In Bazzini, L. (Ed.), *Atti del Seminario Franco Italiano di Didattica dell'Algebra, VI, (SFIDA 21–25)* (pp. 141–156). Torino: Dipartimento di Matematica, Università di Torino (2008)

Simboli, linguaggio e contesto culturale dalla storia alla didattica della matematica

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine (Italia)

Summary

Our purpose is to discuss, on a theoretical basis, the problem of knowledge development and its ties to its cultural contexts, keeping in mind an educational context: by that, we emphasize the historicity of knowledge and claim that cultural aspects play a cognitive and epistemological role in the way we think mathematically. More specifically, we provide a comparison of some different strategies used by mathematicians in different historical periods in order to prove that prime numbers are infinitely many. We conclude that each culture has developed a "technology of semiotic activity" to express and objectify knowledge (Radford, 2002). The perspective presented requires a good level of epistemological skill on the part of teachers and therefore it must be carefully considered in the teacher education.

I. Introduzione

Un uso corretto della storia nella didattica della matematica è un elemento importante della formazione degli insegnanti (Schubring & Al., 2000). Come vedremo, rilevanti assunzioni epistemologiche sono indispensabili per collegare i processi di insegnamento-apprendimento alla considerazione di dati storici. È inoltre indispensabile notare che è impossibile considerare l'evento storico senza l'influenza delle nostre concezioni moderne (Radford, 1997): dobbiamo tenere conto che quando ci rivolgiamo al passato poniamo a confronto due culture "diverse ma non incommensurabili" (Radford, Boero & Vasco, 2000, p. 165).
Lo scopo del presente lavoro è l'esame, su basi teoriche, di alcuni aspetti collegati allo sviluppo della conoscenza matematica con riferimento ai diversi contesti culturali, tenendo conto di una prospettiva didattica. Proporremo alcune strategie utilizzate in periodi storici diversi per dimostrare un celebre teorema e le analizzeremo alla luce del quadro teorico (riprenderemo alcune considerazioni da Bagni 2004 e da Bagni, in via di pubblicazione).

II. Diversi approcci epistemologici

II-1. L'insegnamento e l'evoluzione della conoscenza scientifica

Un approccio storico mette a disposizione degli insegnanti diverse opportunità: da una presentazione di aneddoti (a volte considerata superficiale, ma utile per rinforzare la motivazione degli allievi: Radford, 1997, p. 26) alle riflessioni metacognitive e alla possibilità di una conoscenza approfondita delle condizioni socio-culturali che hanno influenzato lo sviluppo della matematica (Furinghetti & Radford, 2002). Un elemento essenziale è però il seguente: l'insegnamento è influenzato dalle concezioni dei docenti a proposito della natura e dell'evoluzione della conoscenza scientifica (Brickhouse, 1990; Hashweb, 1996).

Chiamiamo "conoscenza matematica istituzionalizzata" la *più recente* versione del particolare *savoir* considerato (Chevallard, 1985), la forma correntemente accettata dai matematici, e tale istituzionalizzazione è fortemente contestualizzata. Essa fa riferimento ad un particolare periodo (il presente) e al nostro contesto sociale e culturale. Si noti tuttavia che tale approccio richiede una precisazione: una stessa conoscenza può infatti essere considerata e organizzata sulla base di diversi punti di vista teorici (si pensi ad esempio alla teoria dell'integrazione secondo Bourbaki o secondo la teoria della misura). A volte, dunque, lo stesso insegnante sarà chiamato a scegliere tra diverse versioni di "conoscenza matematica istituzionalizzata": quest'ultima espressione dovrà essere considerata in una prospettiva ampia.

A proposito del contesto, faremo riferimento principalmente a un contesto "culturale". Ad esempio, considereremo l'influenza della nozione di infinito (dal punto di vista matematico e, più in generale, filosofico) e l'importanza delle regole del calcolo proposizionale nell'antica matematica greca. Il contesto culturale influenza dunque sia una particolare conoscenza (ad esempio la dimostrazione di un teorema) che la matematica in generale (ad esempio la concezione della matematica nell'ambito di una tradizione culturale). Inoltre terremo conto del contesto "sociale": esso è importante almeno nel senso "indiretto" specificato da G.G. Granger, come una sorta di "condizione al contorno" (Granger, 1994, cap. 18): è ben poco plausibile ipotizzare che il contesto sociale dell'antico mondo greco (ci riferiamo alla democrazia, alla presenza della schiavitù etc.) possa essere considerato ininfluente sullo sviluppo culturale e quindi sullo sviluppo della matematica (tesi significative sono discusse in: Koyré, 1967). Dunque il background sociale può essere considerato rilevante per lo sviluppo delle idee matematiche.

II–2. La storia nella didattica della matematica: the problemi…

Una breve introduzione al nucleo del nostro lavoro richiede la considerazione di tre problemi:

- uno è un problema *epistemologico*: lo sviluppo storico della conoscenza;
- un altro è un problema *pedagogico*: la *transposition didactique* (Chevallard, 1985);
- un altro ancora riguarda il ruolo della storia nella nostra comprensione dello sviluppo del sapere: si tratta dunque, ancora una volta, di un problema *epistemologico*.

Tali problemi non sono indipendenti l'uno dall'altro: come accennato, l'organizzazione di una *transposition didactique* si basa su di una serie di assunzioni epistemologiche riguardanti lo sviluppo della conoscenza: ogni *transposition* inevitabilmente presuppone una teoria della conoscenza ed è quindi relativa ad un quadro teorico epistemologico generale. Questo punto è, a nostro avviso, essenziale.

II–3. …e tre tipi di approccio epistemologico

Pertanto descriveremo brevemente le attuali categorie epistemologiche riguardanti lo sviluppo della conoscenza matematica. Dovremo distinguere almeno fra tre tipi di impostazioni:

1) quelle che non considerano l'aspetto storico: le *epistemologie a-storiche*;
2) quelle che considerano le radici storiche del sapere senza però affermare che gli aspetti del contesto culturale abbiano importanza fondamentale; possono essere denominate *epistemologie storiche*;
3) infine quelle che evidenziano la storicità della conoscenza e affermano che gli aspetti culturali hanno un ruolo cognitivo ed epistemologico fondamentale nel modo in cui noi pensiamo matematicamente: le *epistemologie storico-culturali*.

Ad esempio, il costruttivismo radicale appartiene alla prima categoria. L'epistemologia di Piaget appartiene alla seconda categoria: infatti l'epistemologia genetica riconduce gli oggetti matematici al pensiero matematico (un insieme di strutture mentali si evolve in un insieme di strutture formali), prescindendo dal contesto culturale (Beth & Piaget, 1966). Esempi di impostazioni della terza categoria sono quelle di Wartofsky (1979), Crombie (1995), Radford (1997), Furinghetti & Radford (2002).

Torniamo ora alla “conoscenza istituzionalizzata”. Possiamo identificare completamente il *savoir* (*savoir savant* che sarà “trasformato” in *savoir enseigné*) con tale conoscenza istituzionalizzata? Questa scelta sembra essere plausibile. Come rilevato, però, è impossibile parlare di *transposition didactique* senza riferirsi ad un’epistemologia: una scelta è comunque necessaria. Secondo noi, la dimensione storica *deve essere considerata*: come implicitamente notato, spesso una conoscenza matematica non è completamente “nuova”, ma è basata su nozioni precedenti: in molti sensi, dunque, la matematica *contiene* le proprie radici storiche. E, come vedremo, molti aspetti culturali hanno un ruolo epistemologico e cognitivo importante per quanto riguarda il nostro modo di pensare e di fare matematica.

II-4. Diverse versioni di una conoscenza matematica riferite a diversi contesti

La nostra precedente descrizione è ancora piuttosto povera (abbiamo visto, ad esempio, che la “conoscenza istituzionalizzata” può essere interpretata in modi diversi, anche dal punto di vista didattico). Per ottenere una descrizione più dettagliata della struttura di una conoscenza K (dal punto di vista storico, ma anche didatticamente), possiamo domandarci se lo sviluppo di K sia da considerare quantitativamente o qualitativamente (D’Amore, 2001): una nuova versione K(m+1) deve essere considerata insieme alle vecchie versioni K(1), ..., K(m) o al posto di esse?

La questione così impostata richiede una breve osservazione: la considerazione di una sequenza di versioni K(1), ..., K(m) può implicare una versione eccessivamente lineare dell’evoluzione di una teoria: elementi geografici, discussioni, differenze tra le varie scuole etc. possono suggerire una rappresentazione con un maggior numero di dimensioni. Dunque la nostra rappresentazione deve essere considerata in senso molto ampio: un processo storico può implicare la presenza di momenti in cui, ad esempio, vecchie questioni sono riprese in termini del tutto differenti. Inoltre la precedente distinzione tra sviluppo quantitativo e qualitativo può essere fraintesa: sia un modello di puro “affiancamento” che un modello di puro “rimpiazzamento” porterebbero a difficoltà teoriche. Entrambi i modelli si baserebbero su concezioni che terrebbero scarsamente in conto i contesti. Ad esempio, l’evoluzione storica di una conoscenza K basata sul modello secondo il quale la versione K(m+1) è semplicemente collocata a fianco di K(m) non considererebbe il fatto che K(m) è stata concepita in un contesto C(m), mentre K(m+1) va riferita al nuovo contesto C(m+1); per comprendere i legami tra diverse versioni di K, dovremmo considerare le connessioni dei rispettivi contesti (Crombie, 1995, p. 232). Tuttavia la sostituzione di K(m+1) al posto della vecchia versione K(m) implicherebbe una continua ricostruzione *ex novo*, mentre la progressiva evoluzione del contesto suggerisce un progressivo reinquadramento della conoscenza stessa.

Dunque in un periodo considerato (ad esempio al tempo presente) e nel contesto C(n) possiamo considerare uno schema secondo il quale le versioni “storiche” della conoscenza K sono incluse nel *savoir* con riferimento ai loro rispettivi originali contesti culturali. La situazione può essere considerata continuamente in evoluzione: un cambiamento nel contesto, da C(n) a C(n+1), può portare all’istituzionalizzazione della (nuova) conoscenza K(n+1). L’importanza didattica di tale approccio è chiaramente sottolineata da L. Radford:

> “Indeed, historico-epistemological analyses may provide us with interesting informations about the development of mathematical knowledge within a culture and across different cultures and provide us with informations about the way in which meanings arose and changed; we need to understand the negotiations and the cultural conceptions that underlie these meanings. The way in which an ancient idea was forged may help us to find old meanings that, through an adaptive

didactic work, may probably be redesigned and made compatible with modern curricula". (Radford, 1997, p. 32)

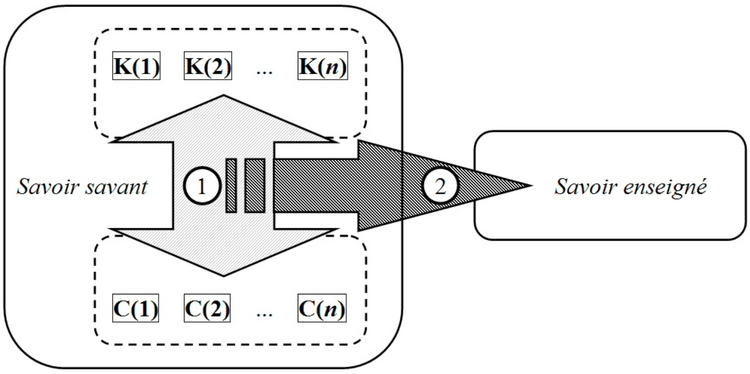
La precedente descrizione non può essere considerate in termini assoluti:

- innanzitutto, la cosiddetta versione attuale di K riflette le nostre posizioni didattiche. Il *savoir* istituzionalizzato deve essere impiegato nei processi di insegnamento-apprendimento (*savoir enseigné*), dunque l'insegnante deve individuare gli elementi che possono essere efficacemente impiegati in tali processi;
- inoltre la "storia di K" riflette le nostre posizioni epistemologiche: i dati storici saranno sempre rilevanti rispetto al quadro teorico sul quale una ricerca si imposta ed a partire dal quale si sviluppa (Radford, 1997, p. 27) e dunque la stessa selezione dei dati storici non è epistemologicamente neutra (di conseguenza potrebbe essere opportuno fare riferimento alla "storia di K" con l'espressione "storia *parziale* di K");
- infine, va ricordato che anche nel campo degli approcci storico-culturali ci sono diversi modi di considerare i legami tra conoscenza e contesto. Gli approcci storico-culturali possono essere classificati in rapporto al modo in cui la sequenza K(i) viene collegata ai contesti C(i): l'impostazione alla quale ci riferiremo sarà l'antropologia semiotico-culturale di Radford (si veda ad esempio: Radford, 2004).

III. Storia e processi di insegnamento-apprendimento

III-1. Dal savoir savant al savoir enseigné

Torniamo all'ambito didattico: come notato, il *savoir savant* descritto con riferimento a K deve essere trasformato in *savoir enseigné* mediante una *transposition didactique.* Un'importante questione si pone: qual è, in questa fase, il ruolo della "storia di K"?
Ciò coinvolge due differenti aspetti (Tab. 1, collegamenti 1 e 2):



Tab. 1

1) il collegamento tra cultura e conoscenza, cioè tra K(i) e C(i): questo è il principale oggetto della precedente riflessione;
2) il ruolo (non solo pratico) della storia nella *transposition didactique*. Questo punto di vista ci consentirebbe di sottolineare ancora che la storia della matematica può essere uno strumento molto utile per l'insegnante: ad esempio, si potrebbero esaminare le conseguenze didattiche di elementi non matematici e mostrare come si possa ricorrere ad esse per migliorare l'efficacia dei processi di insegnamento-apprendimento.

Ovviamente il secondo aspetto è molto importante: quali sono, ad esempio, le caratteristiche della *transposition didactique* di K(n) (la versione di K istituzionalizzata al momento in cui si considera il processo di insegnamento-apprendimento) e quelle della *transposition didactique* dei riferimenti storici che costituiscono la "storia di K"? Il punto centrale, da questo punto di vista, sarebbe proprio quest'ultimo: i riferimenti storici possono essere proposti sia con riferimento al nostro moderno contesto C(*n*) che con riferimento ai contesti originali C(1), ..., C(*n*–1) (*contestualizzazione storica*). Entrambe le scelte sono basate su importanti assunzioni epistemologiche e hanno conseguenze didattiche non trascurabili.

Tuttavia nella sezione precedente abbiamo affrontato principalmente il modo di teorizzare i collegamenti tra K(*i*) e C(*i*); dunque ci occuperemo principalmente di questo aspetto (in Tab. 1, i collegamenti 1). In letteratura alcune ricerche sono state dedicate ai collegamenti tra il *savoir* (e la "sua storia") e la conoscenza presentata dagli insegnanti agli allievi nella pratica didattica (si veda ad esempio l'approccio "voci ed echi" in: Boero & Al. 1998).

III-2. Ostacoli epistemologici

Lo sviluppo storico descritto dal singolo punto di vista moderno non è inaccettabile; ad esempio, questa scelta potrebbe portarci ad evidenziare, partendo dalle nostre concezioni moderne, gli "ostacoli epistemologici" incontrati dagli allievi (Brousseau, 1983, che cita Bachelard, 1938 e Piaget, 1975), ma un parallelismo tra sviluppo storico e crescita cognitiva (risalente alla legge di E. Haeckel del 1874, secondo la quale l'ontogenesi ricapitolerebbe la filogenesi: Piaget & Garcia, 1983) ci porta a considerare altre questioni. Infatti una tale impostazione è caratterizzata da assunzioni importanti (Radford, 1997, 2003b): ad esempio, la ricomparsa, nei processi di insegnamento-apprendimento, degli stessi ostacoli manifestatisi nella storia; nonché l'approccio sostanzialmente isolato dell'allievo alla conoscenza, senza interazioni con gli altri allievi e con l'insegnante: si tenga presente che gli ostacoli sono suddivisi in epistemologici, ontogenetici, didattici (Brousseau, 1983) e culturali (Brousseau, 1989) e questa suddivisione mostra come la sfera del sapere sia considerata isolatamente dalle altre sfere. Con riferimento alla Tab. 1, possiamo così riassumere le assunzioni che stanno alla base della prospettiva teorica degli ostacoli epistemologici (Radford, Boero & Vasco 2000):

(1) il sapere esiste e rappresenta la soluzione migliore per alcuni problemi; gli ostacoli epistemologici si presentano sia nella storia che nella pratica didattica;

(2) la sfera del sapere è separate dalle altre sfere didattiche e culturali; dunque gli allievi si avvicinano al sapere isolatamente.

III-3. La prospettiva storico-culturale

Secondo la prospettiva storico-culturale di Radford, la conoscenza è collegata alle attività degli individui e tutto ciò è strettamente legato alle istituzioni culturali (Radford, 1997, 2003a e 2003b; Bagni, 2005); la conoscenza non si costruisce individualmente, ma in un ampio contesto sociale (Radford, Boero & Vasco, 2000, p. 164) e il ruolo della storia deve essere interpretato con riferimento alle differenti situazioni socio-culturali (Wartofsky, 1979); esso fornisce inoltre la possibilità di uno studio approfondito dei periodi storici considerati. Sintetizziamo le assunzioni epistemologiche (Tab. 1):

(1) la conoscenza si collega alle azioni richieste per risolvere problemi e dunque i problemi sono risolti nei contesti storico-culturali dei periodi considerati;

(2) la conoscenza si costruisce socialmente; le istituzioni culturali influenzano gli allievi.

Confrontiamo brevemente questa prospettiva antropologica con quella degli "ostacoli epistemologici": sebbene in una revisione della propria teoria Brousseau (1989) abbia aggiunto gli ostacoli culturali alla lista degli ostacoli, egli mantiene gli ostacoli epistemologici separati da quelli culturali, assumendo quindi una prospettiva di formazione della conoscenza nella quale i collegamenti tra C(*i*) e K(*i*) *non* sono diretti. In tal modo, la teleologia della conoscenza non è governata dalla cultura ma dalla Ragione, come indicato da Piaget e dalla parte razionalista dell'epistemologia kantiana: dunque l'approccio di Brousseau, con riferimento alla distinzione proposta in II-3, deve essere classificato tra le *epistemologie orientate alla storia*. La differenza essenziale tra questo approccio e la prospettiva storico-culturale sta quindi nella spiegazione che ciascuna di esse offre dei legami tra C(i) e K(i): tra di esse c'è un distacco incolmabile. La differenza si manifesta chiaramente se si confronta una concezione ricapitolazionista in cui gli ostacoli "storici" ricompaiono nella pratica didattica e l'identificazione della conoscenza in una prassi cognitiva culturale.

IV. La storia di un celebre teorema

> "Reductio ad absurdum, which Euclid loved so much, is one of a mathematician's finest weapons. It is a far finer gambit than any chess play: a chess player may offer the sacrifice of a pawn or even a piece, but a mathematician offers the game."
>
> Godfrey H. Hardy (*A Mathematician's Apology*, 1941)

Considereremo ora alcune diverse dimostrazioni di un famoso teorema (ed è importante osservare che in questo lavoro una "dimostrazione" sarà considerata come "dimostrazione matematica" piuttosto che come "argomentazione": si noti ad esempio che la parola francese "démonstration" e quella inglese "proof" hanno significati diversi: Balacheff ha proposto che il termine "démonstration" sia tradotto con "dimostrazione matematica": Balacheff, 2004).

IV-1. Euclide e Kummer:quanti sono i numeri primi?

Applicheremo alcune considerazioni precedentemente discusse ad un esempio classico: il teorema che afferma che i numeri primi sono infiniti (e un punto cruciale, come vedremo, riguarderà la concezione dell'infinito). Presenteremo alcune dimostrazioni date in contesti storico-culturali diversi (Heiede, 1996; Bagni, 2004), iniziando dalla Proposizione IX-20 degli *Elementi* euclidei, *i numeri primi sono più di ogni assegnata quantità di primi*, per passare alla versione di Kummer (1878). Spesso tale teorema è considerato uno dei più eleganti esempi di proposizione dimostrata mediante *reductio ad absurdum*. Consideriamo dunque l'originale dimostrazione euclidea (Heath, 1952, p. 184, Fig. 1; inoltre: Fig. 2, N. Tartaglia, *Euclide Megarense acutissimo philosopho*, Bariletto, Venezia 1569, p. 171):

Dimostrazione (Euclide, 300 a.C.). Siano A, B, C gli assegnati numeri primi. Affermo che ci sono altri numeri primi oltre ad A, B, C. Sia DE il minimo comune multiplo di A, B, C; si aggiunga l'unità DF a DE. Ora, EF o è primo o non lo è.

- Sia EF primo. Allora abbiamo trovato un numero primo EF oltre ad A, B, C.
- Oppure sia EF non primo. Esso è dunque divisibile per qualche numero primo (*Elementi* VII, 31) che indichiamo con G.

Affermo che G non coincide con alcuno dei numeri A, B, C. Ammettiamo che ciò sia possibile. A, B, C dividono DE e anche G divide DE. Ma esso divide anche EF. Dunque G, dovrebbe essere un divisore della differenza tra EF e DE, l'unità DF, e ciò è assurdo.

Dunque G non coincide con alcuno dei numeri A, B, C e per ipotesi G è primo. Abbiamo così trovato un numero primo G oltre ad A, B, C. Q. E. D.

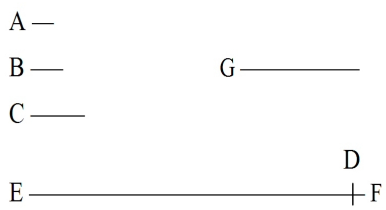
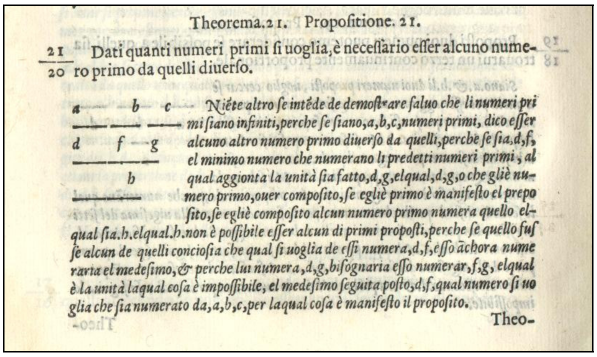


Fig. 1



Theorema.21. Propositione. 21.

21/20 Dati quanti numeri primi si uoglia, è necessario esser alcuno numero primo da quelli diuerso.

Niēte altro se intēde de demostrare saluo che li numeri primi siano infiniti, perche se siano, a, b, c, numeri primi, dico esser alcuno altro numero primo diuerso da quelli, perche se sia, d, f, el minimo numero che numerano li predetti numeri primi, al qual aggionta la unità sia fatto, d, g, elqual, d, g, o che gliè numero primo, ouer composito, se gliè primo è manifesto el preposito, se gliè composito alcun numero primo numera quello elqual sia. h. elqual. h. non è possibile esser alcun di primi proposti, perche se quello fusse alcun de quelli conciosia che qual si uoglia de essi numera, d, f, esso āchora numeraria el medesimo, & perche lui numera, d, g, bisognaria esso numerar, f, g, elqual è la unità laqual cosa è impossibile, el medesimo seguita posto, d, f, qual numero si uoglia che sia numerato da, a, b, c, per laqual cosa è manifesto il proposito.

Theo-

Fig. 2

Una questione è interessante: si tratta davvero di una dimostrazione per assurdo? Certamente la parte centrale (evidenziata) si basa su di una *reductio ad absurdum*. Ma essa si riferisce solo alla sezione seguente: *se un numero (primo) A, B, C divide due numeri consecutivi DE e DF, esso divide la loro differenza DF, cioè l'unità e questo è impossibile* (si noti che in questo caso la primalità di A, B, C è un'ipotesi non necessaria). La dimostrazione di Euclide considera inizialmente alcuni primi (A, B, C), quindi costruisce un nuovo primo e dimostra che non è uguale ad alcuno dei primi dati: *questa* parte è dimostrata per assurdo. Ma spesso le moderne dimostrazioni del teorema sono simili alla seguente (Ribenboim, 1980, p. 4):

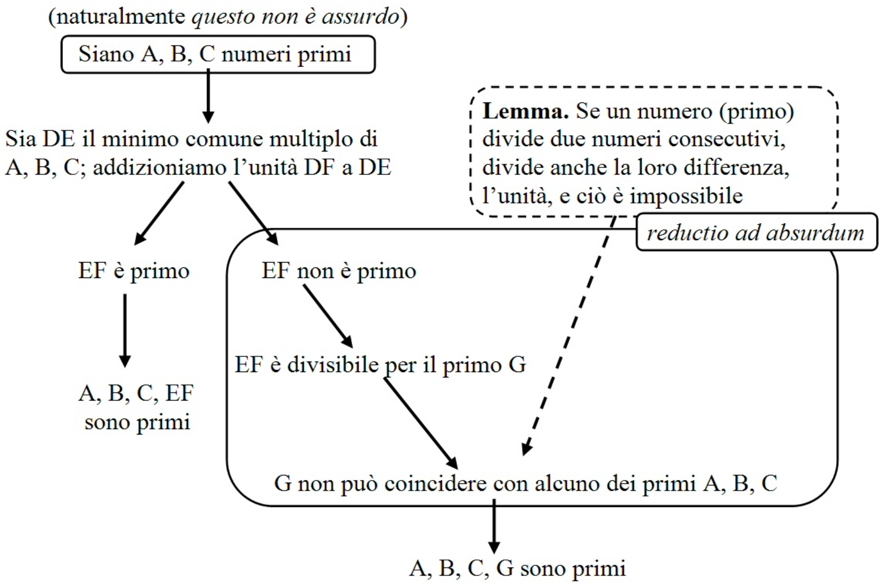
> *Dimostrazione* (Kummer, 1878). Supponiamo che esista soltanto la quantità finita di primi 2, 3, ..., p_n. Sia m il prodotto di tali primi; m–1 è un prodotto di primi, dunque ha un divisore primo q in comune con m; q divide m–(m–1) = 1, il che è assurdo.

In questo caso si afferma che *i numeri primi sono infiniti* perché si dimostra che non è possibile considerare un numero finito di primi. In una dimostrazione per assurdo sia la tesi che la sua negazione hanno un ruolo essenziale, dunque la considerazione di un insieme infinito, in questo tipo di dimostrazione, è inevitabile. Del resto il lavoro di Kummer è intitolato *Neuer elementarer Beweis, dass die Anzahl aller Primzahlen einen unendliche ist*, e al momento della sua pubblicazione l'infinito era considerato e utilizzato nella pratica matematica (i *Paradossi* di Bolzano erano stati pubblicati nel 1851 e gli articoli di Cantor nei *Mathematische Annalen* e in *Journal für Mathematik* a partire dal 1874).

IV-2. Due diversi contesti storici

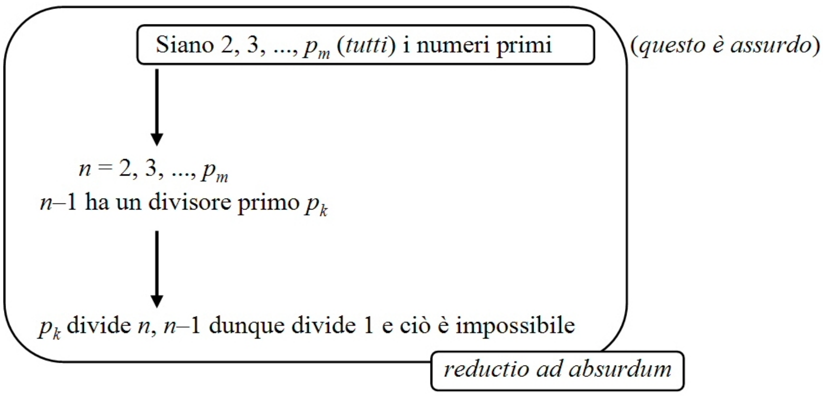
L'osservazione fondamentale è che la Proposizione IX-20 non fa esplicito riferimento all'infinito, ma è compatibile con la nozione aristotelica di infinito potenziale: è infatti noto che i Greci distinguevano rigorosamente l'infinito potenziale da quello attuale, e l'infinito in matematica (seguendo Aristotele, *Fisica*, Γ, 6-7, 207a, 22-32) era accettato solo in senso potenziale; dunque Euclide usa la *reductio ad absurdum* con prudenza e, come notato, solo con riferimento a un lemma. Tuttavia Euclide operava in un contesto culturale in cui le dimostrazioni per assurdo erano importanti: i suoi *Elementi* sono collocati dopo il passaggio dalla matematica empirica alla matematica deduttiva, in un contesto basato sulla distinzione parmenidea tra conoscenza ed opinione (Szabó, 1977) ed un'abitudine intellettuale incentrata su di un particolare stile di argomentazione, maturato nei circoli filosofici (Radford, 1996 e 1997). L'uso della *reductio ad absurdum* può essere messo in relazione con la struttura ontologica ("essere/non-essere") del periodo, e questa situazione può essere considerata un esempio di influenza di un più generale (non solo *matematico*) contesto culturale (Radford, 2003b, p. 70; Unguru, 1991; si ricordi che secondo J.L. Gardies, probabilmente Euclide non conosceva l'equivalenza logica tra A $\Rightarrow$ B e $\neg$B $\Rightarrow$ $\neg$A: Gardies, 1997, pp. 50-55).

IV-3. Euclide e Kummer: analogie e differenze



Tab. 2

Per riassumere analogie e differenze tra le dimostrazioni di Euclide e di Kummer, si osservi che il primo considera "*una qualsiasi* assegnata quantità di primi" (e ciò non è illecito), mentre il secondo "*tutti* i numeri primi" (e suppone che siano finiti). Entrambe le dimostrazioni, tuttavia, si basano sulla stessa proprietà: se un numero (primo) divide due numeri consecutivi, divide anche la loro differenza, cioè l'unità, e questo è impossibile. Sia in Euclide che in Kummer's qui scatta la *reductio ad absurdum*: ma nella versione di Euclide questo è un lemma (Tab. 2). Dunque Euclide dimostra che è possibile trovare un primo diverso dai numeri primi considerati. Nella versione di Kummer, invece, la proprietà sopra ricordata è il vero nucleo della dimostrazione (Tab. 3).



Tab. 3

È didatticamente significativo inquadrare le dimostrazioni di Euclide e di Kummer nei rispettivi contesti culturali, facendo riferimento in particolare alla concezione di infinito. Ciò consente, innanzitutto, di proporre agli studenti una conoscenza del *savoir* collegata a quella dei diversi momenti storici considerati.

IV-4. Le dimostrazioni di Leonhard Euler

È interessante confrontare le dimostrazioni di Euclide e di Kummer con altre dimostrazioni sviluppate in settori matematici diversi (e naturalmente non suggeriamo con ciò di usare in classe approcci collegati con idee matematiche che non sarebbero alla portata dei nostri allievi). Questo nuovo paragone può essere utile per rilevare l'importanza del contesto (matematico e non matematico), dunque è significativo nella formazione degli insegnanti. Considereremo una dimostrazione di Leonhard Euler (1707-1783) in ambito analitico (Ribenboim, 1980, p. 7; seguiremo: L. Euler, *Introduction a l'Analyse Infinitésimale*, Barrois, Paris 1796, prima edizione francese, vol. I: Fig.3, p. 208; Fig. 4, p. 209; Fig. 4 e 5, p. 213):

Dimostrazione (Euler, 1748). Consideriamo la serie: $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$ (Fig. 3).

272. Donc la ſérie eſt toujours composée d'un nombre infini de termes, quelque ſoit le nombre des facteurs, infini ou fini. Par exemple, on aura . . . .

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \&c.$$

EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I. 2 D

Fig. 3

Ponendo $x = 1/2$ e $x = 1/3$ abbiamo sia: $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots$ che $\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}+\ldots$.

Si può scrivere (Fig. 4): $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\ldots$. Al secondo membro abbiamo dunque 1 e i reciproci degli interi positivi aventi per fattori primi soltanto 2, 3.

210 DES SÉRIES RÉSULTANTES

ſérie, où ſe trouvent tous les nombres qui peuvent être formés ſeulement par la multiplication du nombre deux; c'eſt-à-dire, toutes les puiſſances de deux. On aura enſuite

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{16}+\frac{1}{18}+\&c.$$

On ne trouve ici que les nombres formés par la combinaiſon des nombres 2 & 3, ou qui n'ont d'autres diviſeurs que 2 & 3.

273. Donc, ſi au lieu de α, β, γ, δ &c. on écrit l'unité diviſée par tous les nombres premiers, & qu'on ſuppoſe

$$P = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\,\&c.}$$

on aura . . . .

$$P = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\&c.$$

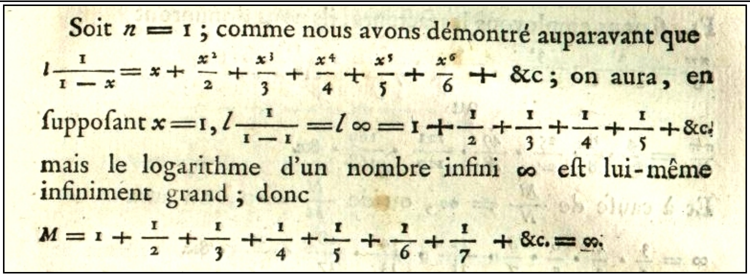
Série qui comprend tous les nombres, tant les nombres premiers, que ceux qui en ſont formés par la multiplication. Or comme tous les nombres ſont ou des nombres premiers, ou des nombres compoſés de ceux-ci par la multiplication, il eſt évident qu'on doit trouver ici tous les nombres entiers dans les dénominateurs.

Fig. 4

Se si considerano *tutti* i numeri primi si ottiene:

$$P=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{11}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{13}\right)\&\,\text{c.}}$$

e $P=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\&\text{c.}$ (la *serie armonica*).

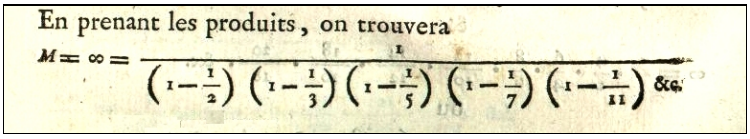


Soit $n = 1$; comme nous avons démontré auparavant que $l\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \&c$; on aura, en ſuppoſant $x = 1$, $l\frac{1}{1-1} = l\,\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \&c.$ mais le logarithme d'un nombre infini ∞ eſt lui-même infiniment grand; donc

$$M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \&c. = \infty.$$

Fig. 5

Se i primi fossero finite, la quantità al primo membro sarebbe finite, mentre la serie armonica diverge (si noti che ciò viene giustificato applicando: $\ln\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots$ con $x = 1$, Fig. 5): dunque i numeri primi sono infiniti (Fig. 6).



En prenant les produits, on trouvera

$$M = \infty = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\&c.}$$

Fig. 6

Euler dimostrò inoltre che la serie $\Sigma 1/p$, con p primo, diverge (Tenenbaum & Mendès France, 1997, pp. 23-24; questa dimostrazione non è basata su di una *reductio ad absurdum*: la divergenza di $\Sigma 1/p$ è ottenuta applicando un criterio di confronto). Nel XX secolo, una splendida dimostrazione della divergenza di $\Sigma 1/p$ è stata proposta da Paul Erdös (1938; Aigner & Ziegler, 1998, p. 6); una dimostrazione dell'infinità dei primi basata su nozioni topologiche è stata data da Harry Fürstenberg (1955; Aigner & Ziegler, 1998, p. 5).

Le dimostrazioni considerate riguardano vari settori della matematica e sono state concepite in contesti culturali diversi. Nel XVIII secolo molti interessi erano operativi (Schubring, 2005) ed Euler fa riferimento a una serie, ad un processo. In generale, l'affermazione dell'infinità dell'insieme dei numeri primi è lo spunto che ha stimolato alcuni matematici a sviluppare ricerche in settori diversi (Dhombres, 1993): sarebbe impossibile riferire le dimostrazioni esaminate ad uno stesso "ostacolo epistemologico": quando Euler, Kummer, Erdös o Fürstenberg dimostrarono l'infinità dei primi essi già conoscevano l'antico risultato euclideo; affrontarono quindi il problema ciascuno sulla base delle proprie concezioni. Del resto anche le tesi dimostrate sono diverse (e non solo dal punto di vista formale): Euler ed Erdös infatti dimostrarono che la serie $\Sigma 1/p$, con p primo, diverge e ciò è sufficiente, ma non necessario, per affermare l'infinità dei numeri primi (non sarà inutile notare che la divergenza di $\Sigma 1/p$ è un risultato forte, che può essere per alcuni versi sorprendente, soprattutto se si considera che la stessa serie armonica diverge molto lentamente e che i primi sono molto "rari").

V. Discussione

V-1. Un elemento essenziale: la "tecnologia dell'attività semiotica"

Abbiamo precedentemente evidenziato il ruolo di alcune concezioni nel modo in cui le dimostrazioni esaminate sono state concepite e realizzate (ad esempio, per quanto riguarda la *reductio ad absurdum* in Euclide e in Kummer, osserva Bruner: "l'uso della negazione presuppone un contesto che renda possibile una plausibile negazione. Anche a questo livello molto elementare, gli enunciati sono governati dai requisiti propri del discorso e del dialogo, anziché da una corrispondenza semantica fissa ed univoca tra un'espressione e una conoscenza del mondo reale e possibile": Bruner, 2005, p. 104). Un punto cruciale è che ogni cultura ha sviluppato una propria “tecnologia dell’attività semiotica” per esprimere la conoscenza matematica (Radford, 2002), cosa che può essere messa in relazione con il contesto culturale *matematico*. La differenza in termini di simboli tra Euclide ed Euler è decisiva: la complessità dei segni e dei corrispondenti sistemi semiotici è molto importante.

La rappresentazione euclidea dei numeri era basata su segmenti, come abbiamo potuto constatare: i numeri venivano dunque oggettivati in entità concrete mediante le quali la rappresentazione di un insieme infinito (o comunque di una quantità infinita) era impossibile. Il simbolismo matematico al tempo di Euler era sviluppato in modo tale da rendere possibile calcoli impensabili nell’Antichità o anche nel XVI secolo: la costruzione dell’espressione $\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\ \&\,\mathrm{c.}}$ dalla serie $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$ è decisiva.

Inoltre è importante sottolineare che i segni matematici sono stati elaborati per risolvere un problema mediante procedure che erano considerate legittime, ed ogni cultura aveva ed ha i propri criteri di distinguere tra procedure dimostrative valide e invalide (Crombie, 1995; si pensi alle recenti discussioni sulla legittimità dell’uso di computer nella dimostrazione). Euler usa il simbolo ∞ e ciò gli consente di operare praticamente con l’infinito “come se fosse un numero”. Il moderno simbolo per l’infinito è stato introdotto ed usato dal 1655 (quando John Wallis notò che, essendo 0 il primo numero naturale,“primus terminus in serie reciproca erit ∞ vel infinitus: sicut, in divisione, si diviso sit 0, quotiens erit infinitus”: *Arithmetica Infinitorum*, p. 70; Wallis si riferiva a tale simbolo anche in *De Sectionibus Conicis*; secondo alcuni ∞ deriverebbe da un tardo simbolo romano: Cajori, 1928-1929), sebbene perfino alcuni decenni dopo la morte di Euler, Gauss abbia espresso perplessità a proposito del suo uso:

> “I protest against the use of an infinite quantity as an actual entity; this is never allowed in mathematics. The infinite is only a manner of speaking, in which one properly speaks of limits to which certain ratios can come as near as desired, while others are permitted” (lettera di Schumacher del 12 luglio 1831, *Werke*, 8, 16, nella citazione riportata in: Kline, 1972, p. 993).

Il ruolo del simbolo ∞ è molto importante nella dimostrazione di Euler: quando scrive (Fig. 6) $M=\infty=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{11}\right)\ \&\,\mathrm{c.}}$ egli si riferisce esplicitamente ad una quantità (un “numero”) da considerare “= ∞” o no: nel momento in cui si confronta un “numero infinito” con una frazione, l’infinito è coinvolto in una procedura simile ad un calcolo. La disponibilità del simbolo è dunque fondamentale nello sviluppo della dimostrazione euleriana (naturalmente c’è differenza tra la considerazione di un “numero infinito” e quella di un insieme attualmente infinito; nella citazione precedente Gauss si riferisce al primo caso, legato ma non completamente equivalente al secondo, considerato, ad esempio, da Kummer). In generale, tutto il linguaggio simbolico assume importanza decisiva: il ruolo, ad esempio, della scrittura “&c.” può riferirsi ad un prodotto infinito, il cui simbolo era stato introdotto da Descartes (mentre il simbolo Σ è stato usato da Euler stesso solo a partire dal 1755 in *Institutiones calculi differentialis*, Capitolo I, § 26).

V-2. Ancora una nota: il XX *secolo – un paradiso per l'infinito attuale?*

> "The difficulty which is felt in connexion with *reductio ad absurdum* in mathematics is this: what goes on in this proof? Something mathematically absurd, and hence unmathematical? How – one would like to ask – can one so much as assume the mathematically absurd at all? That I can assume what is physically false and reduce it *ad absurdum* gives me no difficulty. But how to think the –so to speak – unthinkable?"
>
> Ludwig Wittgenstein (*Remarks on the Foundations of Mathematics*, 1956, IV, 28)

La precedente discussione non deve far pensare che una particolare dimostrazione possa essere considerata rappresentativa di un periodo storico. Ad esempio, nel XX secolo la nozione di infinito attuale non è accettata universalmente: non possiamo dimenticare l'intuizionismo di Luitzen Egbertus Jan Brouwer (Hesseling, 2003, p. 193) che limita la matematica "all'intuitivamente costruibile" (Hesseling, 2003, p. 44) e rifiuta l'infinito attuale nel senso di Cantor. Mentre la definizione di numero primo è costruttiva (si può determinare se un naturale è primo in un numero finito di passi: Kline, 1972, p. 1203), la dimostrazione di Euclide non lo è e sarebbe dunque non accettabile. Per presentare brevemente alcune idee legate ad un'impostazione costruttivistica, consideriamo ad esempio l'affermazione:

(a) *per ogni naturale a possiamo trovare un primo x maggiore di a*

e la sua formalizzazione in un linguaggio del primo ordine (Bell & Machover, 1977, p. 345):

(b) $\forall a \exists x\, (\neg(\exists b \exists c\, (b<x \wedge c<x \wedge x = b\cdot c)) \wedge a<x)$

Possiamo dire che (a) significa che (b) vale nella struttura dei numeri naturali? Così facendo faremmo torto ad (a): infatti (a) afferma "la possibilità di *fare* qualcosa", e ciò si perde dicendo semplicemente che (b) vale per i numeri naturali. L'affermazione (a) si riferisce ad una particolare costruzione, e la dimostrazione di Euclide mostra una costruzione di questo genere. Dunque (a) fornisce maggiori informazioni – potremmo dire informazioni di tipo diverso – rispetto all'affermazione della validità di (b) (Bell & Machover, 1977, p. 401).

Non possiamo qui analizzare a fondo un punto di vista costruttivistico. Dobbiamo però sottolineare che un periodo storico può presentare punti di vista diversi (a proposito dell'approccio propriamente intuizionistico ricordiamo inoltre il rifiuto della "legge del terzo escluso": Hesseling, 2003, capitolo 5, pp. 217-296).

VI. Riflessioni conclusive

Alcune dimostrazioni diverse dell'infinità dei primi: questo titolo sarebbe inappropriato per presentare le dimostrazioni di Euclide, Kummer, Euler, Erdös, Fürstenberg… Facendo riferimento allo stesso teorema, alla stessa affermazione, dimenticheremmo molte importanti caratteristiche dei contesti nell'ambito dei quali tali dimostrazioni sono state concepite.

È davvero utile proporre diverse dimostrazioni di un teorema? Spesso le dimostrazioni suggeriscono "nuovi mondi" di idee matematiche (Shafarevich, 2003, p. 7). Dal punto di vista didattico, dato che il trasferimento di elementi storici ai processi di insegnamento-apprendimento non può essere realizzato sulla base di una semplice analogia, è necessario riferirsi ad una dimensione culturale ampia, tenendo conto anche di elementi non matematici.

La prospettiva storica mostra che, a parte i vari "stili" di dimostrazione, l'universalità della matematica implica una varietà di procedure (Dhombres, 1993, p. 401): questi stili e queste procedure sono state concepite in particolari contesti. Come abbiamo notato, ogni cultura ha sviluppato (e sviluppa) una "tecnologia dell'attività semiotica" mediante la quale esprimere il sapere matematico: questo è dunque un collegamento molto importante tra C(i) e K(i). Didatticamente, oltre agli importanti aspetti cognitivi (esaminati ad esempio in: Radford, 2002), è significativo sottolineare che i segni matematici hanno avuto un ruolo storico importante (anche con riferimento alla possibilità di legittimare alcune procedure).

Naturalmente la prospettiva sopra descritta richiede un notevole livello di consapevolezza epistemologica da parte degli insegnanti. Ma ogni *transposition didactique*, come abbiamo avuto occasione di ribadire, richiede *necessariamente* la presenza di una teoria della conoscenza: per questo le questioni presentate devono essere considerate nella formazione degli insegnanti di matematica.

Ringraziamenti e riferimenti bibliografici

L'autore desidera ringraziare vivamente Torkil Heiede per i preziosi commenti e Jean Dhombres per i suggerimenti bibliografici.

Aigner M. & Ziegler G.M. (1998). *Proofs from The Book*. Berlin: Springer.

Bachelard G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris: Vrin.

Bagni G.T. (2004). Prime numbers are infinitely many: four proofs from History to Mathematics Education. In Siu, M.K. & Tzanakis, C. (eds), *The role of the history of mathematics in mathematics education. Mediterranean Journal for research in Mathematics Education*, 3, 1-2, 21-36.

Bagni G.T. (2005). The historical roots of the limit notion. Cognitive development and development of representation registers, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 5:4, 453-468.

Bagni G.T. (in via di pubblicazione). *A celebrated theorem and its different proofs: history, mathematics education and semiotic-cultural perspective.*

Balacheff N. (2004). *The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof*, http://www.leibniz.imag.fr/LesCahiers

Bell J.L. & Machover M. (1977). *A course in mathematical logic*. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland.

Beth E.W. & Piaget J. (1966). *Mathematical Epistemology and Psychology*. Dordrecht: Reidel.

Boero P., Pedemonte B., Robotti E. & Chiappini G. (1998). The 'voices and echoes game' and the interiorization of crucial aspects of theoretical knowledge in a Vygotskian perspective: ongoing research. *PME-22*, Stellenbosch, South Africa, 2, 120-127.

Brickhouse N. (1990). Teachers' beliefs about the nature of science and their relationship to classroom practice. *Journal of teacher education*, 41 (3), 53-62.

Brousseau G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4, 2, 165-198.

Brousseau G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. In Bednarz N. & Garnier C. (eds). *Constructions des savoirs, obstacles et conflits*. Montreal: Agence d'Arc, 41-64.

Bruner J. (2005). *La mente a più dimensioni*. Bari-Roma: Laterza (*Actual minds, possibile worlds*. Cambridge-London: Harvard University Press, 1986).

Cajori F. (1928-1929). *A History of Mathematical Notations.* Lasalle: The Open Court.

Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Penseé Sauvage.

Crombie A.C. (1995). Commitments and Styles of European Scientific Thinking. *History of Sciences*, 33, 225-238.

D'Amore B. (2001). Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques. *Scientia Paedagogica Experimentalis*, XXXVIII, 1, 17-46.

Dhombres J. (1993). Is one proof enough? Travels with a mathematician of the baroque period. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 401-419.

Erdös P. (1938). Über die Reihe $\Sigma 1/p$, *Mathematica*, Zutphen B 7, 1-2.

Furinghetti F. & Radford L. (2002). Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice. In English L. (ed), *Handbook of International Research in mathematics education*. Hillsdale: Erlbaum, 631-654.

Fürstenberg H. (1955). On the infinitude of primes. *American Mathematical Monthly*, 62, 353.
Gardies J.L. (1997). *L'organisation des mathématiques grecques de Théétète à Archimède*. Paris: Vrin, 1997.
Granger G.G. (1994). Formes opérations objets. Paris: Vrin.
Grugnetti L. & Rogers L. (2000), Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues. In Fauvel J. & van Maanen J. (eds). *History in mathematics education. The ICMI Study*. Kluwer: Dodrecht, 39-62.
Hashweb M.Z. (1996). Effects of science teachers' epistemological beliefs in teaching. *Journal of Research in Science Teaching*, 33 (1), 47-63.
Heath T.L. (1952). The thirteen books of Euclid's Elements. In Maynard Hutchins R. (ed). *Great Books of the Western World* 11. W. Benton-Encyclopaedia Britannica, Chicago-London-Toronto 1-402.
Heiede T. (1996). History of mathematics and the Teacher. In Calinger R. (ed). *Vita Mathematica*. The Mathematical Association of America, 231-243.
Hesseling D.E. (2003). *Gnomes in the fog. The reception of Brouwer's Intuitionism in the 1920s*. Basel: Birkhäuser.
Kline M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford University Press.
Koyré A. (1967). *Dal mondo del pressappoco all'universo della precisione*. Torino: Einaudi.
Kummer E.E. (1878). Neuer elementarer Beweis, dass die Anzahl aller Primzahlen eine unendliche ist. *Monatsber. Akad. D. Wiss. Berlin*, 1878/9, 777-778.
Piaget J. & Garcia R. (1983). *Psychogenèse et histoire des sciences*. Paris: Flammarion.
Piaget J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives*. Paris: PUF.
Radford L. (1996). An historical incursion into the hidden side of the early development of equations. In Giménez J., Campos Lins R. & Gómez B. (eds). *Arithmetic and Algebra education*. Tarragona: Universitat Rovira I Virgili, 120-131.
Radford L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of mathematics*, 17(1), 26-33.
Radford L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14,23.
Radford L. (2003a). On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance. *Educational Studies in mathematics*, 52(2), 123-150.
Radford L. (2003b). On culture and mind. A post-Vygotskian semiotic perspective, with an example from Greek mathematical thought. In Anderson M. & Al. (eds). *Educational perspectives on mathematics as semiosis: from thinking to interpreting to knowing*. Ottawa: Legas, 49-79.
Radford L. (2004). La generalization mathématique comme processus sémiotique. In Arrigo, G. (ed). *Atti del convegno di didattica della Matematica 2004*. Alta Scuola Pedagogica, Locarno, Suisse, 11-27.
Radford L., Boero P. & Vasco C. (2000). Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics. In Fauvel J. & van Maanen J. (eds). *History in mathematics education. The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer, 162-167.
Ribenboim P. (1980). *The book of prime number records*. New York: Springer (2nd edition: 1989).
Schubring G. & Al. (2000). History of mathematics for trainee teachers. In Fauvel J. & van Maanen J. (eds). *History in mathematics education. The ICMI Study*. Dordrecht: Kluwer, 91-142.
Schubring G. (2005). *Conflicts between generalization, rigor and intuition*. Berlin: Springer.
Shafarevich I.R. (2003). *Discourses on Algebra*. Berlin: Springer.
Szabó A. (1977). *Les débuts des mathématiques grecques*. Paris: Vrin.
Tenenbaum G. & Mendès France M. (1997). *Les nombres premiers*. Paris: PUF.
Unguru S. (1991). Greek mathematics and mathematical induction. *Physis,* 28, 273-289.
Wartofsky M. (1979). *Models, Representation and the Scientific Understanding*. Dordrecht: Reidel.