La matematica e la sua didattica 4 (1994), 432-444

I metodi pratici di sottrazione nei manuali di aritmetica

GIORGIO T. BAGNI

Summary. The pratical execution of subtraction is based upon several methods, whose roots are present in the works of many Authors and in many handbooks, in the History of Mathematics. In this paper, nine didactic works from 1478 to 1920 are examined, and different methods for pratical subtraction are described and compared.

INTRODUZIONE

L'esecuzione pratica della sottrazione di numeri naturali *in colonna* si basa su procedimenti e su accorgimenti didattici la cui elaborazione e diffusione affonda nella storia della matematica.

In non pochi libri frequentemente adottati per l'insegnamento nelle Scuole Elementari troviamo esposto il tradizionale metodo della sottrazione con la cosiddetta *presa in prestito*; ad esempio, in *Matelandia 2* di S. Bonuccelli Bargellini troviamo eseguita la seguente sottrazione:

$$\begin{array}{rr} {\scriptstyle 3} & {\scriptstyle 13} \\ 4 & 3\ - \\ & 6\ = \\ \hline 3 & 7 \end{array}$$

Nella stessa pagina, altre sottrazioni dello stesso tipo vengono proposte all'attenzione degli allievi, i quali sono invitati alla loro esecuzione; in una nota a fondo pagina, la regola è richiamata con la usuale denominazione:

"Obiettivo: introdurre l'operazione di sottrazione con prestito" ([2], p. 111).

Questa diffusissima regola (presentata ed ampiamente giustificata anche in molti manuali di Aritmetica razionale per gli Istituti Magistrali, [4], pp. 108-110, [8], pp. 189-192) non è però l'unica a trovare spazio nei libri dedicati agli alunni delle Scuole Elementari. In *Schede di matematica per la II elementare* di S. Thévenet, A. Garioudl e N. Pitot (a cura di M. Lavelli e G. Spanio), è proposta e descritta una regola pratica che differisce lievemente, ma significativamente, dalla precedente; leggiamo in tale libro, a proposito della sottrazione 95–76:

"Non si può ottenere 5 aggiungendo qualche numero a 6, perciò si prende in prestito una decina e si ha 15. Che cosa si aggiunge a 6 per avere 15? Si aggiunge 9. Scrivo 9 sotto la colonna delle unità.

Per la colonna delle decine: tengo conto che ho preso in prestito una decina, perciò: per avere 9 decine, avendone già 1 riportata, quante ancora ne devo aggiungere a 7? Ne devo aggiungere ancora 1. Scrivo 1 sotto la colonna delle decine: 1+7+1 riportata = 9 decine" ([13], p. 96).

La differenza tra le due regole è dunque la seguente: mentre nel primo caso la decina *presa in prestito* viene tolta dalla cifra delle decine del minuendo, in questo secondo caso essa viene aggiunta alla cifra delle decine del sottraendo.

Prima di ipotizzare una valutazione su tali regole pratiche, appare interessante ed opportuno un sintetico esame delle fonti storiche che richiamano i procedimenti ora citati.

RIFERIMENTI STORICI

I procedimenti ricordati nel paragrafo precedente sono presenti in molte pubblicazioni a stampa di soggetto matematico; ne proporremo una breve rassegna, al fine di illustrare la diffusione dei metodi esaminati nella storia della disciplina. Sono stati consultati i seguenti manuali di aritmetica pratica (risalenti ai secoli XV-XX):

- 1478, **(Anonimo)** [1]. Ne *Larte de labbacho* (l'*Aritmetica di Treviso*, il primo libro di matematica stampato al mondo), viene descritto direttamente il procedimento per la sottrazione con l'incremento della cifra del sottraendo:

"[452-348] .8. de .2. non se puo cavare: ma .2. me compie .10. quel .2. che te ha compi el to .10. tu die iongere a laltro .2. che sora .8. dicendo .2. e .2. fa .4. el qual tu die scrivere per resto sotto quel .8. con questa conditione: che a la figura seguente al .8. zoe al .4. tu die iongere .1." ([1], le pagine dell'incunabolo non sono numerate).

- 1738, **Clavio** [6]. L'Autore descrive innanzitutto il procedimento di sottrazione con la *presa in prestito* tra le cifre del minuendo ("che cosa ha da farsi quando la figura inferiore è maggiore della superiore", [6], pp. 17-20);

quindi enuncia una "più facil regola di sottrarre quando la figura inferiore è maggiore della superiore" ([6], pp. 20-24):

"Questa regola... è usata da molti Aritmetici, ma noi molto più facilmente così l'insegneremo. Quando la figura inferiore è maggior della superiore, piglisi la differenza che è tra essa, e il 10, e a questa differenza s'aggionga la figura superiore, dalla quale la sottrazzione non si può fare, e tutta la somma si scriva sotto la linea, perché questa somma avanzerebbe, se quella figura maggiore si levasse dal numero composto dal 10 e da quella figura superiore, dalla quale non si può fare la sottrazzione, non altrimente, che se fosse pigliata l'unità in presto... Doppo questo acciò non siamo sforzati di levare con l'imaginazione l'unità dalla figura superiore, dalla quale è stata virtualmente l'unità pigliata in presto, aggiongeremo alla figura inferiore, che prossimamente verso la parte sinistra segue, una unità, e questa somma dalla figura superiore (senza levar prima da essa alcuna unità) sottrarremo" ([6], pp.20-21).

- 1760, **Pereira** [11]. Nella prima parte del Capitolo III, intitolata "Do Diminuir"[1] ([11], pp. 7-11), l'Autore descrive il procedimento di sottrazione con la *presa in prestito* tra le cifre del minuendo; nella seconda parte del Capitolo III, intitolata "Outro modo de Diminuir"[2] ([11], pp. 11-12), annota:

"Quando a letra de cima he mayor, ou igual com a debaixo, restamos huma da outra... Porèm quando a debaixo he mayor que a de cima, accrescentamos-lhe 10 fem os pedir emprestados, e dizemos: vay 1, que accrescentamos a outra letra a debaixo, que se segue"[3] ([11], p. 11).

- 1767 e 1786, **Paulini a San Josepho** (P. Chelucci) [10]. Nel Capitolo 1, "Propositio IV. De Subtractione Integrorum" ([10], p. 11-13), l'Autore descrive unitamente i due metodi, sottolineandone l'equivalenza:

"Si quis numerus inferior subduci non potest a superiori, quia illo major est, intelligatur addita numero ipsi superiori decas, factaque subtractione, ponatur residuum infra lineam: sed deinde numerus superior, qui sequitur, unitate minuitur, vel (idem enim est) subsequens numerus inferior augetur unitate" ([10], p. 11).

(1) "Del Diminuire".
(2) "Altro modo di Diminuire".
(3) "Quando la cifra superiore è maggiore o uguale a quella inferiore, procediamo come nell'altro caso... Quando la cifra inferiore è maggiore della superiore, accresciamola fino a 10 e diciamo: riporto 1, unità con la quale aumentiamo l'altra cifra inferiore, collocata a lato della cifra in esame".

• 1796, **Marie** [9]. L’Autore, dopo avere dettagliatamente descritto il procedimento di sottrazione con la *presa in prestito* tra le cifre del minuendo, annota:

“La sottrazione si fa anche in un altro modo che useremo nella divisione. Per sottrarre 2964 da 4571 si dirà: dalla cifra inferiore 4 non può andarsi alla superiore 1 che è più piccola, ma andando a 11, la differenza è 7 che scrivo, e porto 1 perché sono andato a 11: parimente da 6, +1 (= 7) andando a 7, la differenza è 0 che scrivo: quindi da 9 non può andarsi a 5, ma andando a 15, la differenza è 6 che scrivo, e porto 1: infine da 2, +1 (= 3) andando a 4, la differenza è 1 che scrivo; e il resto totale è 1607” ([9], pp. 6-7).

• 1820, **Brunacci** [5]. Riporta *esattamente* ([5], p. 9) l’esempio presente in Marie, utilizzando le *stesse* parole di commento:

“La sottrazione si fa anche in un altro modo. Per sottrarre 2964 da 4571 si dirà: dalla cifra inferiore 4 non può andarsi alla superiore 1 che è più piccola, ma andando a 11, la differenza è 7 che scrivo, e porto 1 perché sono andato a 11: parimente da 6, +1 (=7) andando a 7, la differenza è 0 che scrivo: quindi da 9 non può andarsi a 5, m andando a 15, la differenza è 6 che scrivo, e porto 1: infine da 2, +1 (=3) andando a 4, la differenza è 1 che scrivo; e il resto è 1607” ([5], p. 9).

• 1843, **Francoeur** [7]. In “Della sottrazione” ([7], pp. 9 -14), l’Autore introduce direttamente il procedimento per la sottrazione con l’incremento della cifra del sottraendo:

“In generale, quando la cifra superiore sarà la minore, dovrà essa aumentarsi di dieci, ritenendo un’unità per aggiungerla alla cifra inferiore che succede immediatamente a sinistra. Si osserverà infatti che in tal modo il numero superiore viene aumentato di 10, ma che nel tempo stesso viene parimente aumentato di 10 il numero inferiore, il che no altera punto la differenza” ([7], p. 12).

• 1861, **Bourdon** [3]. L’Autore tratta l’argomento in “Della sottrazione” ([3], pp. 13-17); innanzitutto, egli introduce il procedimento di sottrazione con la *presa in prestito* tra le cifre del minuendo; in una “Osservazione”, quindi, afferma:

“È chiaro che invece di diminuire di una unità la cifra dalla quale si è tolta una unità, si può lasciare questa cifra tal quale si trova, purché si aumenti di una unità la cifra inferiore corrispondente. Questa maniera di operare è generalmente più comoda in pratica" ([3], p. 16).

- 1920, **Pincherle** [12]. Si tratta di un libro di testo per le scuole secondarie inferiori; l'Autore, nel paragrafo 25 ([12], pp. 21-23), introduce direttamente il procedimento per la sottrazione con l'incremento della cifra del sottraendo:

"Regola. Il sottraendo si scrive sotto il diminuendo, avendo cura di porre le unità del medesimo ordine in una stessa colonna verticale. L'operazione si comincia dalla destra. Se si può, si sottrae ogni cifra del sottraendo dalla corrispondente del diminuendo; se non si può (per essere la cifra del sottraendo maggiore della corrispondente del diminuendo) si aggiunge 10 alla cifra del diminuendo ed 1 alla cifra immediatamente a sinistra nel sottraendo" ([12], p. 22).

Il procedimento di sottrazione con la *presa in prestito* tra le cifre del minuendo viene descritto solo alla fine del paragrafo:

"Osservazione. Da molti viene anche usato il seguente modo di procedere... Se si può, si sottrae ogni cifra del sottraendo dalla corrispondente del diminuendo; se non si può (per essere la cifra del sottraendo maggiore della corrispondente del diminuendo) si aggiunge 10 alla cifra del diminuendo e si diminuisce di 1 la prima cifra significativa a sinistra di quella del diminuendo stesso; essendovi zeri intermedi, si sostituiscono con altrettanti nove" ([12], pp. 22-23).

CONCLUSIONI

Dopo questa breve rassegna storica, è opportuno ricapitolare i termini dei due procedimenti per l'esecuzione della sottrazione, spesso riportati parallelamente in manuali e libri di testo; essi sono evidentemente equivalenti: ad esempio, si esamini l'esecuzione *in colonna* della sottrazione 43–28:

$$\begin{array}{r} 4\,3\ - \\ 2\,8\ = \\ \hline 1\,5\ \end{array}$$

Con il tradizionale procedimento della *presa in prestito* tra le cifre del minuendo, al posto della sottrazione 3–8 (impossibile in **N**) si esegue la sottrazione 13–8 e quindi *si decrementa di 1 la cifra delle decine del minuendo* (lasciando inalterata la cifra delle decine del sottraendo); con il secondo procedimento esaminato, si esegue ugualmente la sottrazione 13–8 e *si incrementa di 1 la cifra delle decine del sottraendo* (lasciando invece inalterata la cifra delle decine del minuendo). L'equivalenza dei due procedimenti è garantita dalla proprietà invariantiva della sottrazione ([3], p. 16 e [10], p. 11): per quanto riguarda la sottrazione delle cifre delle decine, il risultato di (4–1)–2 (ottenuta nel primo caso) viene ad essere evidentemente uguale al risultato di 4 –(2+1) (ottenuta nel secondo caso).

Osserviamo però che dal punto di vista dell'utilità pratica, il procedimento che *non* prevede il *prestito* tra le cifre del minuendo appare talvolta di più agevole esecuzione. Ad esempio, nelle sottrazioni di numeri espressi in notazione binaria, la frequente presenza di ripetuti *prestiti* può risultare pesante per l'allievo (si vedano ad esempio le operazioni riportate da B. Bottiroli e G. Pionetti nel manuale *Aritmetica razionale* per gli Istituti Magistrali, [4], pp. 108-110; il metodo utilizzato per le sottrazioni è quello della *presa in prestito* sulle cifre del minuendo).

Illustriamo quanto affermato con un esempio: si voglia eseguire, in colonna, la sottrazione 110001−10011 (in notazione binaria):

$$\begin{array}{r} 1\;1\;0\;0\;0\;0\;- \\ 1\;0\;0\;0\;1\;= \\ \hline 1\;1\;1\;1\;1 \end{array}$$

Il procedimento del *prestito* tra le cifre del minuendo potrebbe comportare sùbito una qualche difficoltà per l'allievo: l'esecuzione di 0 −1 non è possibile e la necessità di prendere in *prestito* una decina per eseguire 10−1 appare tecnicamente piuttosto complicata: il primo 1 presente si trova *quattro cifre a sinistra* del nostro 0! I *prestiti* devono quindi avvenire... ripetutamente, ed essi devono essere tutti tenuti ben chiari in mente: tutto ciò potrebbe essere causa di qualche imbarazzo per l'allievo non abilissimo.

Il secondo procedimento sopra presentato può rivelarsi più semplice: per andare da 1 a 10 (giacché da 1 a 0 non è possibile) si scrive 1 e si aumenta lo 0 (seconda cifra da destra del sottraendo) di 1; si ripete lo stesso ragionamento altre tre volte ed infine si va da 10 (1+1) a 11 scrivendo 1 come quinta cifra (da destra) del risultato. Non è necessaria la lunga sequenza mnemonica delle *prese in prestito* e l'esecuzione dell'operazione app are dunque meno insidiosa.

Concludiamo rilevando che la generale praticità di questo secondo procedimento sembra contrastare con la vasta (e preponderante) diffusione del primo, anche in molti manuali di aritmetica razionale e di aritmetica pratica [4]. A tale proposito, non sarà superfluo notare che, dal punto di vista didattico, il metodo che prevede la *presa in prestito* tra le cifre del minuendo può apparire concettualmente più semplice: la diminuzione della cifra del minuendo (che ha ceduto un'unità in prestito alla cifra immediatamente prossima) può infatti risultare più chiaramente ed immediatamente giustificabile, più intuitiva dell'equivalente in cremento della cifra del sottraendo.

L'Autore desidera ringraziare vivamente il Prof. Piero Plazzi e la Prof. Cristina Zucchini di Bologna per i preziosi spunti, la collaborazione ed i suggerimenti.

Note bibliografiche

[1] **(Anonimo)**, *Larte de labbacho*, senza indicazione dell'editore, Treviso 1478; copia anastatica con commento a cura di **G. Romano**, Longo e Zoppelli, Treviso 1969).

[2] **S. Bonnucelli Bargellini**, *Matelandia 2. Matematica e informatica per la Scuola Elementare. Classe seconda*, Signorelli, Milano 1985.

[3] **A. Bourdon**, *Elementi di aritmetica*, Bizzoni, Pavia 1861.

[4] **B. Bottiroli-G.Pionetti**, *Aritmetica razionale*, Ghisetti e Corvi, Milano 1985.

[5] **V. Brunacci**, *Elementi di algebra e geometria*, Imperiale Regia Stamperia, Milano 1820.

[6] **C. Clavio**, *Aritmetica prattica*, Viezzeri, Venezia 1738.

[7] **L.B. Francoeur**, *Corso completo di matematiche pure*, Batelli, Napoli 1843.

[8] **F. Guadalupi-C. Fregola**, *Aritmetica razionale*, Lucarini, Roma 1984.

[9] **A. Marie**, *Lezioni elementari di matematiche*, Allegrini, Firenze 1796.

[10] **Paulini a S. Josepho**, *Institutiones Arithmeticae*, Occhi, Venezia 1767 (altra edizione: Severini, Napoli 1786).

[11] **A. Pereira**, *Tratado de arithmetica e algebra*, Da Silva, Lisbona 1760.

[12] **S. Pincherle**, *Gli elementi dell'aritmetica*, Zanichelli, Bologna 1920.

[13] **S. Thévenet-A. Garioudl-N. Pitot** (a cura di **M. Lavelli-G. Spanio**), *Dall'osservazione al calcolo. Schede di matematica per la II elementare*, Editrice Piccoli, Genova 1985 (I ediz.: Bodras, Parigi 1981).