La didattica dell'Analisi matematica nel Settecento: le *Institutiones Analyticae* di V. Riccati e G. Saladini

GIORGIO T. BAGNI

Abstract. Vincenzo Riccati (1707-1775) was teacher of Girolamo Saladini (1731-1813); Riccati and Saladini wrote *Institutiones Analyticae*, in two volumes, published in Bologna in 1765 and in 1767. This work is considered one of the more important handbooks written in XVIII century, before Euler's *Institutiones calculi integralis*. In *Institutiones Analyticae* we can found several interesting analytical results, like recursive formulas for $\int sen^h x \cos^k x dx$.

VINCENZO RICCATI E GIROLAMO SALADINI

Vincenzo Riccati (1707-1775), figlio di Jacopo (1676-1754), dal 1739 al 1773 insegnò matematica nel Collegio di Santa Lucia a Bologna, dove ebbe la cattedra del proprio maestro Luigi Marchenti; un brillante discepolo di Riccati fu il lucchese Girolamo Saladini (1731-1813). La collaborazione tra il maestro e l'allievo fu feconda ([1]): insieme scrissero le *Institutiones Analyticae*, in due volumi pubblicati a Bologna nel 1765-1767 presso la Stamperia di San Tommaso d'Aquino (Saladini curò la traduzione italiana, edita nel 1776 nella stessa tipografia, *Istituzioni Analitiche del Co. Vincenzo Riccati, compendiate da Girolamo Saladini, Canonico della Metropolitana*) [4] [5].

Le *Institutiones Analyticae* raggiunsero in pochi mesi una vasta notorietà ([2]) e furono ricordate in numerose riviste scientifiche, tra le quali "Nov. Lett. di Firenze", t. XXVI, 691, "Journal des savants". 1/1766, p. 60, "Nuovo Giornale de' Letterati d'Italia" I, p. 30, II, p. 29, III, p. 78 [3] ([3]).

([1]) La collaborazione tra V. Riccati e G. Saladini non si limitò alla stesura delle *Institutiones* e al loro compendio e traduzione in italiano; si veda, ad esempio, la riccatiana *Lettera al p. D. Girolamo Saladini nella quale trattasi della combinazione del moto rotatorio col progressivo*, in: "Raccolta di Opuscoli", Firenze 1771 e 1774, e la *Lettera al P. Girolamo Saladini*, Anno 1768, Manoscritto 4137, 6, nella Biblioteca universitaria di Bologna; alcune altre lettere di Saladini a Vincenzo Riccati sono in "Frammenti del Commercio Epistolare del Co. Vincenzo Riccati", nella Biblioteca Avogadro in Castelfranco Veneto.

([2]) Così Angelo Fabroni: "Totius operis methodum Riccatus disposuit; conscribenda vero capita amice divisa sunt. Quae magis subobscura, magisque erant difficilia Riccatus magno studio clara perceptaque reddidit facilia... Caetera vero Saladinus collegit, explicavit, ac multum de suo addidit" (in: *Vitae Italorum doctrina excellentium qui saeculis XVII et XVIII floruerunt*, t. XVI, Pisa 1778-1799, p. 364).

([3]) Gioacchino Pessuti pubblicò alcuni articoli critici sulle *Institutiones Analyticae* nei numeri citati del "Nuovo Giornale de' Letterati d'Italia"; V. Riccati rispose con una lettera in "Nuova Raccolta di Opuscoli Scientifici e Filologici", Venezia 1776. Pessuti replicò con le *Riflessioni analitiche*, Livorno 1777, corredate da una lettera di Riccati del 29 agosto 1773.

LE *INSTITUTIONES ANALYTICAE* (1765-1767)

Nelle *Institutiones Analyticae* è contenuta una completa ed organica presentazione dell'analisi matematica, risalente ad un periodo storico caratterizzato dalla capillare diffusione delle tecniche del calcolo differenziale e dalla loro applicazione a molti campi delle scienze esatte.

Dal punto di vista storico, è opportuno ricordare che la precisazione di alcuni concetti di analisi matematica avvenne progressivamente nell'arco di tempo che va dal XVII secolo al XIX secolo [4]: all'epoca della stesura delle *Institutiones Analyticae*, dunque, non tutti i concetti analitici erano definitivamente fissati, per l'aspetto formale (4).

L'interpretazione di alcuni concetti del calcolo differenziale ed integrale che troviamo nell'opera di Riccati e Saladini è tuttavia ancor oggi degna di nota; gli Autori, ad esempio, affermano che:

"differenziare è dividere la quantità nei suoi elementi, e integrare è sommare questi elementi e danno esempi di integrazioni dirette" (così scrive Giulio Vivanti, in [8], pp. 478-479).

Storicamente, la definizione ora citata è senz'altro interessante: dopo che Isaac Newton (1642-1727) (5) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1746-1716) (6) introdussero la derivazione e l'integrazione, specificando essere esse l'una l'inversa dell'altra, altri Autori fissarono la propria attenzione sui rapporti formali di derivazione ed integrazione: tra questi ricordiamo Giovanni Bernoulli (1667-1748) (7) e, più tardi, Leonhard Euler (1707-1783) (8). Riccati e Saladini, avvertirono l'esigenza di sottolineare l'essenziale legame concettuale tra le operazioni di derivazione e di integrazione (che viene espresso analiticamente dalla proposizione oggi denominata Teorema di Torricelli o di Torricelli-Barrow): e realizzarono tale collegamento attraverso una semplice giustificazione pratica, evidenziando i legami che operativamente vengono ad instaurarsi tra i due fondamentali procedimenti analitici.

---

(4) Il moderno aspetto dell'analisi matematica è prossimo a quello proposto da Augustin Louis Cauchy (1789-1857) in *Cours d'analyse de l'Ecole Polythecnique* del 1821, in *Résumé des lecons sur le calcol infinitésimal* del 1823 ed in *Lecons sur le calcul différentiel* del 1829; le tre opere fondamentali citate sono collocate cronologicamente oltre mezzo secolo dopo la pubblicazione del manuale di Riccati e di Saladini.

(5) In: I. Newton, *Opuscula*, 1, Lausannae et Genevae 1744, p. 3. Ma per l'avvincente storia del rapporto analitico tra la derivazione e l'integrazione si veda anche l'importante lavoro: *H.G. Zheuten*, "Geschichte der Mathematik im XVI und XVII Jahrhundert", Leipzig 1903, p. 385.

(6) Si veda: G.W. Leibniz, in: "Acta Eruditorum", 1686, p. 292 e 1693, p. 385.

(7) Si veda il trattato: J. Bernoulli, *Lectiones mathematicae* (1691-1692), in: "Opera", 3, Lausannae et Genevae 1742, p. 387.

(8) In: L. Euler, *Institutiones Calculi integralis*, 1, p. 4, Petropoli, 1768-1794.

Ma l'importanza del manuale in questione non si può certamente restringere alle questioni teoriche. In esso troviamo una sintesi di molti procedimenti pratici del calcolo [2]. Così Amedeo Agostini:

"[Vincenzo Riccati] con Girolamo Saladini pubblicò le *Institutiones Analyticae* (Bologna 1766-1767), nelle quali è posto nella sua vera luce il principio di sostituzione degli infinitesimi, e che, per ciò che riguarda il calcolo integrale, costituiscono un primo ampio trattato, anteriore alle *Institutiones calculi integralis* di Eulero. Notevoli le applicazioni delle serie al calcolo integrale, le regole di integrazione per alcune classi di funzioni circolari ed iperboliche, e la riduzione di alcuni tipi di integrali alla rettificazione delle coniche (integrali ellittici)..." ([9]).

Presentiamo alcuni esempi di formule di quadratura; effettuata la posizione:

$$T_{h,k} = \int sen^h x \cos^k x dx$$

si ricavano:

$$T_{h,k} = \frac{\text{sen}^{h+1} x \cos^{k-1} x}{h+1} + \frac{k-1}{h+1} T_{h+2,k-2}$$
$$T_{h,k} = -\frac{\text{sen}^{h-1} x \cos^{k+1} x}{k+1} + \frac{h-1}{k+1} T_{h-2,k+2}$$
$$T_{h,k} = \frac{\text{sen}^{h+1} x \cos^{k+1} x}{h+1} + \frac{h+k+2}{h+1} T_{h+2,k}$$
$$T_{h,k} = -\frac{\text{sen}^{h-1} x \cos^{k+1} x}{h+k} + \frac{h-1}{h+k} T_{h-2,k}$$
$$T_{h,k} = \frac{\text{sen}^{h+1} x \cos^{k-1} x}{h+k} + \frac{k-1}{h+k} T_{h,k-2}$$
$$T_{h,k} = -\frac{\text{sen}^{h+1} x \cos^{k+1} x}{k+1} + \frac{h+k+2}{k+1} T_{h,k+2}$$

Riccati e Saladini presentarono inoltre alcune chiare ed interessanti annotazioni didattiche sui numeri complessi e sulle operazioni con essi. Citiamo dal Cap. III del libro I:

([9]) Si veda: A. Agostini, voce "Riccati", in: "Enciclopedia Italiana", Vol. XXIX, p. 241, Roma 1936. Si veda anche: V. Notari, *Le funzioni iperboliche*, "Periodico di matematiche", II, 1922, p. 246. Già nella memoria riccatiana *Quibus utilitas calculi sinuum et cosinuum in infinitesimorum analysi demonstrantur*, in: "De Bononiensi Scientiarum et Artium Instituto atque Academia Commentarii", 5, parte II, p. 211, Bologna 1767 sono esposte alcune formule notevoli, che trovano ancora posto nelle tavole di integrazione dei moderni manuali di analisi matematica.

"E già non havvi mistero alcuno che due immaginarj moltiplicati insieme diano un reale, perché nascendo l'immaginarietà coll'estrarre la radice seconda da -1, per cagion d'esempio, è necessario che alzando a podestà seconda questo radicale immaginario si restituisca la quantità reale -1, il che ben inteso svanisce ogni paradosso... Per dividere la radice seconda di $-bc$ per la radice seconda di $-c$ pure si faccia la radice seconda di -1 per la radice seconda di bc diviso per la radice seconda di -1 e per la radice seconda di c: il quoto sarà 1 per la radice seconda di b... né deve far meraviglia che un immaginario diviso un immaginario dia un reale, perché il rapporto di continanza tra due immaginarj può essere reale".

Le *Institutiones Analyticae* proposero quindi l'esposizione didatticamente chiara di molti concetti e procedimenti analitici importanti, di buon interesse anche per il matematico dei giorni nostri. Al suo valore teorico si affianca inoltre il ruolo di primo piano che il trattato viene ad assumere nella diffusione dell'analisi e nella progressiva precisazione di una sua moderna didattica [1] [7] ([10]).

Note bibliografiche

[1] **M. G. Agnesi**, *Istituzioni Analitiche ad uso della Gioventù Italiana*, 2 vv., Nella Regia Ducal Corte, Milano 1748.

[2] **G.T. Bagni**, *I procedimenti di Jacopo e di Vincenzo Riccati nella storia delle equazioni differenziali*, in "Rivista di Matematica dell'Università degli studi di Parma", in via di pubblicazione.

[3] **G.T. Bagni**, *Vincenzo, Giordano e Francesco Riccati e la matematica del Settecento*, Teorema, Treviso 1993.

[4] **M. Kline**, *Storia del pensiero matematico. II. Dal Settecento a oggi*, Einaudi, Torino 1991.

[5] **V. Riccati-G. Saladini**, *Institutiones Analyticae*, vol. I, II, Stamperia di S. Tommaso d'Aquino, Bologna 1765, 1767.

[6] **V. Riccati-G. Saladini**, *Istituzioni Analitiche*, compendio e versione italiana a cura di G. Saladini, tomi I, II, Stamperia di S. Tommaso d'Aquino, Bologna 1776.

[7] **L. Pepe**, *Sulla trattatistica del calcolo infinitesimale in Italia nel secolo XVIII*, in: L. Grugnetti-O. Montaldo (a cura di), "La storia delle Matematiche in Italia. Atti del convegno", Gagliari, Università di Cagliari, 1984, pp. 145-227.

[8] **G. Vivanti**, *Elementi di analisi infinitesimale*, in: L. Berzolari-A. Vivanti-D. Gigli (a cura di), "Enciclopedia delle Matematiche elementari e complementi", v. I, p. II, Hoepli, Milano 1929 (rist. anast.: Hoepli, Milano 1979).

([10]) In uno dei più diffusi manuali scolastici di Algebra e Geometria del XIX secolo, *Elementi di Algebra e Geometria ricavati dai migliori scrittori di matematica* dell'analista fiorentino Vincenzo Brunacci (1768-1818), sono citati V. Riccati e G. Saladini tra i principali autori delle "opere elementari" della matematica dell'età moderna: "Le opere elementari di Eulero, di Bezout, di Bossut, di Clairaut, di Riccati, di Saladini, di Paoli, di Ruffini e di altri molti sono state consultate e talvolta messe a contribuzione..." (in: V. Brunacci, *Elementi di Algebra e Geometria ricavati dai migliori scrittori di matematica*, Dall'Imperiale Regia Stamperia, Milano 1820; i dati si riferiscono alla quarta edizione).