Alle radici storiche della prospettiva

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica
Università di Roma "La Sapienza"

Socio Onorario dell'Ateneo di Treviso

Una premessa teorica

La presentazione delle radici storiche di un concetto matematico richiede la puntualizzazione di alcune posizioni epistemologiche. Luis Radford sottolinea giustamente:

> "La considerazione della storia della matematica come una specie di laboratorio epistemologico in cui esplorare lo sviluppo della conoscenza (...) richiede l'assunzione di un punto di vista teorico che giustifichi il collegamento tra lo sviluppo concettuale nella storia e quello moderno" (Radford, 1997, p. 26; nel presente lavoro le traduzioni sono nostre).

Per realizzare un tale collegamento è necessario affrontare questioni importanti: innanzitutto il problema della selezione dei dati storici da considerare significativi, selezione epistemologicamente tutt'altro che neutra; inoltre i problemi connessi all'interpretazione, che viene sempre condotta alla luce dei nostri attuali paradigmi culturali.

A partire dagli anni Settanta, G. Brousseau introdusse il concetto di ostacolo epistemologico: egli concepiva la conoscenza come una soluzione ottimale ad un problema, caratterizzato da esigenze e da vincoli; e l'ostacolo epistemologico può interpretarsi alla stregua di una sistematica difficoltà che gli individui incontrano (ed a causa della quale compiono errori) nell'affrontare alcuni problemi. Questa impostazione porta ad uno studio storico il cui scopo è quello di evidenziare tali esigenze (*situations fondamentales*: Brousseau, 1983 e 1989), in modo da interpretare, attraverso la loro analisi, la conoscenza matematica che a partire da essi si è sviluppata.

A questa si affiancano altre impostazioni teoriche, basati su differenti assunzioni epistemologiche: secondo l'approccio socio-culturale di Radford, la conoscenza è indissolubilmente collegata alle attività nelle quali i soggetti si impegnano, e ciò deve essere messo in relazione con le istituzioni culturali dell'ambiente sociale in questione (Radford, 1997 e 2003). Dunque la conoscenza viene costruita socialmente e il ruolo della storia non può che essere interpretato con riferimento alle diverse culture e fornisce dunque una preziosa occasione per una ricostruzione critica dei contesti culturali del passato.

Per quanto riguarda l'interpretazione della storia,

> "anche il più titanico sforzo di rinunciare alle nostre conoscenze attuali per vedere l'evento storico nella sua purezza non avrebbe successo: siamo condannati a portarci dietro le nostre moderne concezioni del passato. E ciò che è peggio, non basta riconoscere il problema, come spesso si fa, per risolverlo" (Radford, 1997, p. 30).

Ma se siamo condannati a guardare il passato attraverso una lente non del tutto trasparente, non ci resta che scegliere tra le due opzioni: o rinunciare definitivamente ad osservare il passato, per non snaturarlo con le nostre concezioni moderne; oppure accettare la presenza di tale lente, considerare le possibili distorsioni che essa introduce e tenere presente che, attraverso essa, stiamo ponendo in contatto due culture "diverse ma non incommensurabili" (Radford, Boero & Vasco, 2000, p. 165).

Dunque la ricostruzione storica che verrà proposta terrà presente che una classica visione platonistica sarebbe a nostro avviso difficilmente sostenibile: lo sviluppo di un settore della conoscenza umana, ad esempio quello (artistico e scientifico) collegato alla prospettiva, non può essere visto in termini di continuo progresso. Ad esempio, il passaggio dalla *perspectiva naturalis* di Giotto alla *perspectiva pingendi* di Piero della Francesca non deve essere obbligatoriamente interpretato come una fase di avanzamento, bensì di cambiamento: dalla scelta di rendere la terza dimensione mediante un'interpretazione basata su ricerche empiriche a quella del ricorso ad un supporto geometrico.

1. Prima di Euclide

La rappresentazione bidimensionale della realtà tridimensionale è una delle questioni più approfondite e dibattute nella storia dell'arte e nella storia della scienza (Emmer, 1991; Bagni & D'Amore, 1994).

Procedimenti elementari per la rappresentazione del reale furono ideati ed utilizzati nell'ambito delle civiltà pre-elleniche. Disegni egizi provano ad esempio che i loro autori avevano empiricamente intuito alcuni concetti propri della similitudine e della prospettiva. Per quanto riguarda la cultura dell'età micenea (1400-1100 a.C.), interessanti sono, ad esempio, gli allineamenti di teste collocate su piani diversi per ottenere immagini prospettiche nel palazzo cretese di Cnosso.

Anche i Cinesi si occuparono di prospettiva: nel *Tcheou-Pei Suang Ching*, significativa è la parte in cui sono trattate le modalità per la determinazione delle dimensioni delle ombre (la collocazione cronologica è controversa: per quanto riguarda la data della compilazione finale, si opta per il IV-III sec. a.C., ma parte del materiale riportato nel trattato risale probabilmente al 1100 a.C.).

Tra i Greci, sono talvolta citati Democrito e Anassagora (V sec. a.C.); ricordiamo inoltre alcuni pittori: Agatarco (460-410 a.C. circa), un ateniese divenuto celebre per le capacità di decoratore; Apollodoro detto lo Schiagrafo (ovvero "il pittore delle luci e delle ombre"), operante nel V sec. a.C.; e infine Polignoto da Taso (510-440 circa a.C.), al cui stile è spesso riferito il "Cratere degli Argonauti", o "Cratere di Orvieto", conservato al Louvre, in cui è utilizzata una forma elementare di prospettiva nella rappresentazione di alcuni personaggi.

2. L'*Ottica* di Euclide

Euclide, uno dei grandi legislatori della geometria greca, scrisse un trattato fondamentale per la storia della prospettiva. In *Ottica* sono proposti 14 termini (i primi 12 sono considerati autentici):

I. I raggi emessi dall'occhio procedono per via diritta.
II. La figura compresa dai raggi visivi è un cono che ha il vertice nell'occhio e la base al margine dell'oggetto visto.
III. Si vedono quegli oggetti ai quali giungono i raggi visivi.
IV. Non si vedono quegli oggetti ai quali i raggi visivi non giungono.
V. Quegli oggetti che si vedono sotto angoli maggiori sono giudicati maggiori.
VI. Quegli oggetti che si vedono sotto angoli minori sono giudicati minori.
VII. Gli oggetti che si vedono sotto angoli uguali sono giudicati uguali.
VIII. Gli oggetti che si vedono con raggi più alti sono giudicati più alti.
IX. Gli oggetti che si vedono con raggi più bassi sono giudicati più bassi.
X. Gli oggetti che si vedono con raggi diretti a destra sono giudicati alla destra.
XI. Gli oggetti che si vedono con raggi diretti a sinistra sono giudicati alla sinistra.
XII. Gli oggetti che si vedono con più angoli si distinguono più chiaramente.
(XIII) Tutti i raggi hanno la stessa velocità.
(XIV) Non si possono vedere gli oggetti sotto qualsiasi angolo.

Il primo termine è significativo: Euclide seguiva la concezione di Platone, secondo cui il raggio visivo parte dall'occhio e segue una via rettilinea; se la prima affermazione non ha grande importanza nel seguito dell'*Ottica*, la seconda è decisiva, in quanto collega indissolubilmente la comprensione e la descrizione dei fenomeni ottici allo studio della geometria. Con l'*Ottica* gli sforzi per ottenere una rappresentazione verosimile della realtà imboccarono la strada dello studio matematico (Ovio, 1918).

Notevole fu l'influenza dell'*Ottica* nei periodi seguenti il III secolo a.C. Alcuni risultati di Euclide, probabilmente già intuiti da studiosi precedenti, si ritrovano in interessanti accorgimenti tecnici nella struttura degli edifici greci (la visione scenografica della facciata del tempio).

3. La prospettiva tra l'Età antica e il Medioevo

Sulla scia di Euclide molti autori si occuparono di prospettiva. Nell'Età antica e nel Medioevo essa fu talvolta identificata con l'ottica e studiata secondo criteri geometrici; altre volte fu collegata con la fisiologia della visione. Spesso, in particolare nel tardo Medioevo, il problema venne affrontato sulla base di motivazioni artistiche, per rendere più verosimile la rappresentazione pittorica della realtà.

Tra gli studiosi dell'Età antica che si occupano di ottica dopo Euclide ricordiamo Ipparco da Nicea (180-125 circa a.C.). Un rilevante contributo della civiltà romana alla storia della prospettiva è costituito dagli scritti di Vitruvio, architetto e ingegnere militare dell'età augustea.

La rappresentazione architettonica in Vitruvio (I sec. a.C.), autore del *De Architectura* (opera scritta prima del 27 a.C.) è infatti suddivisa in:

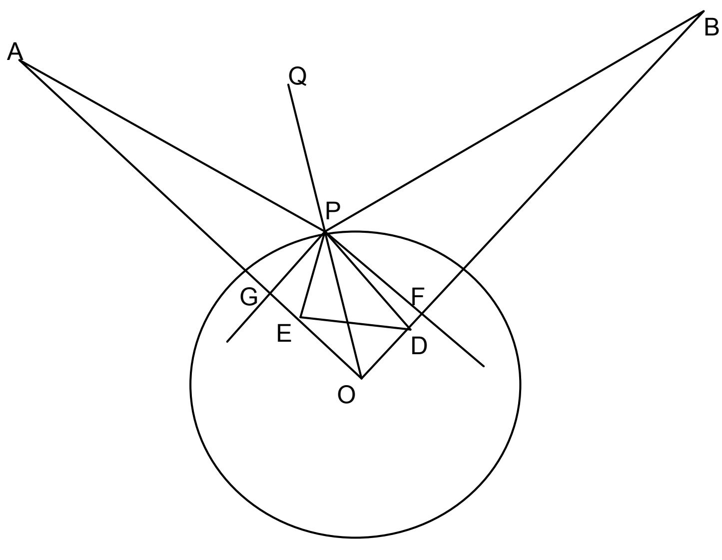
- "iconographia", la pianta: rende le figurazioni delle forme sul piano delle aree;
- "orthographia", l'alzato: l'immagine frontale, disegnata rispettando le proporzioni dell'opera;
- "scenographia": è la rappresentazione prospettica di un oggetto reale, costituita dallo schizzo della facciata dei lati per linee convergenti al centro.

Claudio Tolomeo (II secolo) scrisse un trattato di ottica in cui è analizzata la riflessione ed è tentata un'interpretazione geometrica della rifrazione. Egli si rivelò anche magistrale cartografo e riprese il metodo della proiezione stereografica, forse introdotto da Ipparco: il *Planisphaerium* tolemaico sarà commentato nel XVI secolo da Federigo Commandino in un'opera che segnerà una svolta nella storia della prospettiva. Al tramonto dell'età antica appartiene inoltre Eliodoro di Larissa (IV secolo), autore di un rifacimento dell'*Ottica* euclidea (da alcuni attribuito ad un suo discepolo Damiano).

4. Gli Arabi e il "problema di Alhazen"

Il contributo della scienza araba alla storia della prospettiva è importante: Alkindi (800-873 circa) scrisse il trattato identificato dal titolo latino *De visu* o *De aspectibus* (talvolta ritenuto di autore anonimo) in cui si mostrò buon conoscitore delle teorie ottiche euclidee.

Vasta notorietà ha raggiunto, nella storia delle scienze, l'astronomo e matematico Alhazen (965-1039), autore del lavoro diffuso in Europa col titolo *Opticae Thesaurus Libris Septem* nella traduzione latina del XII secolo di Gherardo da Cremona. Alhazen ribaltò l'antica impostazione sulla propagazione della luce, sostenendo che i raggi visivi partono dall'oggetto osservato per giungere all'occhio. Degno di nota è il "problema di Alhazen" (incluso nel V libro dell'opera citata):



Problema. Nel piano di un cerchio assegnato, di centro O e di raggio r, sono dati due punti A, B; si vuole determinare sulla circonferenza (considerata come sezione di una superficie speculare) il punto P in cui è riflesso un raggio luminoso che esce da A ed incide B.

Alhazen giunse ad una soluzione lunga e complicata. Ricordiamo la più semplice soluzione indicata nel XVII secolo da Christian Huygens (1629-1695). Siano E, D su OA, OB tali che:

$$\overline{\mathrm{OE}}\cdot\overline{\mathrm{OA}} = r^2$$
$$\overline{\mathrm{OD}}\cdot\overline{\mathrm{OB}} = r^2$$

e indichiamo con a la misura di OE e con b la misura di OD.

Supposto noto il punto P, si conducono le parallele PF e PG per P a OA ed a OB. Indichiamo con x e con y le misure di PF e di PG. Gli angoli QPA e QPB sono congruenti per ipotesi (per le leggi della riflessione); sono quindi congruenti anche i loro supplementari OPA e OPB. I triangoli POE e AOP sono simili (OA : OP = OP : OE) e anche i triangoli POD e BOP sono simili. Per questo e per la congruenza di OPA e OPB sono congruenti OPP e OPD e tali risultano anche i loro supplementari GPP e FPD. I due triangoli PDF e PED sono dunque simili e possiamo scrivere:

$$x : (y-b) = y : (x-b) \qquad \text{da cui} \qquad x^2-y^2-ax-by = 0$$

che è l'equazione di un'iperbole con il centro nel punto medio di DE, riferita agli assi non ortogonali OA, OB. L'intersezione P di tale iperbole con la circonferenza data risolve il problema di Alhazen.

5. Il Medioevo

La diffusione delle opere arabe in Europa contribuì ad una crescita dell'interesse per l'ottica e per la prospettiva. Tra gli studiosi che si occuparono della materia nel Medioevo ricordiamo Roberto di Lincoln, detto Grossatesta (1175-1253), autore del *De luce*, lavoro di impostazione aristotelica che rivela buone conoscenze geometriche e ottiche. Anche Ruggero Bacone (1214-1294), discepolo di Grossatesta ad Oxford, si occupò di prospettiva. Giovanni Peckham (1242-1292), teologo inglese ed arcivescovo di Canterbury, è l'autore di *Perspectiva communis*, opera importante e molto apprezzata verso la fine del Medioevo (Peckham fu detto "magister perspectivae").

Dal punto di vista artistico, spesso nel Medioevo i criteri della rappresentazione erano collegati all'importanza dei soggetti ritratti (analogamente a quanto si nota, ad esempio, per l'arte egiziana): pertanto il personaggio più importante di un quadro veniva spesso rappresentato con le maggiori dimensioni, indipendentemente da qualsiasi visione prospettica. Nonostante ciò, accorgimenti pratici per la resa pittorica della tridimensionalità possono già essere evidenziati nelle opere di molti artisti del tardo Medioevo, tra i quali Duccio di Boninsegna (1255-1319) e Giotto da Bondone (1267-1336). Il senese Ambrogio Lorenzetti (attivo tra il 1319 e il 1348) fu abilissimo nell'elaborazione intuitiva della terza dimensione, ovvero della "perspectiva communis", prima dell'introduzione di una teoria matematica in proposito: proprio con le opere di Lorenzetti comparve, nella storia della pittura, la convergenza ad un unico punto delle rette perpendicolari ad una retta orizzontale di fronte. Ma queste pur importanti ricerche empiriche non possono essere confuse con la coerente ricerca razionale che caratterizzerà la prospettiva rinascimentale.

6. Il Rinascimento

Due furono le linee di ricerca sull'ottica e sulla prospettiva dal Medioevo all'Età contemporanea: da un lato, i pittori si impegnarono nell'elaborazione di regole per una rappresentazione verosimile e corretta della realtà (in una prima fase empiricamente; in seguito mediante l'applicazione geometrica). Parallelamente si sviluppò la ricerca matematica che, anche riprendendo i capolavori dell'Antichità, porterà in tempi più vicini a noi pensatori del calibro di Desargues, Pascal, Monge e Poncelet alla sistemazione teorica della geometria proiettiva (Bonelli, 1978; Menghini & Mancini Proia, 1988).

Al Rinascimento va fatta risalire la svolta che portò artisti e matematici a staccarsi dall'empirismo per elaborare regole precise per la rappresentazione del reale, norme codificate in trattati sistematici. Questo passaggio dalla "perspectiva communis" medievale alla "perspectiva artificialis" (seguendo la distinzione di Leon Battista Alberti) si colloca all'inizio del XV secolo, con gli studi di Filippo Brunelleschi (1377-1446). La "regula legitima" brunelleschiana superò definitivamente il vecchio concetto euclideo secondo il quale i raggi visivi uscenti dall'occhio andrebbero a cogliere i corpi luminosi, impostazione già contestata da Alhazen: non abbiamo informazioni dirette sulle teorie di Brunelleschi (indicazioni possono essere desunte dalle opere di Piero della Francesca e di Sebastiano Serlio); ma è accertato che con l'architetto toscano fecero la comparsa nella storia della prospettiva i concetti di piramide visiva e di unico punto di fuga. Le idee di Brunelleschi si rispecchiano nell'opera di uno dei primi maestri della pittura rinascimentale fiorentina, Masaccio (1401-1428).

Nonostante la priorità cronologica, la mancanza di un trattato di Brunelleschi sulla prospettiva fa sì che Leon Battista Alberti (1404-1472) sia il primo scrittore rinascimentale sull'argomento. Alberti è autore del lavoro *Della Pittura* (1435-1436, stampato nel 1511) in cui sono codificate ed ampliate le idee di Brunelleschi. L'ossatura geometrica del lavoro albertiano appare tuttavia ancora legata ad un vago empirismo, che sarà superato soltanto con l'opera di Piero della Francesca (1416?-1492).

7. Piero della Francesca e Albrecht Dürer

Uno dei massimi pittori del XV secolo e di tutta la storia dell'arte fu anche un profondo matematico: Piero della Francesca nel 1475 circa scrisse *De prospectiva pingendi*, il più importante trattato sulla prospettiva rinascimentale. Ricordiamo che egli è anche l'autore di due interessanti opere di argomento matematico (una di esse è *De quinque corporibus regularibus*, ripresa e pubblicata a Venezia nel 1509 in lingua italiana da Luca Pacioli nella III parte della *Divina proportione*).

Piero, nel proprio *De prospectiva pingendi*, si mostrò pienamente consapevole della necessità di riferire la rappresentazione pittorica ad un organico sistema di procedimenti matematici: essi devono consentire un'oggettiva "traduzione" dello spazio reale in uno spazio della rappresentazione con opportune "degradazioni" (termine usato dall'Autore per indicare le deformazioni prospettiche avvertite dall'occhio: Piero della Francesca, 1982). Piero morì il 12 ottobre 1492, il giorno dello sbarco di Cristoforo Colombo in America: preziosa e feconda sarà l'eredità per gli artisti e per i matematici dell'Età moderna di colui che Vasari definì "il miglior geometra che fusse nei tempi suoi".

Pochi anni dopo Piero, anche Leonardo da Vinci (1452-1528) si occupò di prospettiva e scrisse un *Trattato della pittura* (opera perduta nella sua versione originale, probabilmente mai completata). L'impostazione leonardesca del problema della tridimensionalità appare incentrata sull'attenzione al risultato artistico (con sfumature per suggerire la distanza, colori che progressivamente sbiadiscono) ed era quindi diversa da quella di Piero, che considerava gli oggetti come forme geometriche da rappresentare secondo regole precise, senza concessioni a chiaroscuri ed a sfumature.

La diffusione delle teorie sulla prospettiva nell'Europa centro-settentrionale fu favorita dall'opera di Albrecht Dürer (1471-1528), il grande artista di Norimberga che fu a lungo in contatto con gli ambienti veneziano e bolognese e che pubblicò nel 1525 *Le istituzioni geometriche* in quattro libri (in latino) e nel 1528 *Unterweysung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheyt*.

8. Dalla prospettiva alla geometria proiettiva

Dal Medioevo fino al XVI secolo, dunque, la prospettiva rimase prevalentemente patrimonio di pittori e architetti: lo studio matematico della prospettiva in senso astratto non era praticato. A due studiosi italiani del XVI secolo viene fatto risalire il superamento di questa situazione: Federigo Commandino (1509-1575) e il suo allievo Guidobaldo del Monte (1545-1607). Con le loro opere, la "prospettiva degli artisti" e la "prospettiva dei matematici" imboccarono strade diverse e complementari.

Commandino fu traduttore ed editore di molte opere greche. Scrisse *Ptolemaei Planisphærium, Jordani Planisphærium, F. Commandini in Ptolemaei Planisphærium Commentarius* (Venezia, 1558) in cui, commentando i lavori di Tolomeo e di Giordano Nemorario, gettò le basi della prospettiva lineare: l'opera fu però accolta con scarso favore dall'ambiente artistico. Del Monte nel 1600 pubblicò il trattato *Perspectivae libri sex*, opera nella quale riprese in esame tecniche ed accorgimenti già utilizzati empiricamente dagli artisti al fine di darne una dimostrazione; egli, ad esempio, sembra essere stato il primo a dimostrare rigorosamente che la proiezione centrale di un fascio di rette parallele è costituita da un fascio di rette concorrenti in un punto e che più fasci di rette parallele tra loro e parallele allo stesso piano hanno i "punti di concorso" sulla stessa retta.

Dopo gli studi di Federigo Commandino e di Guidobaldo del Monte, mentre pittori ed architetti si impegnavano nella ricerca di sempre più suggestivi accorgimenti prospettici, la storia della prospettiva imboccava la strada parallela della ricerca matematica; più nessuna motivazione artistica era alla base dell'opera di due grandi scienziati che nei primi decenni del XVII secolo si occupano di prospettiva: Johannes Kepler (1571-1630) e Simon Stevin (1548-1620).

Johannes Kepler pubblicò nel 1604 *Paralipomena ad Vitellionem*, lavoro al quale si può far risalire la nascita dell'ottica geometrica moderna. La trattazione unitaria delle coniche suggerita da Kepler, ed in particolare lo studio della posizione dei fuochi, comprendeva un'intuitiva introduzione del concetto di "punto all'infinito" (anticipò quindi l'impostazione che trent'anni più tardi sarà di Desargues). Stevin nel 1634 a Leida pubblicò il *Traité d'optique* in cui espose la teoria della rappresentazione prospettica e si occupò della soluzione (fornita soltanto in casi particolari) della "questione inversa del problema fondamentale della prospettiva": date in un piano due figure qualunque che siano la prospettiva l'una dell'altra, le si collochino nello spazio in modo che la prospettiva abbia effettivamente luogo e si determini la posizione dell'occhio.

I lavori geometrici sulla prospettiva da Euclide al XVII secolo resero fertile il terreno per una svolta fondamentale: la nascita della geometria proiettiva. Artefice di questa svolta sarà Desargues.

9. Desargues e Pascal

Girard Desargues (1591-1661), ingegnere ed architetto di Lione, pubblicò nel 1636 *Methode universelle de mettre en prospective les objects* e nel 1639 il *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres d'un cone avec un plan*. Tale opera, purtroppo scritta in uno stile assai poco efficace e quindi scarsamente apprezzata, contiene concetti e risultati importanti e nuovissimi.

In particolare, il concetto di proiezione era un'idea fondamentale dell'impostazione di Desargues e su di essa si basava l'elegante trattazione delle sezioni coniche dello studioso francese (che sarà ripresa da Pascal e, nel XIX secolo, da Poncelet). Di importanza primaria nell'opera di Desargues è l'introduzione dei concetti di punto e retta impropria:

> "*Ordonnance des lignes droites:* due o più rette sono dello stesso ordine se sono parallele o se si incontrano in un punto. In entrambi questi casi, il punto comune alle rette considerate è detto loro *punto traguardo*. *Ordonnance de plans:* due o più piani sono dello stesso ordine se sono paralleli o se si incontrano in una retta. In entrambi questi casi, la retta comune ai piani considerati è detta loro *asse traguardo*".

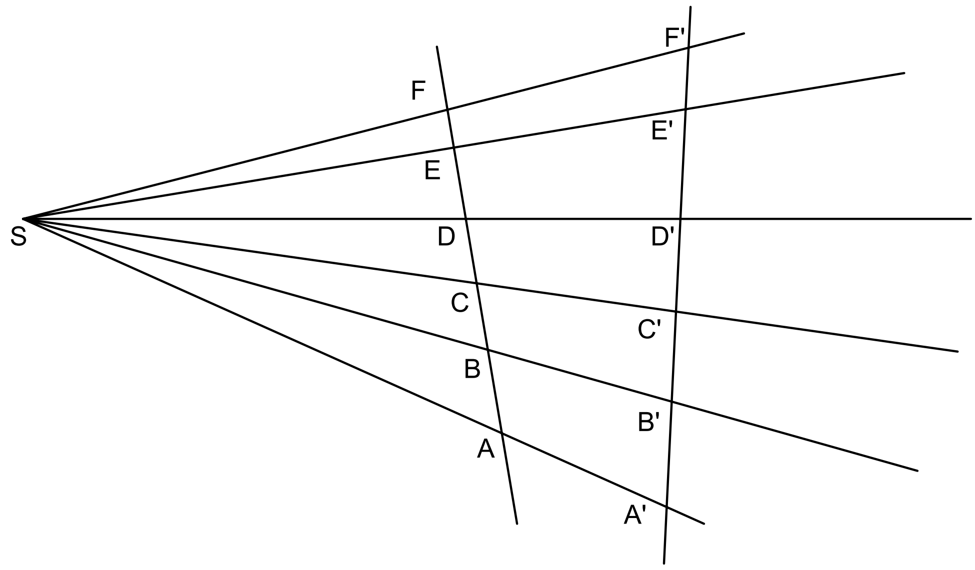
Fasci di rette e fasci di piani hanno quindi un "traguardo" (oggi *sostegno*) anche se sono impropri: ad esempio, se un fascio è costituito dalle rette parallele ad una retta assegnata, il suo sostegno è un punto improprio. Consideriamo ora un insieme di punti allineati, che formino una retta (detta "punteggiata"); su di essa sia fissato il punto O, il "ceppo". Siano OA, OA'; OB, OB'; OC, OC' tre coppie di segmenti sulla retta data tali che risulti:

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = OC \cdot OC'$$

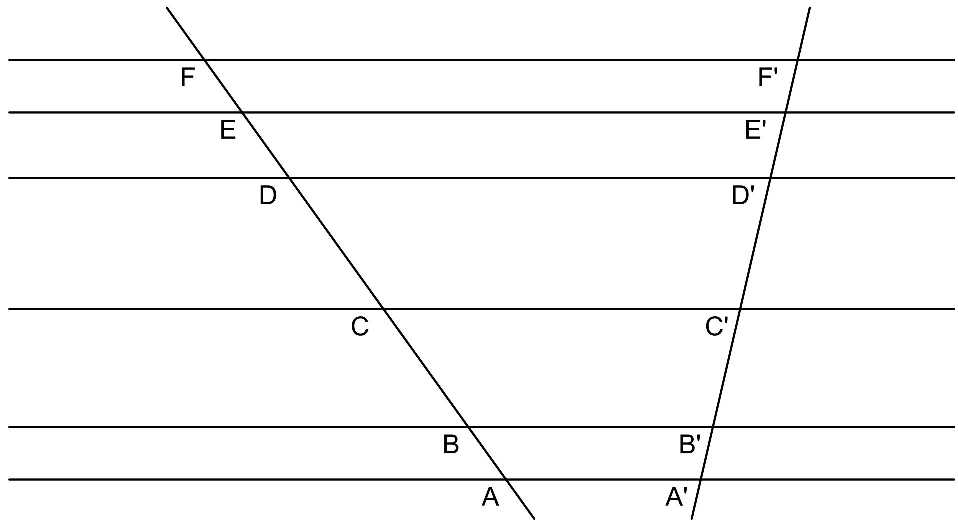
In tale caso le tre coppie di punti A, A'; B, B'; C, C' sono dette "in involuzione". Desargues provò che tre coppie di punti in involuzione sono tali indipendentemente dalla posizione del ceppo O. Un importante risultato desarguesiano riguarda la proiezione su di una retta qualsiasi di tre coppie di punti in involuzione su di una retta prefissata. Il centro da cui avviene tale proiezione può essere sia un punto proprio che un punto improprio.

> **Teorema.** Siano A, B; C, D; E, F tre coppie di punti in involuzione su di una stessa retta; per essi passino tre coppie di rette dello stesso fascio, di centro P (proprio o improprio); allora tali rette intersecano qualsiasi altra retta, non appartenente al fascio considerato, in tre coppie di punti A', B'; C', D'; E', F' in involuzione.

Caso di un fascio proprio di sostegno S:



Caso di un fascio improprio:



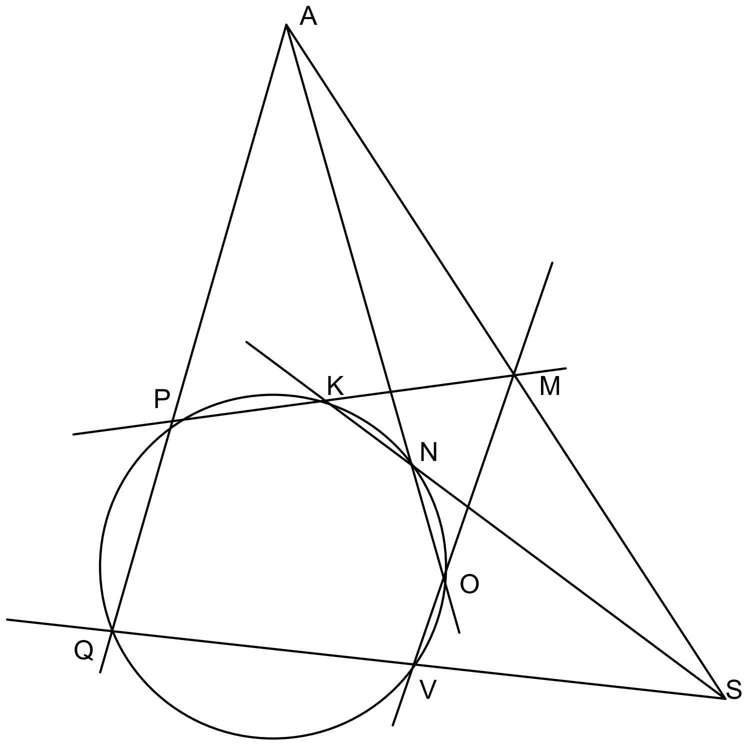
(La dimostrazione nel caso di un centro di proiezione improprio si ottiene applicando il teorema di Talete. Se il centro di proiezione è proprio la dimostrazione fu interamente trattata da Desargues).

Il teorema precedente assicura che la proprietà di involuzione è invariante rispetto alla proiezione ed alla sezione: è questo un risultato che, come vedremo, anticipò lo spirito degli studi di Poncelet sulle proprietà proiettive delle figure. Desargues si occupò quindi delle coniche con un procedimento unitario e pertanto assai moderno ed elegante.

Le idee di Girard Desargues furono riprese dal più importante dei suoi seguaci, Blaise Pascal (1623-1662), che nel 1640 (non ancora diciassettenne) scrisse *Essay pour le Coniques*. In esso è contenuto l'enunciato della proposizione oggi nota come teorema di Pascal. Esso afferma che i lati opposti dell'esagono PQVONK (le coppie PQ, NO; KP, OV; NK, VQ) inscritto in una circonferenza si incontrano in tre punti allineati (A, M, S). Una versione moderna di tale teorema è la seguente:

Teorema di Pascal. Condizione necessaria e sufficiente affinché un esagono sia inscrittibile in una conica è che siano allineati i punti di intersezione delle tre coppie di lati opposti.

Notiamo che Pascal riprese dichiaratamente molti risultati di Desargues, ma il suo teorema (del tutto originale) gli consentì di mettere a punto un'impostazione della teoria delle coniche più moderna e più generale rispetto a quella desarguesiana.

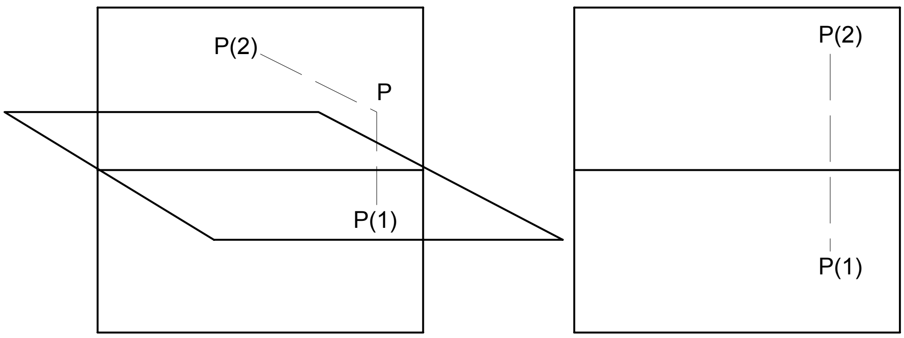


Un matematico svizzero fu tra i protagonisti delle ricerche nel XVIII secolo sulla prospettiva e sulla geometria proiettiva: Johan Heinrich Lambert (1728-1777), autore dell'elegante *Trattato di prospettiva* (1774). Interessante è anche il saggio *Photometria sive de mensura et gradibus luminis, colorum et umbra*, pubblicato da Lambert nel 1760: in esso sono considerate questioni di teoria delle ombre ed è enunciata la proposizione (*Legge del coseno di Lambert*) secondo la quale la quantità di luce ricevuta da una parte opaca di piano illuminata da una sorgente puntiforme posta a distanza infinita è direttamente proporzionale all'area della superficie illuminata ed al coseno dell'angolo di incidenza.

10. Gaspard Monge e la geometria descrittiva

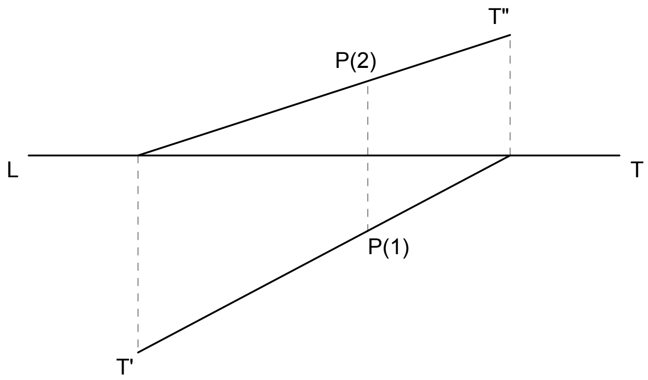
Gaspard Monge (1746-1818), fu uno dei sistematori delle questioni riguardanti la rappresentazione bidimensionale di oggetti tridimensionali: a lui si deve la teoria che viene oggi chiamata geometria descrittiva; nella *Geometrie descriptive* sono raccolte le lezioni tenute da Monge all'École Normale nel corso di "stereotomia" nell'anno accademico 1794-1795.

Monge si proponeva di risolvere sia il problema della rappresentazione di un oggetto che il problema inverso, ovvero la ricostruzione delle caratteristiche dell'oggetto a partire dalla sua rappresentazione. Per questo egli mise a punto il metodo della "doppia proiezione ortogonale".



L'oggetto è proiettato ortogonalmente su due piani tra loro perpendicolari; l'intersezione di tali piani (oggi "linea di terra") era indicata con il termine *base de l'elevation*. Il piano verticale viene infine ruotato attorno alla linea di terra fino a coincidere con il piano orizzontale: la rappresentazione finale dell'oggetto è quindi contenuta in un'unica tavola, in cui sono rappresentati i due piani sovrapposti.

Monge dimostrò che un punto è rappresentato da una coppia di punti (proiezioni) appartenenti ad una retta perpendicolare alla linea di terra (e viceversa, ogni coppia di punti appartenenti ad una retta perpendicolare alla linea di terra costituisce la rappresentazione di un punto); una retta è rappresentata da una coppia di rette (proiezioni; viceversa, ogni coppia di rette non perpendicolari alla linea di terra costituisce la rappresentazione di una retta); un piano (non inclinato a 45° rispetto ai due piani perpendicolari di riferimento) è rappresentato dalle sue due tracce (le intersezioni del piano considerato con i due piani di proiezione), le quali si intersecano sulla linea di terra. (viceversa, due rette che si intersecano sulla linea di terra costituiscono la rappresentazione di un piano).

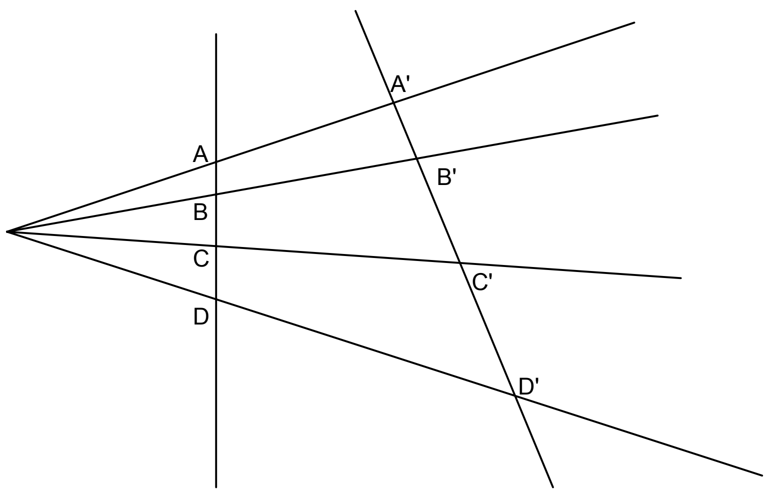


Si definisce "retta di profilo" una retta le cui proiezioni coincidano con una stessa retta perpendicolare alla linea di terra; si prova allora che condizione necessaria e sufficiente affinché un punto appartenga ad una retta non di profilo è che la prima proiezione del punto appartenga alla prima proiezione della retta e la seconda proiezione del punto appartenga alla seconda proiezione della retta (se la retta in questione è di profilo, la condizione enunciata è solo necessaria).

11. Il *Traité* di Jean-Victor Poncelet

Jean-Victor Poncelet (1788-1867) fu allievo di Monge e nel 1822 pubblicò il *Traité des proprietes projectives des figures*: con tale opera è identificata la nascita della moderna geometria proiettiva (Cassina, 1921). Un fondamentale risultato di Poncelet è l'introduzione del "birapporto": considerati quattro punti A, B, C, D su di una retta, si dice loro birapporto (ABCD) la quantità:

$$(ABCD) = \left(\frac{CA}{CB}\right) : \left(\frac{DA}{DB}\right)$$



Poncelet riuscì finalmente a risolvere l'antico problema della prospettiva: è noto, infatti, che nel passaggio da un oggetto alla sua rappresentazione prospettica non si mantengono le distanze né i rapporti tra i segmenti. L'invariante rispetto alla proiezione è individuato dal teorema seguente:

Dati quattro punti allineati A, B, C, D, siano A', B', C', D' quattro punti ottenuti dai primi con una proiezione su di un'altra retta. Allora risulta: (ABCD) = (A'B'C'D').

Dunque il birapporto è invariante nelle proiezioni: proprietà di questo tipo si dicono *proiettive*.

Un altro grande merito di Poncelet è di avere riproposto la nozione di punto all'infinito, intuita da Desargues; nel XVIII secolo tale concetto era utilizzato solo in parte. Poncelet invece utilizzò organicamente i punti all'infinito e considerò sistematicamente i fenomeni geometrici nello spazio proiettivo. Introdusse inoltre nella matematica il settore della geometria proiettiva complessa (già in parte trattato da Monge), superando così la diffidenza con la quale i punti immaginari erano trattati nel XVIII secolo. Ad esempio, tutte le circonferenze di un piano hanno due punti (complessi) in comune all'infinito, detti *punti ciclici*. In coordinate omogenee, la circonferenza:

$$x_1^2+x_2^2+\alpha x_1x_3+\beta x_2x_3+\gamma x_3^2 = 0$$

intersecata con la retta impropria, rappresentata da $x_3 = 0$, determina i due punti impropri:

$$x_1^2+x_2^2 = 0 \quad \wedge \quad x_3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (1; i; 0), \quad (1; -i; 0)$$

Il passaggio per i punti ciclici viene così ad essere la condizione necessaria e sufficiente affinché una conica sia una circonferenza (se ripetiamo lo stesso procedimento ad esempio nel caso di un'ellisse, troviamo ancora due punti complessi coniugati, ma diversi dai punti ciclici):

12. Il principio di dualità

Poncelet si occupò con Joseph Diez Gergonne (1771-1859), autore di *Essai de dialectique rationelle*, della proposizione che viene detta "principio di dualità" (le cui radici, molto antiche, possono essere ricercate addirittura in Apollonio, e più tardi in Desargues, in de la Hire e in Monge). Il lavoro di Poncelet sarà sviluppato da Julius Plücker (1801-1868), Michel Chasles (1793-1880, autore del *Traité de geometrie superieure* del 1852) e Charles J. Brianchon (1785-1864, a cui si deve un risultato che, come vedremo, consente di fornire un celebre esempio di dualità).

Il generale principio di dualità può essere enunciato nel modo seguente: da ogni proposizione di geometria proiettiva piana può esserne ricavata un'altra, caratterizzata dalla stessa struttura logica della prima, mediante lo scambio dei termini duali. In particolare:

- la nozione di proiezione è duale della nozione di sezione e viceversa;
- la nozione di punto è duale della nozione di retta e viceversa;
- la nozione di quadrangolo è duale della nozione di quadrilatero e viceversa, etc.

Interessante è la relazione di dualità intercorrente tra il teorema di Pascal ed il "teorema di Brianchon": ricordiamo l'enunciato della prima proposizione:

Teorema di Pascal. Condizione necessaria e sufficiente affinché i vertici di un esagono stiano su di una conica è che i punti comuni alle tre coppie di lati opposti appartengano alla stessa retta.

In tale enunciato modifichiamo alcuni termini: sostituiamo "vertice" con "lato" (e viceversa) e "punto" con "retta" (e viceversa). Otteniamo così:

Teorema di Brianchon. Condizione necessaria e sufficiente affinché i lati di un esagono stiano su di una conica (siano tangenti ad una conica) è che le rette comuni alle tre coppie di vertici opposti abbiano in comune lo stesso punto.

Si noti che il principio di dualità consente un'importante semplificazione dell'opera dimostrativa: la dimostrazione di una proposizione implica infatti la dimostrazione della proposizione duale (Freguglia, 1982).

13. Il *programma di Erlangen*

La precisazione dei concetti di gruppo e di invariante portò alla riunificazione dell'opera dei geometri dell'Ottocento: essa fu realizzata da Felix Klein (1849-1925), che nell'*Antrittvorlesung* (prolusione inaugurale o *Programm*) del 1872 all'Università di Erlangen (il *programma di Erlangen*) identificò la geometria con lo studio degli invarianti rispetto a gruppi di trasformazioni. Scrive U. Bottazzini:

> "Nel *Programm* Klein cominciava con l'osservare che le trasformazioni dello spazio in sé formano un gruppo. Come esempi di gruppi Klein suggeriva quello dei movimenti nello spazio e il suo sottogruppo dato dalle rotazioni intorno a un punto fisso. Il gruppo dei movimenti era a sua volta un sottogruppo del gruppo delle collineazioni. L'osservazione cruciale era che *vi sono nello spazio delle trasformazioni che non alterano affatto le proprietà geometriche dei corpi*, dove per proprietà geometriche Klein intendeva quelle indipendenti dalla posizione della figura da studiare nello spazio, dalla sua grandezza assoluta e dall'ordinamento delle parti. Egli chiamava *gruppo principale* il gruppo di trasformazioni che lascia inalterate tali proprietà" (Bottazzini, 1992).

Per classificare le varie geometrie è necessario esaminare le trasformazioni, dal momento che ogni geometria studia gli invarianti delle figure rispetto ad un ben determinato gruppo di trasformazioni:

- se le trasformazioni considerate sono le congruenze, la geometria che ne studia gli invarianti (le distanze) è la geometria euclidea;
- se le trasformazioni considerate sono le più generali trasformazioni affini, la geometria originata è la geometria affine (che generalizza la geometria euclidea); gli invarianti sono, in questo caso, i rapporti (semplici: di segmenti appartenenti alla stessa retta o a rette parallele);
- se le trasformazioni considerate sono le ancor più generali trasformazioni proiettive, la geometria che otteniamo è la geometria proiettiva (della quale la geometria affine e di conseguenza quella euclidea sono pertanto dei casi particolari); gli invarianti sono i birapporti.

Il *programma di Erlangen* armonizzò ogni settore di ricerca della geometria in un'impostazione unitaria: la geometria proiettiva, sorta dalle ricerche sulla prospettiva e sull'ottica geometrica, si fuse definitivamente con tutte le altre interpretazioni del "fare geometria" e, infine, con l'algebra.

Alcuni riferimenti bibliografici

Bagni, G.T. & D'Amore, B. (1994), *Alle radici storiche della prospettiva*, Angeli, Milano.

Bonelli, P. (1978), *La matematica nell'arte figurativa*, Istituto di Matematica Università di Siena, Siena.

Bottazzini, U. (1992), *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino.

Brousseau, G. (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques, *Reserches en Didactique des Mathématiques*, 4, 2, 165-198.

Brousseau, G. (1989), Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques, Bednarz, N. & Garnier, C. (Eds.), *Constructions des savoirs, obstacles et conflits*, 41-64, Agence d'Arc, Montreal.

Cassina, U. (1921), La prospettiva e lo sviluppo dell'idea dei punti all'infinito, *Periodico di matematiche*, 4-1, 326-337.

Emmer, M. (1991), *La perfezione visibile. Matematica e arte*, Theoria, Roma-Napoli.

Freguglia, P. (1982), *Fondamenti storici della geometria*, Feltrinelli, Milano.

Meneghini, M. & Mancini Proia, L. (1988), *La prospettiva: un incontro tra matematica e arte. Una proposta didattica nella scuola secondaria*. Progetto strategico CNR, TID 2, Roma.

Ovio, G. (1918), *L'Ottica di Euclide*, Hoepli, Milano.

Piero della Francesca (1982), *De prospectiva pingendi*, Nicco Fasola, G (Ed.), Sansoni, Firenze.

Radford, L. (1997), On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching os Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33.

Radford, L. (2003), On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought, Anderson, M. & Al. (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*, 49-79, Legas, Ottawa.

Radford, L., Boero, P. & Vasco, C. (2000), Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics, Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, 162-167, Kluver, Dordrecht.