusse il concetto aritmetico del limite di una funzione come il numero avvicinato dalla funzione in modo tale che la differenza tra esso e la funzione possa essere resa minore di qualunque quantità assegnabile fino ad annullarsi quando il procedimento viene continuato all'infinito. La sua formulazione è vaga, ma contiene l'idea giusta" (Kline, 1991, I, p. 453). Una prima rigorizzazione della nozione di limite fu merito di Augustin Louis Cauchy (1789-1857), autore del *Cours d'analyse* (1821).

([11]) Così scrive A. Robinson riferendosi ai fondamenti storici dell'analisi non standard: "Leibniz intuì che la teoria degli infinitesimi implica l'introduzione di numeri ideali che possono essere infinitamente piccoli... se paragonati ai numeri reali. Né lui né i suoi discepoli né i suoi successori seppero dare uno sviluppo razionale ad un tale sistema... Questi numeri ideali, governati dalle stesse leggi dei numeri ordinari, sono solo una comoda finzione, adottata per abbreviare l'argomentazione e per facilitare l'invenzione o la scoperta matematica" (Robinson, 1974).

Ricordiamo tuttavia che le applicazioni dei metodi infinitesimali ebbero, fin dall'inizio del XVIII secolo, anche alcuni attivissimi oppositori, tra i quali spicca George Berkeley (1685-1753), autore di *The Analyst, or a discourse addressed to an infidel mathematician* (Arrigo e D'Amore, 1992) ([12]). Le critiche all'analisi erano spesso espresse da matematici non professionisti: a parte il vescovo, filosofo e scienziato Berkeley, citiamo il borgomastro, medico e geometra olandese Bernard Nieuwentijdt (1654-1718); ma anche un analista di valore quale Michel Rolle (1652-1719) fu tra gli studiosi che nutrirono dubbi sulla sistemazione dell'analisi settecentesca: ricorda U. Bottazzini che il francese "non era affatto convinto della correttezza del calcolo leibniziano, che considerava una sorta di trucco ben riuscito" (Bottazzini, 1990, p. 27).

Anche Jean Baptiste Le Rond d'Alembert (1717-1783) espresse notevoli perplessità sull'insufficiente precisazione del concetto di limite e sul fatto che gli infinitesimi potessero essere considerati come espressioni di quantità nulle, pur essendo qualitativamente diversi da zero. Egli affermò in proposito:

"Una quantità o è qualcosa o è niente: se è qualcosa, non si è ancora annullata; se è niente, si è letteralmente annullata. Supporre che vi sia uno stato intermedio tra qualcosa e niente è pura chimera" (*Mèlanges de litèrature, d'histoire et de philosophie*, pp. 249-250, riportato in: Boyer, 1982, p. 521).

Importante è infine la posizione di Leonhard Euler (1707-1783), che "respingeva il concetto di infinitesimo come quantità più piccola di qualunque grandezza assegnabile e tuttavia diversa da zero" (Kline, 1991, I, p. 500); nel 1755 (e dunque appena tre anni prima della pubblicazione di *De nihilo geometrico*) Euler scrisse nelle proprie *Institutiones calculi differentialis*, uno dei capolavori della matematica del XVIII secolo:

"Non c'è dubbio che ogni quantità può essere diminuita in misura tale da annullarsi completamente e svanire. Ma una quantità infinitamente piccola non è nient'altro che una quantità evanescente e perciò la cosa stessa è uguale a 0. Ciò è anche in armonia con quella definizione delle cose infinitamente piccole di cui si dice che sono minori di qualunque quantità assegnabile; è certo che essa dovrebbe essere nulla perché, a meno che non sia uguale a 0, sarebbe possibile assegnarle una quantità uguale, il che è contrario all'ipotesi" (Euler, 1787; traduzione in: Kline, 1991, I, p. 500).

([12]) G. Berkeley scrisse: "Concepire una quantità infinitamente minore di ogni sensibile o immaginabile quantità oltrepassa, lo confesso, ogni mia capacità. Ma concepire una parte di questa quantità infinitesima, tale che sia ancora infinitamente minore di essa, questa è una infinita difficoltà per qualunque uomo" (Arrigo e D'Amore, 1992, p. 123). A Berkeley rispose direttamente (ma non sempre efficacemente) James Jurin (1684-1750) con l'opera *Geometry, no friend to infidelity* (1734).

Non è possibile sapere con qualche certezza se il pensiero di Torelli fu influenzato dalla posizione, assai diffusa e prestigiosa, di Euler (il quale peraltro non viene citato in alcuna occasione nel lavoro torelliano) ([13]): ma un raffronto ideale tra il pensiero di Torelli e quello di alcuni grandi matematici del XVIII secolo appare storicamente significativo, soprattutto a proposito dell'intuizione di un infinitesimo concepito attualmente.

VALUTAZIONE DIDATTICA DELL'OPERA DI TORELLI

L'opera *De nihilo geometrico* di Giuseppe Torelli può dunque essere inserita nel fecondo clima culturale caratteristico della matematica del Settecento ed è una testimonianza chiara del vivo interesse attribuito alle questioni fondazionali dagli studiosi di quel periodo.

Ma l'importanza del lavoro non si limita all'ambito storico: per il matematico di oggi tale opera può essere fonte di riflessioni stimolanti sulle possibilità di presentare, anche didatticamente, i concetti e le tecniche dell'analisi (si veda ad esempio: Tsamir and Tirosh, 1992; D'Amore, 1996; Bagni, 1997).

Come abbiamo precedentemente segnalato, l'introduzione torelliana del "nulla geometrico" equivale ad un tentativo di presentare l'infinitesimo concepito in senso attuale; ma tale introduzione elude il ricorso al concetto di limite. Il tentativo messo in atto dallo studioso veronese è addirittura basato su alcuni assiomi, la cui formulazione si rivela tuttavia chiaramente insufficiente.

La mancanza della considerazione del concetto di limite come base dell'analisi matematica rende assai difficoltosa l'introduzione didatti ca della nozione di infinitesimi equivalenti e la presentazione del principio di sostituzione degli infinitesimi ([14]). Torelli ebbe nitidamente la percezione di tali concetti (si ricordi ad esempio il procedimento torelliano di "comparazione") e ne cercò brillantemente un'interpretazione in senso attuale; ma le sue intuizioni non ebbero il supporto di uno strumento tecnico adeguato e finirono dunque per dar vita ad una teoria comunque debole ed a tratti decisamente scorretta.

([13]) Osserva M. Kline: "Euler accetta senza riserve il fatto che esistano quantità assolutamente uguali a zero ma i cui rapporti sono numeri finiti" (Kline, 1991, I, p. 501). Ricordiamo che Sylvestre-François Lacroix (1765-1843), nel suo *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, fu il primo autore ad introdurre il termine "coefficiente differenziale" per indicare la derivata; egli inoltre definì il differenziale di una funzione sulla base della derivata della funzione stessa, ovvero nella forma (modernamente accettata) $dy = f'(x)dx$ (Lacroix, 1837).

([14]) Non dimentichiamo tuttavia che diversi studiosi, nel Settecento, si occuparono del calcolo basato sulla valutazione degli infinitesimi. Così scrive a tale proposito A. Agostini ricordando Vincenzo Riccati (1707-1775) e Girolamo Saladini (1731-1813): "[Vincenzo Riccati] con Girolamo Saladini pubblicò le *Institutiones Analyticae*

(Bologna 1766-1767), nelle quali è posto nella sua vera luce il principio di sostituzione degli infinitesimi..." (Agostini, 1936).

Possiamo concludere che la riflessione torelliana espressa nel trattato del 1758, nonostante il suo sostanziale fallimento, appare vivace ed interessante; è particolarmente significativo evidenziare le oggettive carenze di rigore rilevabili in un'analisi infinitesimale dallo spirito chiaramente moderno (soprattutto per l'interpretazione attuale dell'infinitesimo), ma non correttamente basata sul concetto di limite modernamente inteso.

L'Autore desidera ringraziare vivamente il Prof. Francesco Speranza dell'Università di Parma per le osservazioni al manoscritto e per i preziosissimi suggerimenti.

BIBLIOGRAFIA

Agostini, A. (1936), Riccati, *Enciclopedia Italiana*, XXIX, 241, Roma.

Archimede (1974), *Opere*, A. Frajese (a cura di), UTET, Torino.

Arrigo, G. e D'Amore, B. (1992), *Infiniti*, Angeli, Milano.

Bagni, G.T. (1997), *L'infinitesimo. Infinitesimo potenziale ed infinitesimo attuale nelle concezioni degli studenti della scuola secondaria superiore*, in via di pubblicazione.

Bottazzini, U. (1990), *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino.

Boyer, C.B. (1982), *Storia della matematica*, Mondadori, Milano.

D'Amore, B. (1996), L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi, Opening Relation to Topic Group XIV *Infinite processes throughout the curriculum*, 8th ICME, Sevilla, 14-21 July 1996 (*La matematica e la sua didattica*, 3, 1996, 322-335).

Enriques, F. (1938) *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica, Zanichelli, Bologna 1982).

Freguglia, P. (1982), *Fondamenti storici della geometria*, Feltrinelli, Milano.

Euler, L. (1787) *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in Analysi Finitorum ac Doctrina Serierum*, I-II, Galeati, Pavia (seconda edizione; prima edizione: 1755).

Kline, M. (1991), *Storia del pensiero matematico. I. Dall'Antichità al Settecento. II. Dal Settecento a oggi*, Einaudi, Torino (prima ed.: 1972).

Lacroix, S.F. (1837), *Traité elementaire du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*, Bachelier, Paris (5me ed.).

Leibniz, G.W. (1849-1863), *Mathematische Schriften*, I-VII., Gerhardt, C.I. (a cura di), Ascher-Schmidt, Berlin-Halle.

Loria, G. (1929-1933), *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino (ried.: Hoepli, Milano 1950; ristampa anastatica: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982).

Robinson, A. (1974), *Non-standard analysis*, North-Holland, Amsterdam-London.

Torelli, G. (1758), *De nihilo geometrico libri II*, Carattoni, Verona.

Tsamir, P. and Tirosh, D. (1992), *Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity*, PME XVI, 90-97, Durham (NH).