L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate
(2004) 27A–B, 6, 706–721

Insegnamento-apprendimento storico

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica
Università di Roma "La Sapienza"

Abstract In this paper we discuss the role of historical references into mathematics teaching and learning, with particular reference to some theoretical frameworks. We conclude that mathematical knowledge and historical background cannot be considered in isolation: their connections reflect relevant assumptions. Very different epistemological assumptions underlying different approaches must be pointed out and discussed by teachers.

Sommario Nel presente articolo si esamina il ruolo dei riferimenti storici nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica con particolare riferimento ad alcuni quadri teorici. Si conclude che la conoscenza matematica ed il contesto storico non possono essere considerati isolatamente: i collegamenti tra di essi riflettono importanti assunzioni. Le assunzioni epistemologiche, assai diverse, che stanno alla base dei diversi approcci devono essere evidenziate e discusse dagli insegnanti.

Insegnamento-apprendimento storico

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica
Università di Roma "La Sapienza"

A Filippo Natali (1939-2004), medico

1. DUE ESEMPI PER INTRODURRE ALCUNE QUESTIONI FONDAMENTALI

Primo esempio. In un'aula scolastica, un insegnante si accinge a presentare ai propri allievi una breve introduzione all'evoluzione storica della matematica. Per fare ciò si basa sul Sommario della voce *Matematica* redatta per l'*Enciclopedia Italiana*, edizione 1934 (vol. XXII, p. 547), da Federigo Enriques (1871-1946, direttore della sezione matematica dell'opera dal 1925 al 1937, allontanato nel 1938 dall'insegnamento universitario in seguito alle leggi razziali):

1. La matematica come scienza razionale
2. Matematiche preelleniche
3. Sviluppo delle matematiche presso i Greci
4. Le opere classiche
5. Sviluppi ulteriori e decadenza nel periodo ellenistico
6. *Trasmissione attraverso i Romani*
7. Alto Medioevo

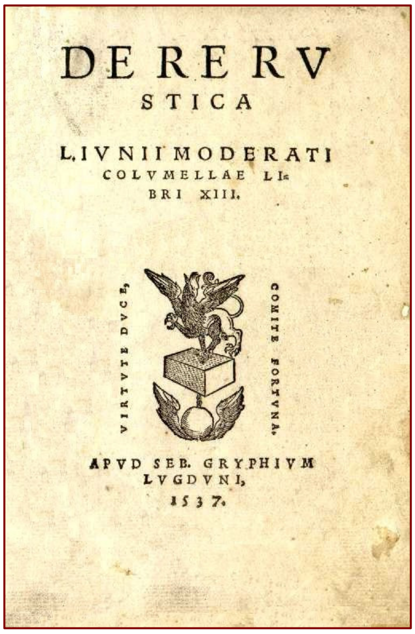
   etc.

Si parla, dunque, di *Trasmissione attraverso i Romani* e questo fa pensare che proprio ai Romani debba essere riconosciuto un ruolo attivo, positivo nei confronti della matematica. In base a ciò, il nostro insegnante si sentirà in dovere di presentare ai propri allievi alcuni esempi significativi di matematica romana. Ma una categorica citazione dello storico Gino Loria appare allarmante:

> "La nuova stirpe dominatrice [i Romani] si mostrò del tutto priva dell'attitudine di coltivare le discipline che nessuna palese relazione

manifestavano con l’arte della guerra e del governare” (Loria, 1929-1933, p. 121, nel capitolo intitolato “SPQR”).

Tra le opere romane citate dallo stesso Loria compare un trattato di Lucio Giulio Moderato Columella da Cadice, *De Re Rustica* (scritto nel 62 d.C.), con alcuni elementi di geometria pratica (Loria, 1929-1933, pp. 127-128), per il quale riportiamo il frontespizio di un’edizione a stampa del 1537.



Per quanto riguarda i contributi matematici di Columella segnalati da Loria, troviamo alcune formule approssimate per il calcolo di aree (nell’edizione del 1573 sono alle pp. 184-185, riprodotte nella figura seguente):

- per trovare l’area di un triangolo equilatero di lato l:

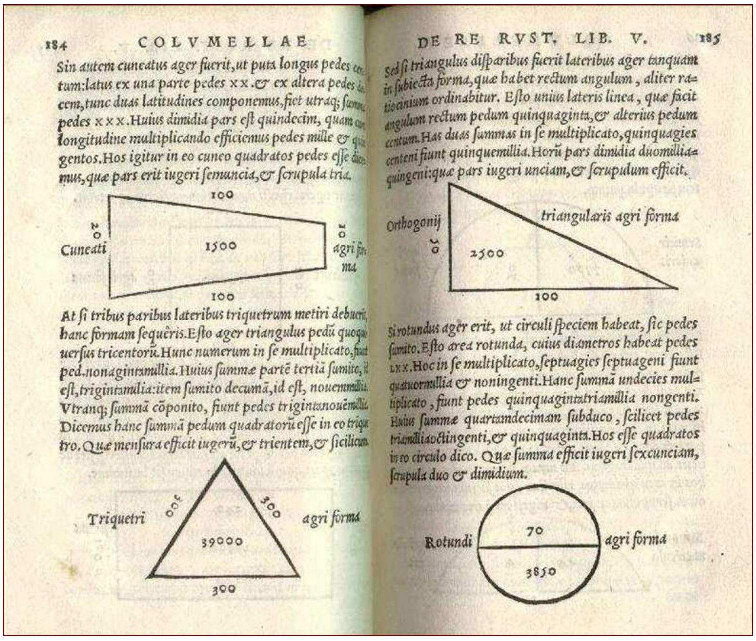
  Area = $l^2 \cdot 13/30$ (con ciò si approssima $\sqrt{3}$ con 26/15)

- per trovare l’area di un cerchio di diametro d:

  Area = $d^2 \cdot 11/14$ (con ciò si approssima π con 22/7)

In entrambi i casi l’approssimazione è per eccesso:

- primo caso: (val. approssimato)/(val. esatto) = 1.000740…
- secondo caso: (val. approssimato)/(val. esatto) = 1.000402…



184 COLVMELLAE

Sin autem cuneatus ager fuerit, ut puta longus pedes cen-tum: latus ex una parte pedes xx. & ex altera pedes de-cem, tunc duas latitudines componemus, fiet utraq; ſumma pedes xxx. Huius dimidia pars eſt quindecim, quam cum longitudine multiplicando efficiemus pedes mille & quin-gentos. Hos igitur in eo cuneo quadratos pedes eſſe dice-mus, quæ pars erit iugeri ſemuncia, & ſcrupula tria.

100

20

Cuneati

1500

10

agri for-ma

100

At ſi tribus paribus lateribus triquetrum metiri debueris, hanc formam ſequêris. Eſto ager triangulus pedũ quoquo-uerſus tricentorũ. Hunc numerum in ſe multiplicato, fiunt ped. nonagintamillia. Huius ſummæ partẽ tertiã ſumito, id eſt, trigintamilia: item ſumito decumã, id eſt, nouemmilia. Vtranq; ſummã cõponito, fiunt pedes trigintanouẽmilia. Dicemus hanc ſummã pedum quadratorũ eſſe in eo trique-tro. Quæ menſura efficit iugerũ, & trientem, & ſicilicum.

Triquetri

300

300

39000

agri forma

300

DE RE RVST. LIB. V. 185

Sed ſi triangulus diſparibus fuerit lateribus ager tanquam in ſubiecta forma, quæ habet rectum angulum, aliter ra-tiocinium ordinabitur. Eſto unius lateris linea, quæ facit angulum rectum pedum quinquaginta, & alterius pedum centum. Has duas ſummas in ſe multiplicato, quinquagies centeni fiunt quinquemillia. Horũ pars dimidia duomillia-quingenti: quæ pars iugeri unciam, & ſcrupulum efficit.

Orthogonij

triangularis agri forma

50

2500

100

Si rotundus ager erit, ut circuli ſpeciem habeat, ſic pedes ſumito. Eſto area rotunda, cuius diametros habeat pedes LXX. Hoc in ſe multiplicato, ſeptuagies ſeptuageni fiunt quatuormillia & noningenti. Hanc ſummã undecies mul-tiplicato, fiunt pedes quinquagintatriamillia nongenti. Huius ſummæ quartamdecimam ſubduco, ſcilicet pedes triamilliaoctingenti, & quinquaginta. Hos eſſe quadratos in eo circulo dico. Quæ ſumma efficit iugeri ſexcunciam, ſcrupula duo & dimidium.

Rotundi

70

3850

agri forma

Come valutare il contributo di Columella alla storia della nostra disciplina? Ancora Loria osserva che il trattatista romano spesso non enuncia regole generali, ma lascia al lettore i desumerle dalle applicazioni (Loria, 1929-1933, p. 128). Ed a parte l’apprezzabile accuratezza delle approssimazioni proposte, non possiamo dimenticare che ben due secoli e mezzo prima di Columella, un greco-siciliano che perse la vita proprio a causa degli invasori romani aveva messo a punto una tecnica per ottenere approssimazioni per difetto e per eccesso mediante la progressiva considerazione di poligoni regolari inscritti e circoscritti. Un metodo importante che si rivelerà estremamente fecondo, nella storia della matematica. Ma gli interessi di Archimede non erano solo pratici…

Riassumendo: quale presentazione dell’antica matematica romana risulta possibile e corretta, alla luce di quanto sopra osservato? Perché dopo la grande stagione creativa greca la ricerca matematica sembra ridursi a qualche banale questione applicativa?

Secondo esempio. Durante una lezione universitaria di algebra, il docente pone ai propri studenti il seguente quesito: *secondo voi, chi ha dimostrato il teorema fondamentale dell'algebra?*[1] Si tratta, come vedremo, di una domanda solo in apparenza semplice.

Certamente l'inquadramento storico di una proprietà essenziale delle equazioni algebriche può essere utile dal punto di vista didattico e il confronto delle versioni attuali con le dimostrazioni originali è stimolante (Aigner & Ziegler, 1998). Anche i giovani studenti non tardano a rilevare la semplice relazione che si manifesta tra il grado di un'equazione a coefficienti reali e il numero delle sue soluzioni: un'equazione di primo grado $ax+b = 0$ (con a, b reali, a non nullo) ha una ed una sola soluzione reale e per equazioni di grado n con $n>1$ le soluzioni reali sono al più n. Tale regolarità, com'è noto, è espressa da una proposizione di primaria importanza: il *teorema fondamentale dell'algebra* (ma la presentazione della sua dimostrazione completa difficilmente potrebbe essere proposta a livello di scuola secondaria: Duham, 1991).

Non è sempre facile occuparsi della storia di uno specifico settore scientifico e in particolare risolvere le questioni di priorità cronologica che possono sorgere in matematica. Nel caso della domanda riguardante il teorema fondamentale dell'algebra, comunque, il problema sembra impostato in termini piuttosto chiari: si fa riferimento ad *un ben determinato risultato* e si domanda *quale studioso abbia dimostrato per la prima volta tale risultato*.

Tuttavia per poter considerare ben posta la questione sarebbe necessario precisare innanzitutto il significato del termine *dimostrare*, con riferimento ad un definito paradigma teorico, ad un concordato standard di rigore. Tenendo presente che tale standard si evolve storicamente in modo notevole (citiamo ad esempio: Gadamer, 1975; Furinghetti & Radford, 2002), appare chiaro che un'indagine storica sulla priorità cronologica verrebbe a confrontarsi con impostazioni anche sensibilmente diverse: in altri termini, ciò comporta che potrebbero essere accettate più *prime dimostrazioni*.

Per quanto riguarda il teorema fondamentale dell'algebra, sarebbe inoltre necessario tenere conto che di esso sono accettate più formulazioni diverse. La versione che potremmo considerare base stabilisce che ogni polinomio di grado n a coefficienti complessi ha n radici complesse; una versione apparentemente più semplice e più limitata afferma che ogni polinomio a coefficienti reali può esprimersi come prodotto di fattori lineari e quadratici. Anche la considerazione della particolare formulazione alla quale fare riferimento può influenzare la risposta a proposito della priorità cronologica: infatti, storicamente, per affrontare la definizione nell'ambito dei numeri complessi è necessario disporre

---

[1] Riprendo la questione da una bella, stimolante discussione che ho avuto con Bruno D'Amore alcuni mesi fa.

di un campo numerico adeguato, mentre la formulazione con riferimento ai reali potrebbe essere proposta anche in periodi precedenti.

Dal punto di vista cronologico, un primo riferimento alla presenza di n radici per un polinomio di grado n può collegarsi ad Albert Girard (1590-1633) ed essere collocato nel 1629.[2] Nel 1702, però, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) smentì la generica affermazione di Girard notando che x^4+t^4 non può essere scritto come prodotto di fattori quadratici reali. Della questione si occupò Leonhard Euler (1707-1783) nel 1742, in alcune lettere a Nicolaus II Bernoulli (1687-1759). Euler dimostrò il teorema in questione fino al sesto grado (Duham, 1991). Il primo tentativo di dimostrazione generale è attribuito a Jean Baptiste Le Rond d'Alembert (1717-1783) nel 1746, ma la sua proposta presenta diversi punti deboli. Pochi anni dopo, nel 1749, anche Euler affrontò il caso generale (sempre per polinomi a radici reali), ma il suo tentativo venne contestato nel 1772 da Giuseppe Luigi Lagrange (1736-1813), il quale nel 1795 tentò di dare una dimostrazione utilizzando un metodo nuovo ed elegante; ma anche il suo tentativo presenta numerose lacune.

La prima dimostrazione del teorema è generalmente attribuita a Carl Friedrich Gauss (1777-1855), il quale la pubblicò nel 1799 nella propria celebre tesi di dottorato (Boyer, 1985). Si noti che lo stesso Gauss non pretese alcuna priorità cronologica, bensì affermò solo di esporre una nuova dimostrazione del risultato: sostenne inoltre esplicitamente che le idee alla base della dimostrazione di d'Alembert, nonostante essa sia gravemente incompleta, possono portare a dimostrazioni corrette (Fryant & Sarma, 1984).[3]

Nel 1814 Jean Robert Argand (1768-1822) pubblicò una dimostrazione abbastanza semplice basandosi su idee di d'Alembert e nel 1820 Augustin Louis Cauchy (1789-1857) dedicò un intero capitolo del proprio *Cours d'analyse* alla dimostrazione di Argand (senza tuttavia mai nominare il suo Autore). Nel 1816 Gauss pubblicò una seconda dimostrazione, spesso considerata completa (per quanto riguarda i polinomi a coefficienti complessi, nel 1849 Gauss diede una dimostrazione simile a quella del 1799).

Questa breve rassegna non ci agevola nel compito di dare una risposta alla questione della paternità di uno dei più importanti risultati della matematica contemporanea: non è facile attribuire una vera e propria priorità cronologica. Come si spiegano tali difficoltà? Il grado di completezza richiesto e gli standard di rigore ai quali una dimostrazione deve fare riferimento sono in continua

[2] A proposito della storia del teorema fondamentale dell'algebra segnaliamo: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Fund_theorem_of_algebra.html

[3] Dal punto di vista moderno, neppure la dimostrazione originale di Gauss (che può definirsi di tipo topologico) potrebbe essere considerata rigorosa e richiede alcuni miglioramenti. Ma il rigore è un concetto storico…

evoluzione e dipendono dai contesti socioculturali (Wartofsky, 1979; Crombie, 1995): in che termini la presentazione didattica deve tenere conto di ciò?

Nel presente lavoro non cercheremo di dare risposte dettagliate a tutte le domande ora ricordate, ma fisseremo alcuni punti che potranno essere utili per orientare insegnanti (e allievi) nella considerazione del ruolo corretto della componente storica nei processi di insegnamento-apprendimento.

2. STORIA, INSEGNAMENTO, APPRENDIMENTO

Le componenti della formazione degli insegnanti sono certamente di varia natura e devono essere approfondite sia dal punto di vista matematico che da quello pedagogico.[4] Come molti studiosi hanno rilevato, anche in importanti lavori di ricerca recentemente pubblicati, la storia della matematica può avere un ruolo di primaria importanza nell'insegnamento e nell'apprendimento della matematica (Fauvel & van Maanen, 2000, p. XIII).

In questo articolo ci occuperemo di alcuni aspetti fondamentali collegati alla storia e all'epistemologia ed al loro ruolo nella didattica della matematica; faremo riferimento sia alle questioni teoriche che alle importanti implicazioni da essa determinate sulla formazione degli insegnanti (*pre-service* e *in-service*).

Come osservato, l'analisi delle molte possibilità didattiche della storia della matematica è un argomento di primaria importanza della ricerca internazionale (innumerevoli sono le pubblicazioni a ciò dedicate: oltre al fondamentale Fauvel & van Maanen, 2000, sopra citato, ricordiamo ad esempio: Pizzamiglio, 2002; per quanto riguarda la recente ricerca italiana si veda: Bagni, Furinghetti & Spagnolo, in via di pubblicazione). La necessità di un adeguato approfondimento disciplinare può portare ad individuare una prevalente importanza collegata alla didattica della scuola superiore, soprattutto se l'uso del riferimento storico viene proposto esplicitamente e con particolare attenzione all'aspetto metacognitivo; secondo noi, tuttavia, le principali questioni sollevate dall'applicazione della storia nella didattica sono del tutto generali e possono quindi essere inizialmente considerate senza particolari distinzioni di livello scolastico.

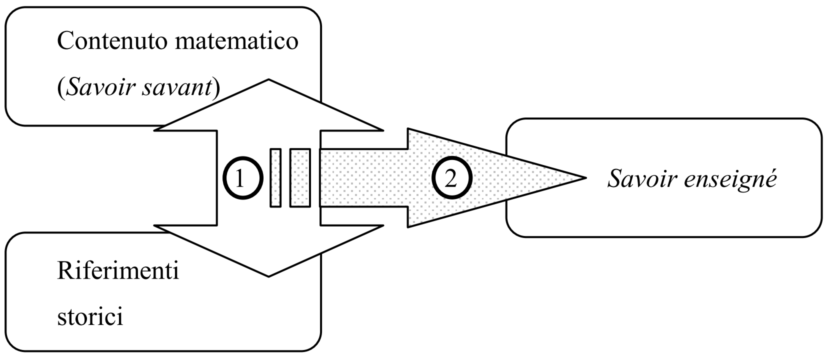
L'uso della storia nella didattica della matematica collega i processi di apprendimento con alcune questioni tipicamente storiche e filosofiche (come sottolineato in: Radford, Boero & Vasco, 2000) e tale collegamento può essere

---

[4] Il presente articolo riunisce i contenuti della conferenza tenuta dall'autore presso il Centro U. Morin di Paderno del Grappa il 27 agosto 2004 in occasione del XXXIII Seminario Nazionale *Diversi modi di insegnamento-apprendimento della matematica: insegnamento-apprendimento cooperativo, tecnologico, storico*. Alcuni spunti sono inoltre ripresi dalla comunicazione dell'autore al Discussion Group 6 del convegno internazionale ICME-10, tenutasi a Copenhagen (5-11 luglio 2004: Bagni, in via di pubblicazione-c).

assicurato da adeguate considerazioni epistemologiche (Moreno & Waldegg, 1993; Bagni, in via di pubblicazione-a e in via di pubblicazione-b). Molti sono gli aspetti che possono essere considerati criticamente per quanto riguarda le caratteristiche dell'interazione tra la storia della matematica e la pratica didattica: ad esempio, diversi livelli possono essere esaminati con riferimento ai processi di insegnamento e di apprendimento: un primo potrebbe essere collegato alla presentazione di aneddoti e, seppure sia spesso ritenuto piuttosto elementare, può rivelarsi molto utile per rinforzare la convinzione degli allievi (Radford, 1997); livelli più impegnativi sono collegati alle relazioni interdisciplinari ed alle possibilità metacognitive (come notato in: Furinghetti & Somaglia, 1997).

Per esaminare alcune caratteristiche dei diversi usi della storia nella didattica della matematica faremo riferimento alla seguente rappresentazione (che riprendiamo da: Bagni, in via di pubblicazione-c; alcuni termini si riferiscono all'impostazione di Y. Chevallard; si veda: Chevallard, 1985):



Naturalmente tale rappresentazione non è che uno schema riassuntivo: il passaggio dal *savoir savant* al *savoir enseigné*, ad esempio, è tutt'altro che semplice e richiederebbe una specifica trattazione. Possiamo tuttavia notare che ci sono due importanti gruppi di connessioni da analizzare:

- le connessioni (1) tra il contenuto matematico e i riferimenti storici;
- le connessioni (2) tra il contenuto matematico collegato ai riferimenti storici da un lato e la conoscenza presentata dall'insegnante agli allievi nella pratica didattica (dopo la *transposition didactique*) dall'altro.

Per chiarire la situazione è importante sottolineare che i possibili usi della storia nella didattica precedentemente ricordati non sono determinati solamente da diverse scelte didattiche, ma riflettono diverse assunzioni epistemologiche (Radford, Boero & Vasco, 2000). Ad esempio, la selezione dei dati storici da considerare significativi non è epistemologicamente neutra, ma deve sempre essere riferita alla particolare ricerca in questione (Radford, 1997; Bagni, in via di pubblicazione-b): naturalmente le particolari proposte didattiche devono tenere conto del livello scolastico e delle capacità degli allievi. Importanti problemi sono poi connessi all'interpretazione dei dati storici considerati: essa viene sempre condotta con riferimento alla nostra attuale impostazione culturale ed ai nostri standard (Gadamer, 1975).

Alcuni insegnanti possono essere indotti ad applicare riferimenti storici alla pratica didattica secondo un approccio ingenuo: ad esempio, l'introduzione didattica di un contenuto matematico potrebbe essere preceduta dalla presentazione ordinata di alcuni riferimenti storici (una sorta di "storia dell'argomento" in questione). Mediante una tale scelta sarebbe implicitamente riconosciuta una valenza introduttiva a tali riferimenti storici e, talvolta, la possibilità di stimolare riflessioni metacognitive (Bagni, 2004). Appare evidente che una tale scelta implica alcune notevoli assunzioni epistemologiche: ma non è questa l'unica possibilità di applicare la storia alla didattica della matematica.

Spesso viene invocato, esplicitamente o implicitamente, un parallelismo tra lo sviluppo storico di un concetto e la corrispondente crescita cognitiva (ben nota è la tesi espressa in: Piaget & Garcia, 1989): è difficile non riconoscere che un nuovo concetto è spesso incontrato dai matematici in fasi operative, ad esempio in attività di risoluzione di problemi o di dimostrazione di teoremi; esso sarà inquadrato teoricamente solo in un secondo momento, molti anni o addirittura secoli più tardi, e potrà così assumere le caratteristiche che (ai giorni nostri!) riconosciamo significative per un concetto matematico vero e proprio (Giusti, 1999). Una parallela evoluzione può essere rilevata in campo cognitivo: frequentemente il primo contatto con un nuovo concetto avviene in fasi operative (Sfard, 1991). Tutto ciò può dunque confermare l'importanza della componente storica nella didattica della matematica: ma sebbene spesso le reazioni degli allievi siano addirittura straordinariamente simili a quelle riscontrate in alcuni grandi matematici della storia (alcuni esempi sono esaminati in: Tall & Vinner, 1981; Bagni, in via di pubblicazione-a), e tale corrispondenza possa rivelarsi estremamente utile per l'insegnante, non possiamo eludere la necessità di un approfondimento teorico specifico a tale riguardo.

Il problema è sostanzialmente il seguente: la corrispondenza sopra delineata non può essere affermata in termini assoluti, ma richiede la precisazione di un ampio quadro teorico e, dunque, l'assunzione di assunzioni epistemologiche. Una delle questioni più delicate sarà l'interpretazione del dato storico: è ad esempio corretto presentare la storia come un percorso che, attraverso incertezze, tentativi ed errori, conduca l'umanità a forgiare una matematica finalmente "corretta", coincidente con le nostre moderne teorie? Quale ruolo va riconosciuto ai fattori sociali e culturali che hanno influenzato i periodi storici? I contenuti matematici dipendono notevolmente anche da elementi non matematici; e la conoscenza non può essere considerata in termini assoluti, bensì compresa con riferimento alle diverse istituzioni culturali che hanno caratterizzato i diversi momenti storici (Radford, 1996 e 1997).

Secondo l'approccio che prende il nome dagli "ostacoli epistemologici" di Guy Brousseau, uno dei più importanti scopi della ricerca storica è la determinazione delle cosiddette *situations fondamentales*, sistemi di problemi e di vincoli che devono essere analizzati per comprendere la (esistente) conoscenza (Radford, Boero & Vasco 2000, p. 163). Gli ostacoli sono suddivisi in epistemologici, ontogenetici, culturali e didattici (Brousseau, 1989) e proprio tale suddivisione indica come le questioni connesse primariamente al sapere siano sostanzialmente isolate rispetto alle altre sfere. Appare chiaro che tale quadro teorico è caratterizzato da importanti assunzioni epistemologiche (Radford, 1997): la riapparizione nei nostri moderni processi di insegnamento e di apprendimento degli stessi ostacoli incontrati dai matematici nella storia; e un approccio sostanzialmente isolato dell'allievo alla conoscenza matematica, senza particolari interazioni con gli altri allievi o con l'insegnante (Brousseau, 1983). Facendo dunque riferimento allo schema precedente, possiamo sintetizzare tali assunzioni epistemologiche nel modo seguente:

(1) la conoscenza esiste e rappresenta la migliore soluzione per dei problemi particolarmente significativi che si sono presentati nella storia; gli ostacoli epistemologici si ripresentano nella pratica didattica;
(2) la sfera della conoscenza matematica è separata da quelle relative agli altri ostacoli (ontogenetici, didattici, culturali): gli allievi apprendono individualmente.

Le assunzioni richieste dall'approccio di Brousseau sono importanti; ma il punto cruciale può essere così sintetizzato (Gadamer, 1975): è estremamente difficile, in generale addirittura impossibile, ai giorni nostri, "vedere" un evento storico senza l'influenza delle nostre moderne concezioni. Questa osservazione è fondamentale.

Il quadro teorico sopra delineato non è l'unico che consente l'applicazione didattica di riferimenti tratti dalla storia della disciplina. Possiamo infatti tenere conto esplicitamente delle riserve sopra espresse e accettare la presenza del nostro moderno punto di vista: in altre parole, possiamo consapevolmente accettare che, nel guardare al passato, noi mettiamo a contatto due culture che sono diverse, ma "non incommensurabili" (come osservato in: Radford, Boero & Vasco, 2000, p. 165).

Dunque per quanto riguarda la natura stessa della matematica, un corretto approccio storico ci spinge a considerare la matematica non come un prodotto statico, dotato di un'esistenza *a priori*, bensì come un processo intellettuale, un'attività continua degli individui (Grugnetti & Rogers, 2000, p. 45).

Secondo l'approccio socio-culturale di Luis Radford,[5] la conoscenza è legata all'attività degli individui e, come abbiamo sopra anticipato, è riferita alle istituzioni culturali; la conoscenza non è dunque costruita individualmente, ma in un ampio contesto sociale e culturale (Radford, Boero & Vasco, 2000, p. 164; si veda inoltre: Lizcano, 1993); naturalmente anche il ruolo della storia deve essere interpretato con riferimento alle diverse situazioni socio-culturali (Wartofsky, 1979) ed esso ci fornisce inoltre l'opportunità di una conoscenza critica approfondita dei periodi storici di volta in volta considerati (Furinghetti & Radford, 2002). Facendo nuovamente riferimento allo schema precedente, possiamo sintetizzare tali assunzioni epistemologiche nel modo seguente:

(1) la conoscenza è collegata alle azioni necessarie per risolvere i problemi; e tali problemi sono risolti nei contesti socio-culturali dei periodi considerati;
(2) la conoscenza viene costruita socialmente e le istituzioni culturali influenzano gli allievi.

3. STORIA DELLA MATEMATICA E FORMAZIONE DEGLI INSEGNANTI

Una questione generale è la seguente: qual è la conoscenza necessaria affinché un insegnante sia in grado di presentare alcuni argomenti matematici mediante un approccio storico? Naturalmente tale conoscenza deve essere adeguatamente collegata con tutte le componenti della preparazione di un insegnante (ci riferiamo ai contenuti matematici specifici, didattici, psicologici etc.).

Diverse domande richiederebbero attenzione specifica: ad esempio, che cosa pensa un giovane futuro insegnante a proposito del ruolo della storia nella didattica della matematica? In altre parole: un insegnante in formazione si attende di insegnare matematica utilizzando la storia? Se sì, perché e come?

Certamente il livello di competenza matematica di un insegnante (o di un futuro insegnante) deve permettere la piena, organica comprensione di tutti gli argomenti curricolari, dal punto di vista matematico. Dal nostro punto di vista, in modo analogo deve essere garantita una buona comprensione per quanto riguarda i riferimenti storici: dunque è evidente che un primo requisito da segnalare riguarda un'effettiva conoscenza della storia della matematica. Considerare tale fattore è importante, in quanto i differenti corsi di laurea, nelle differenti sedi universitarie o addirittura nei differenti paesi, riservano livelli di considerazione ben diversi alla storia della disciplina.

---

[5] Si veda anche l'importante approccio detto "voci ed echi" di Paolo Boero: Boero & Al. 1997.

Per quanto riguarda i quadri teorici precedentemente ricordati, la formazione degli insegnanti può essere influenzata sia dall'approccio collegato agli "ostacoli epistemologici" sia dall'approccio socio-culturale. In generale:

- se un corso di formazione per insegnanti si occupa esclusivamente della storia dei contenuti matematici (ma notiamo appena che una tale situazione, a giudizio di chi scrive, può comportare alcune difficoltà teoriche: Bagni, in via di pubblicazione-b), esso può fare riferimento all'approccio detto "degli ostacoli epistemologici" (ovvero a quadri teorici ad esso vicini). Ad esempio, per quanto riguarda la storia di un particolare argomento matematico, è possibile:
  - considerare i riferimenti storici disponibili;
  - identificare gli ostacoli epistemologici;
  - analizzare le reazioni dei grandi matematici della storia per presentare quindi correttamente ed efficacemente agli allievi la conoscenza matematica sviluppatasi.
- se un corso di formazione per insegnanti si occupa sia della storia dei contenuti matematici che dei fattori non matematici, esso può riferirsi all'approccio socio-culturale. In tale caso, ad esempio, è possibile inquadrare alcune concezioni collegate all'argomento trattato nei rispettivi contesti socio-culturali (e come abbiamo sopra ricordato, la selezione dei dati da presentare è epistemologicamente rilevante: Radford, 1997, p. 28): osserviamo tuttavia che tale scelta è esigente e può essere causa di una notevole riduzione degli argomenti da trattare, pur permettendo lo sviluppo di una conoscenza approfondita e organica.

Ci sentiamo di affermare che difficilmente una pur approfondita conoscenza della storia della matematica può essere considerata sufficiente per ottenere risultati significativi nei processi di insegnamento-apprendimento: gli insegnanti sono infatti chiamati a sviluppare tale conoscenza nel senso di un uso didattico corretto. Con esplicito riferimento al quadro teorico di Radford sopra illustrato, la storia della matematica non può essere separata da una conoscenza storica ben più ampia, con riferimenti sociali, culturali e filosofici. Pertanto gli insegnanti sono chiamati a considerare un ampio gruppo di aspetti della conoscenza storica: una storia esclusivamente "interna", basata sulla concezione di una matematica "pura", isolata da influenze non matematiche si rivela ben poco utile dal punto di vista didattico e causa alcuni problemi teorici. È dunque necessario che gli insegnanti (in formazione ed in servizio) riflettano sulla stessa conoscenza matematica e sulle modalità della sua costituzione nella storia: ad esempio, superando l'annosa dicotomia che prevedeva una matematica "inventata" contrapposta ad una "scoperta", possiamo affermate che la matematica viene, per molti versi, sia *inventata* che *scoperta*, come riassumiamo nella tabella seguente (Grugnetti & Rogers, 2000, pp. 40 e 45):

Le varie attività (legate al *problem solving*):		Si riferiscono a:
Dare risposte ai problemi	*Invenzione* di nuovi concetti	Creatività, attività sociale
Elaborare soluzioni teoriche	*Scoperta* di nuovi teoremi e dimostrazioni	Modalità di pensiero, forme logiche

Nella terza colonna della tabella ora presentata il ruolo del contesto è chiaramente fondamentale. I contenuti matematici e le loro espressioni sono dunque essenzialmente influenzati dalla realtà culturale del periodo in cui essi sono stati concepiti, con riferimento alle istituzioni culturali ed alle convinzioni. La connessione tra matematica e contesto socio-culturale non è solo di generica analogia: il ruolo della componente non matematica è importante e profondo (si veda a tale proposito: Radford, 2003).

Naturalmente l'importanza di quanto osservato non si limita alla sfera teorica, ma riguarda anche la pratica didattica. Presenteremo sinteticamente alcuni esempi:

(a) La storia può costituire una preziosa fonte di spunti per la costruzione del programma. Ad esempio, tradizionalmente un primo corso di analisi matematica è strutturato secondo l'ordine seguente:

Insiemi, funzioni $\rightarrow$ limiti $\rightarrow$ derivate $\rightarrow$ integrali

mentre lo sviluppo storico è approssimativamente riassumibile in un processo inverso (Hairer & Wanner, 1996, p. V):

Cantor	$\leftarrow$	Cauchy	$\leftarrow$	Newton	$\leftarrow$	(Archimede)
Dedekind				Leibniz		Kepler
						Fermat

Si tratta di uno spunto valido? Possiamo considerare efficace, dal punto di vista didattico, il ritorno all'ordine storico (come in parte suggerito, ad esempio, in: Apostol, 1977)? Ma in tale caso come può essere considerata e didatticamente introdotta l'influenza degli elementi non matematici (Bagni, in via di pubblicazione-a)? Un corso di formazione per insegnanti potrebbe utilmente confrontare i diversi curricula e valutare vantaggi e difficoltà dei diversi approcci.

(b) Spesso gli insegnanti di matematica considerano l'importante questione del "rigore". Ma che cosa significa, davvero, questo termine? La correttezza formale deve sempre essere esaminata nel proprio contesto originale e non rispetto a standard moderni: tale aspetto è assolutamente primario quando l'insegnamento è basato sulla considerazione di riferimenti storici (Bagni, in via di pubblicazione-b). Ad esempio, la citata osservazione ha alcune importanti conseguenze collegate all'uso didattico delle fonti originali: quando consideriamo le dimostrazioni classiche della storia della matematica nella pratica didattica, spesso le riscriviamo tenendo conto dei nostri standard attuali (Barbin, 1994). Ciò è probabilmente inevitabile, ma si tratta di una forte e pesante scelta epistemologica e dobbiamo essere consapevoli della sua importanza.

(c) Gli usi dei registri semiotici sono influenzati nettamente dai diversi periodi storici, con le loro diverse concezioni culturali. Non esiste un unico registro di un genere assegnato: la stessa natura di un registro rappresentativo dipende dalla comunità in cui esso viene introdotto e utilizzato (Bagni, in via di pubblicazione-a). Quando un insegnante introduce un concetto mediante alcuni riferimenti storici, non può nascondere che le espressioni impiegate vanno riferite alle istituzioni culturali del periodo considerato: ad esempio, le idee statica e dinamica del concetto di limite, come formulate in diversi momenti storici, hanno portato all'uso di registri rappresentativi diversi (alcune importanti considerazioni sono in: D'Amore, 2001 e 2003).

4. CONCLUSIONI

Alla storia della matematica sono collegate molte possibilità didattiche: dalle presentazioni di aneddoti alle occasioni di riflessione metacognitiva per giungere alla conoscenza organica e profonda della matematica sviluppatasi in un periodo storico caratterizzato da una preciso contesto socio-culturale. Secondo noi tali possibilità sono collegate, in quanto il trasferimento di conoscenza dalla storia alla didattica non può avvenire per semplice analogia (citiamo nuovamente il fondamentale: Radford, 1997) e, come osservato, richiede la considerazione di elementi sia matematici che non matematici.

Alla luce di quanto sopra affermato, riprendiamo brevemente gli esempi introduttivi proposti nel primo capitolo del presente lavoro:

- l'antica matematica romana non può non essere considerata con diretto riferimento all'ambiente socio-culturale in cui essa si è sviluppata: ed in base a ciò la matematica romana non rappresenta una vera e propria evoluzione delle importantissime esperienze precedenti (pensiamo ad esempio alla grande matematica del mondo greco) in quanto, rispetto a quelle, si è sviluppata in un ambiente culturale assolutamente diverso. Citiamo D.J. Struik, il quale osserva che "l'intera struttura economica dell'impero romano era basata sull'agricoltura. Il diffondersi di un'economia basata sulla schiavitù, in tale società, fu fatale a tutto il lavoro scientifico originale" (Struik, 1981, p. 77). A tale proposito ricordiamo però che nei lavori di P.M. Schuhl (Schuhl, 1938) e di A.

Koyré (Koyré, 1967) l'abbondanza di manodopera servile viene considerata un ostacolo assai significativo che ha addirittura inibito il progresso tecnico nel mondo greco. Ciò potrebbe indurre a pensare ad una contraddizione: lo stesso fattore (la presenza della schiavitù) avrebbe portato a due conseguenze pressoché opposte (uno sviluppo orientato alla pratica, a Roma, e la mancanza di un progresso tecnico, in Grecia). Ma una lettura attenta porta a riconoscere che la tradizionale separazione tra *techne* ed *episteme* non escluderebbe che proprio la scienza possa essere applicata a situazioni pratiche (*tecnologia*): tuttavia né in Grecia né a Roma si sviluppò un progresso tecnico basato significativamente sulla matematizzazione del mondo reale.

- il tentativo di stabilire una priorità cronologica per l'introduzione di un concetto o per la dimostrazione di un teorema è spesso ostacolato da difficoltà teoriche insormontabili: dimostrazioni diverse, proposte in periodi diversi, hanno fatto riferimento a paradigmi assai diversi e a diversi standard di rigore. Pertanto una valutazione moderna di una dimostrazione data secoli fa sarebbe un'operazione ben poco corretta e significativa.

Lo sviluppo storico della matematica non può dunque essere considerato isolatamente. E in modo analogo la conoscenza matematica, la competenza didattica e la preparazione pedagogica non possono essere considerate come domini a sé stanti nella formazione degli insegnanti: è invece necessario sviluppare una preparazione integrata nella quale tali elementi siano presenti e si influenzino reciprocamente. La consapevolezza del ruolo della storia della matematica nella didattica deve essere considerata un'importante componente della formazione degli insegnanti e le assunzioni epistemologiche necessarie devono essere consapevolmente discusse ed assunte.

Non sarà inutile notare infine che gli insegnanti di matematica sono anche insegnanti in senso generale; una corretta concezione della storia può dunque collegarsi anche ad una corretta impostazione dell'opera educativa, in quanto siamo convinti, con Pierluigi Pizzamiglio,

> "che la storia sia in grado di attestare in maniera affatto unica la valenza sia culturale e sociale che umanistica della matematica" (Pizzamiglio, 2002, p. 5).

Riferimenti bibliografici

Aigner, M. & Ziegler, G.M. (1998), *Proofs from The Book*, Springer, Berlin.

Apostol, T.M. (1977), *Calcolo*, I, Bollati Boringhieri, Torino.

Bagni, G.T. (2004), Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche, *La matematica e la sua didattica*.

Bagni, G.T. (in via di pubblicazione-a), Historical roots of limit notion. Development of its representative registers and cognitive development, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*.
Bagni, G.T. (in via di pubblicazione-b), *Prime numbers are infinitely many: four proofs from history to matematics education*, Topic Study Group 17, ICME-10 Copenhagen, July 2004, paper accepted.
Bagni, G.T. (in via di pubblicazione-c), *History of Mathematics and Didactics: reflections on teacher education*, Discussion Group 6, ICME-10 Copenhagen, July 2004, paper accepted.
Bagni, G.T.; Furinghetti, F. & Spagnolo, F. (in via di pubblicazione), History and Epistemology in Mathematics Education, Cannizzaro, L.; Fiori, A. & Robutti, O. (Eds.), *Italian Research in Mathematics Education 2000-2003*, Chapter 6.
Barbin, E. (1994), Sur la conception des savoirs géométriques dans les Éléments de géométrie, Gagatsis, A. (Ed.), Histoire et enseignement des Mathématiques: *Cahiers de didactique des Mathématiques*, 14-15, 135-158.
Boero, P.; Pedemonte, B. & Robotti, E. (1997), Approaching theoretical knowledge through voices and echoes: a Vygotskian perspective, *Proceedings of the 21st International Conference PME*, Lathi, Finland, 2, 81-88.
Boyer, C.B. (1985), *A History of Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey (1[a] edizione: John Wiley & Sons, 1968).
Brousseau, G. (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4, 2, 165-198.
Brousseau, G. (1989), Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques, Bednarz, N. & Garnier, C. (Eds.), *Constructions des savoirs, obstacles et conflits*, 41-64, Agence d'Arc, Montreal.
Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, La Penseé Sauvage, Grenoble.
Crombie, A.C. (1995), Commitments and Styles of European Scientific Thinking, *History of Sciences*, 33, 225-238.
D'Amore, B. (2001), Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques, *Scientia Paedagogica Experimentalis*, XXXVIII, 1, 17-46.
D'Amore, B. (2003), La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manqué, *For the learning of mathematics*, 23, 1, 47-51.
Duham, W. (1991), Euler and the Fundamental Theorem of Algebra, *College Mathematics Journal*, 22, 4, 282-293.
Fauvel, J. & van Maanen, J. (2000) (Eds.), *History in Mathematics Education*, Dodrecht, Kluver.
Fryant, A., Sarma, V.L.N. (1984), Gauss' first proof of the fundamental theorem of algebra, *Math. Student* 52 (1-4), 101-105.
Furinghetti, F. & Radford, L. (2002), Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice, English, L. (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 631-654, Erlbaum, Hillsdale.
Furinghetti, F. & Somaglia, A. (1997), Storia della matematica in classe, *L'educazione matematica*, 35, 5, 2, 1.
Gadamer, H.-G. (1975), *Truth and Method*, Crossroad, New York (2[nd] edition: 1989).

Gilain, C. (1991), Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre: théorie des équations et calcul intégral, *Archive for History of Exact Sciences* 42 (2), 91-136.

Giusti, E. (1999), *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Bollati Boringhieri, Torino.

Grugnetti, L. & Rogers, L. (2000), Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues, Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education*, 39-62, Dodrecht, Kluwer.

Hairer, E. & Wanner, G. (1996), *Analysis by Its History*, Springer-Verlag, New York.

Koyré, A. (1967), *Dal mondo del pressappoco all'universo della precisione*, Einaudi, Torino (n. ed. 1982).

Lizcano, E. (1993), *Imaginario colectivo y creación matemática*, Editorial Gedisa, Barcelona.

Loria, G. (1929-1933), *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino (i numeri di pagina sono riferiti alla riedizione: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982).

Moreno, L. & Waldegg, G. (1993), Costructivism and mathematical education, *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 24 (5), 653-661.

Piaget, J. & Garcia, R. (1989), *Psychogenesis and the History of Science*, Columbia University Press, New York.

Pizzamiglio, P. (2002), *Matematica e Storia. Per una didattica interdisciplinare*, La Scuola, Brescia.

Radford, L. (1996), An Historical Incursion into the Hidden Side of the Early Development of Equations, Giménez, J., Campos Lins, R. & Gómez, B. (Eds.), *Arithmetic and Algebra Education*, 120-131, Universitat Rovira I Virgili, Tarragona.

Radford, L. (1997), On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching os Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33.

Radford, L. (2003), On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought, Anderson, M. & Al. (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*, 49-79, Legas, Ottawa.

Radford, L., Boero, P. & Vasco, C. (2000), Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics, Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education*, 162-167, Kluver, Dordrecht.

Schuhl, P.M. (1938), *Machinisme et philosophie*, Alcan, Paris (P.U.F., Paris 1947 e 1969).

Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Struik, D.J. (1981), *Matematica: un profilo storico*, Il Mulino, Bologna (ed. orig. *A concise History of Mathematics*, Dover, New York 1948).

Tall, D. & Vinner, S. (1981), Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-69.

Wartofsky, M. (1979), *Models, representations and the scientific understanding*, Reidel, Dordrecht.