L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 28AB N.6, 596-610

Numeri e algoritmi con carta e matita

GIORGIO T. BAGNI

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
UNIVERSITÀ DI UDINE

Abstract. In this paper we propose some reflections about some well known arithmetical algorithms. In particular, we consider the ancient Egyptian multiplication reduced to additive processes and the techniques using a tableau found, at different times, in China, in India, in the Arab world and in Europe. We point out that tableau multiplication is essentially based upon positional number system and examine students' behaviour (pupils aging 12 years) by analyzing some protocols. Making reference to Ludwig Wittgenstein's theoretical approach, we conclude that the primary reference to a wide cultural context is needed in order to give sense to an algorithm; moreover we state that an algorithm can be considered as an important part of the definition itself of a mathematical concept.

Sommario. Nel presente lavoro sono proposte alcune riflessioni riguardanti alcuni noti algoritmi aritmetici. In particolare, sono considerati l'antica moltiplicazione egiziana per raddoppio e le tecniche basate sull'uso di tabelle comparse, in diversi momenti, in Cina, in India, nel mondo arabo e in Europa. Si sottolinea che quest'ultima tecnica moltiplicativa è essenzialmente basata sulla notazione numerica posizionale e si esamina il comportamento di alcuni studenti (di 12 anni) mediante l'analisi di alcuni protocolli. Con riferimento all'impostazione teorica di Ludwig Wittgenstein, concludiamo che il riferimento primario ad un contesto culturale è necessario per inquadrare il senso di un algoritmo; affermiamo inoltre che un algoritmo può essere considerato come una parte importante della stessa definizione di un concetto matematico.

Numeri e algoritmi con carta e matita

GIORGIO T. BAGNI

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
UNIVERSITÀ DI UDINE

"Vuoi dunque dire che 'essere vero' significa essere utilizzabile (essere utile)? – No, voglio solo dire che della successione naturale dei numeri – così come del nostro linguaggio – non si può dire che è vera, ma soltanto che è utile, e, innanzi tutto, che *viene impiegata*"

Ludwig Wittgenstein (1956, I § 4)

1. INTRODUZIONE

Il termine "algoritmo", com'è noto, si riconduce ad Abu 'Abdallah Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (780?-850?), il matematico autore del trattato (risalente al periodo 813-833) *Hisab al-jabr w'al-muqabala* (titolo dal quale è stato ricavato il termine "algebra"), secondo alcuni originario di Khwarizm, regione a est del Mar Caspio (Uzbekistan). Ma ciò non significa che quanto oggi noi esprimiamo mediante tale parola sia da collegare alla sola matematica araba o, comunque, alle esperienze che seguono il IX secolo: nota J.-L. Chabert che "gli algoritmi sono esistiti dall'inizio dei tempi, ben prima che una parola sia stata coniata per individuarli. Gli algoritmi sono semplicemente un insieme di istruzioni, da seguire passo per passo meccanicamente per ottenere alcuni risultati desiderati" (Chabert, 1998, p. 1, traduzione nostra). Pur riconoscendo che questa non può essere forse considerata una definizione (si può richiedere che un algoritmo abbia caratteristiche specifiche, come notato ad esempio in: Palladino, Lombardi & Palladino, 2005, p. 17), riteniamo opportuno adottare un punto di vista ampio ed evitare ulteriori particolarizzazioni.

Il presente lavoro cercherà di presentare alcune riflessioni sugli algoritmi. Che cosa significa "applicare un algoritmo"? Quali strumenti sono (o possono essere) necessari per farlo? Quali sono i legami con l'aspetto storico-geografico, dunque con i contesti socio-culturali nei quali un algoritmo è stato ideato o perfezionato? Proporremo alcune risposte a tali quesiti attraverso l'illustrazione di un quadro teorico e l'esame (anche didattico) di alcuni noti algoritmi.

2. WITTGESTEIN E LE "REGOLE"

Gli algoritmi, dunque, sono una traccia da seguire per giungere ad una risposta, un insieme (ordinato) di "regole" elaborato con lo scopo di portare l'esecutore ad ottenere un risultato. Le celebri riflessioni di Ludwig Wittgenstein (1889-1951) sull'importante comportamento umano che si indica comunemente con l'espressione "seguire una regola" ci consentiranno di avvicinare il punto centrale della nostra riflessione.

Innanzitutto è necessario chiarire il senso del termine "grammatica", che nella riflessione wittgensteiniana assume un ruolo fondamentale: la grammatica secondo Wittgenstein è una disciplina filosofica che descrive (primariamente) l'uso delle parole nel linguaggio (Wittgenstein, 1969, n. 23); più in generale, "il contenuto di ciò che è chiamato tradizionalmente un 'concetto' coincide con la grammatica della corrispondente espressione linguistica" (Marconi, 2000c, p. 74). L'importanza della grammatica è essenziale anche con riferimento alla matematica (Penco, 2004): un teorema, infatti, al pari di ogni altra verità analitica, esprime per Wittgenstein una regola di grammatica.

Assai importante, a questo punto, è la riflessione sull'essenza e sul ruolo della dimostrazione in matematica: essa non costituisce una sorta di garanzia della verità del teorema, l'elemento che "forza" il singolo o la comunità a riconoscere la verità di quanto espresso nell'enunciato a cui si riferisce. Osserva A.G. Gargani che "la prova in matematica non corrisponde al potere costrittivo di una connessione formale; essa è il modello procedurale che siamo disposti ad accettare e secondo il quale intendiamo operare in una data situazione" (Gargani, 1993, p. 99).

Possiamo piuttosto dire che "la proposizione grammaticale 'la corretta applicazione delle tali e tali regole di trasformazione segnica *deve* condurre al tale risultato' acquista un contenuto definito solo in riferimento a una dimostrazione" (Frascolla, 2000, p. 122; inoltre: p. 132). La dimostrazione (ciò che *deve accadere*) si differenzia dall'esperimento (ciò che *accade*) per l'attribuzione di una funzione normativa e ciò fa riferimento ad una decisione necessariamente comunitaria di considerare corretti i passi della trasformazione segnica che "prova" il risultato considerato (Frascolla, 2000, pp. 137 e 140):

> "*Che* cosa c'è di incrollabilmente certo in ciò che è provato? Riconoscere una proposizione come incrollabilmente certa – voglio dire – significa impiegarla come regola grammaticale: in questo modo è sottratta all'incertezza" (Wittgenstein, 1956, II, n. 39).

Nell’impostazione wittgensteiniana, quindi, la matematica viene ad essere un’attività consistente nella produzione (nell’invenzione) del significato delle espressioni, dei segni, mediante la costruzione di figure paradigmatiche. M. Trinchero sintetizza così l’approccio di Wittgenstein alla matematica: “Per rendere conto della sua intersoggettività e della sua possibilità di interagire col mondo dell’esperienza occorre partire non già dall’analisi delle sue strutture algoritmiche, ma da quella del linguaggio quotidiano, in cui sono depositati gli schemi sui quali costruiamo le nostre conoscenze” (Premessa alla traduzione italiana di: Wittgenstein, 1953, p. XIV). Dunque per il grande filosofo austriaco la considerazione di un algoritmo deve essere preceduta dall’attenzione riservata al linguaggio comune; ma, come vedremo, l’algoritmo è esso stesso espressione di un linguaggio (si veda ad esempio: D’Amore, 1998). A nostro avviso, dunque, si tratta di focalizzare il ruolo dell’aspetto algoritmico, come procedura d’uso, nella costituzione di un significato per gli oggetti, i concetti, i segni (e le regole) della matematica.

Più in generale, Gargani osserva che un simile approccio ha conseguenze notevoli: innanzitutto, “configurando lo statuto epistemologico degli enunciati matematici nei termini di un modello grammaticale di un certo tipo, Wittgenstein dissolveva il problema dei fondamenti della matematica” (Gargani, 1993, p. 100). Inoltre la posizione esaminata esclude evidentemente ogni concezione ispirata al platonismo (Frascolla, 2000, p. 140):

> “È per questa ragione che in matematica non si può fare appello al significato dei segni: perché solo la matematica dà loro un significato” (Wittgenstein, 1956, IV, n. 16).

Consideriamo ora una regola (segnatamente una regola grammaticale, con riferimento alla grammatica nel senso sopra precisato) e analizziamo la pratica che si identifica con l’espressione “seguire una regola”. Wittgenstein specifica:

> “‘Seguire la regola’ è una prassi. E *credere* di seguire la regola non è seguire la regola. E perciò non si può seguire una regola ‘privatim’: altrimenti credere di seguire la regola sarebbe la stessa cosa che seguire la regola” (Wittgenstein, 1953, n. 202).

Questo celebre passo è illuminante: la distinzione tra credere di seguire una regola ed effettivamente seguirla è quella di concepirla come “lo scarto tra il comportamento segnico che l’individuo singolo riconosce come conforme, per definizione, alla regola, e le corrispondenti decisioni grammaticali prese concordemente dai membri della comunità” (Frascolla, 2000, pp. 135-136).

Sulla base di ciò l’aspetto collettivo assume evidentemente un’importanza primaria (Wittgenstein, 1953, n. 206), anche se le molte interpretazioni hanno dato a tale aspetto rilevanza diversa: ad esempio nel seguire la regola, per C.

McGinn, non è tanto necessario un "supporto comunitario", quanto piuttosto il "supporto di un comportamento esternamente osservabile" (Messeri, 2000, pp. 184-185; McGinn, 1984, pp. 43-45). E secondo R. Casati "è possibile possedere un insieme di entità private che non è però possibile utilizzare come un linguaggio. Forse è possibile (ma poco interessante filosoficamente) utilizzare in modo *irrazionale* – per esempio in maniera del tutto casuale – un 'linguaggio' privato; il punto è che tale uso non avrebbe la stabilità che tipicamente associamo al linguaggio" (Casati, 2000, p. 205; i diversi significati attribuibili al termine "privato" sono esaminati in: Ayer, 1954).

S. Kripke (1982) interpreta la posizione wittgensteiniana con riferimento al problema del seguire la regola in chiave scettica: non esiste un fatto come "seguire la regola" e la soluzione scettica di Wittgenstein consiste nell'indicare in quali circostanza noi ascriviamo a qualcuno un comportamento che si indica con l'espressione "seguire la regola" (Messeri, 2000, p. 174). Ovviamente il riferimento alla comunità resta indispensabile: nota infatti M. Messeri che "non ci sono condizioni che giustifichino l'attribuzione di una intenzione significante determinata nel caso di una persona isolata. Nel caso di una persona appartenente a una comunità, invece, le condizioni sono quelle che, in particolare, permettono al maestro di attribuire al bambino una certa competenza linguistica: il fatto che il soggetto ha dato per un periodo sufficientemente lungo risposte sostanzialmente conformi a quelle che gli altri hanno dato" (Messeri, 2000, p. 174; il riferimento è a Kripke, 1982, pp. 27-49).

Interessante è anche la posizione di C. Wright (1980), il quale osserva che, per Wittgenstein, l'impiego di un concetto non può essere determinato del tutto e rigidamente da un bagaglio di esperienza passata; dunque chi apprende il linguaggio, ovvero chi si appresta ad applicare una regola, non mira "ad acquisire per tentativi qualcosa come un sistema oggettivo di applicazioni già tutto definito nella mente dell'istruttore". Il discente, piuttosto, si impegna "a cercare volta per volta il consenso dell'istruttore" (Messeri, 2000, p. 176; e riflettendo su questa interpretazione potremmo essere indotti ad un'interessante rivisitazione della nostra concezione di contratto didattico).

Un elemento importante da considerare è che la comunicazione, comunque, avviene: dunque noi comprendiamo il senso che gli altri attribuiscono alle espressioni che impiegano (con riferimento ad ogni forma di linguaggio), ad esempio a quelle che "definiscono" una regola da seguire. Pertanto è necessario descrivere l'intendere e il seguire la regola come fatti riconoscibili dall'esterno; ma non è possibile possedere individualmente l'intero sistema delle possibili applicazioni corrette di un'espressione, quindi una "comunità di assenso è il solo background che può dare un significato alla consuetudine di trattare le risposte individuali come corrette o scorrette" (Messeri, 2000, pp. 176-177).

Particolarmente rilevante è quindi la seguente osservazione di Messeri: "Un assunto importante è quindi comune a Kripke e a Wright: entrambi ascrivono a

Wittgenstein l'idea – spesso definita *community view* – che il senso dell'intero discorso intorno al seguire la regola presupponga lo sfondo di una pratica intrinsecamente collettiva" (Messeri, 2000, p. 177). Le implicazioni di tale annotazione saranno rilevanti per le considerazioni che elaboreremo nella sezione 4 del presente lavoro (alcuni aspetti dell'impostazione teorica sin qui tratteggiata sono stati ripresi nella didattica della matematica: si veda, ad esempio, la dimensione praxemica in: Chevallard, Bosch & Gascón, 1997).

3. ALGORITMI E ARTEFATTI

Il titolo del presente lavoro fa riferimento esplicitamente ad algoritmi numerici "con carta e matita". Dunque non ci occuperemo, ad esempio, degli algoritmi che richiedono l'uso del computer. Ma ciò non significa che nell'esecuzione della procedura indicata da un algoritmo non siano utilizzati "strumenti"; anzi, lo stesso metodo per l'esecuzione di un'operazione (pensiamo anche alle pratiche più elementari, come l'uso di incolonnare gli addendi di un'addizione) può essere considerato uno "strumento".

A tale proposito è utile richiamare l'impostazione teorica proposta da Bartolini Bussi, Mariotti e Ferri (2005) che si basa sui lavori di Vygotskij (1974 e 1987), di Bachtin (1979 e 1988), di Engestroem (1990) e di Wartofsky (1979): Vygotskij riconosce funzioni di mediazione sia a strumenti tecnici che psicologici (segni o strumenti di mediazione semiotica: Vygotskij, 1974). In particolare, Wartofsky (1979) identifica gli strumenti tecnici come *artefatti primari*; ma non c'è un unico modo di utilizzare uno strumento: gli *artefatti secondari* servono dunque per fissare e trasmettere le modalità di azione.

Le regole e le convenzioni rappresentative possono corrispondere dunque ad artefatti secondari; una teoria matematica, infine, è un *artefatto terziario* che organizza gli artefatti secondari. Si può supporre (Bartolini Bussi, 2002; Bartolini Bussi & Boni, 2003) che gli aspetti pratico, rappresentativo e teorico siano incorporati (potenzialmente) nell'attività che si svolge con l'artefatto che, in tale modo, acquista caratteristiche di *polisemia* (Engestroem, 1990).

In questo lavoro ci occuperemo di alcuni ben noti algoritmi impiegati, nella storia, per l'esecuzione pratica della moltiplicazione di numeri interi positivi. Dopo averne evidenziato il contenuto matematico, cercheremo di riflettere sul loro impiego in qualità di strumenti, senza dimenticare l'aspetto collegato agli artefatti secondari; in particolare, ci concentreremo sul ruolo che gli algoritmi esaminati hanno avuto, nei contesti che hanno caratterizzato i diversi periodi storici, nell'attribuzione di un "significato" per l'"oggetto" matematico che indichiamo con il termine "moltiplicazione", nonché sulle ricadute didattiche collegate a tale situazione.

4. ALGORITMI, REGOLE, STORIA (E GEOGRAFIA)

Uno dei più antichi procedimenti per eseguire la moltiplicazione di numeri interi positivi è il *metodo del raddoppio*, che in alcune sue versioni si riconduce alla matematica egiziana (Loria, 1929-1933).

Eseguiamo, ad esempio, la moltiplicazione 124×35 (in notazione posizionale moderna). Com'è noto, è necessario compilare una tabella a due colonne: nella prima riga si collocano uno dei fattori (124, preferibilmente il maggiore) e 1; le righe successive si ottengono raddoppiando gli elementi corrispondenti delle righe precedenti, finché l'elemento ottenuto nella seconda colonna è non maggiore del secondo fattore (35):

124 ←	**1** ←
248 ←	**2** ←
496 .	4 .
992 .	8 .
1984 .	16 .
3968 ←	**32** ←
4340 .	**35** .

Per ottenere il risultato si individuano nella seconda colonna gli elementi la cui somma è 35, secondo fattore (dunque: $32+2+1 = 2^5+2^1+2^0$). La somma dei corrispondenti elementi della prima colonna (3968+248+124) è il prodotto, 4340. Esaminiamo il calcolo dal punto di vista delle proprietà utilizzate:

$$124\times35 =$$
$$= 124\times(1\times2^5+0\times2^4+0\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0) = 124\times2^5+124\times2^1+124\times2^0 =$$
$$= 3968 + 248 + 124 = 4340$$

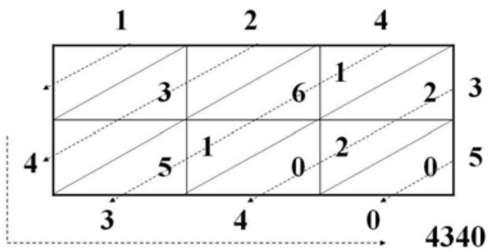
ed è didatticamente interessante osservare il collegamento ideale con la scrittura del fattore 35 in base 2 (100011). L'elemento chiave per la comprensione e la valutazione (anche storica) del metodo è comunque il legame con il carattere additivo della matematica egizia (Loria, 1929-1933): tutta l'operazione si realizza effettuando "raddoppi", cioè addizione di numeri con se stessi, e addizioni. È dunque opportuno notare che tale metodo veniva originariamente applicato con riferimento ad una notazione numerica additiva.

Per evitare il ricorso ai numerali in uso nell'antico Egitto (Picutti, 1977, p. 16), possiamo proporre ai nostri allievi un esempio di applicazione utilizzando i ben noti numerali romani (che tratteremo secondo le convenzioni originali, dunque senza il ricorso, ad esempio, alla diffusa "sostituzione di IV per IIII (…) adottata in epoca vicina a noi": Loria, 1929-1933, p. 124):

CXXIIII ←	**I ←**
CCXXXXVIII ←	**II ←**
CCCCLXXXXVI .	IIII .
DCCCCLXXXXII .	VIII .
MDCCCCLXXXIIII .	XVI .
MMMDCCCLXVIII ←	**XXXII ←**
MMMMCCCXXXX .	**XXXV .**

Un metodo diffuso in molte tradizioni matematiche (ad esempio, presso Arabi, Cinesi, Indiani e nell’Europa medievale: ma gli storici non sono stati finora in grado di determinare l’origine con certezza: Chabert, 1998, p. 21) per calcolare il prodotto di due numeri interi positivi è detto “moltiplicazione per graticola” o “a gelosia” o “a reticolo” o anche “moltiplicazione fulminea” (Bagni, 1996, I, p. 140): il moltiplicando e il moltiplicatore sono scritti ai lati di una tabella rettangolare, all’interno della quale sono disposti i prodotti parziali. Il risultato finale dell’operazione si ottiene sommando diagonalmente quanto scritto nelle caselle, cominciando da destra, senza dimenticare eventuali riporti, e viene letto sui due lati della tabella in cui non sono scritti i fattori.

Eseguiamo nuovamente la moltiplicazione 124×35.



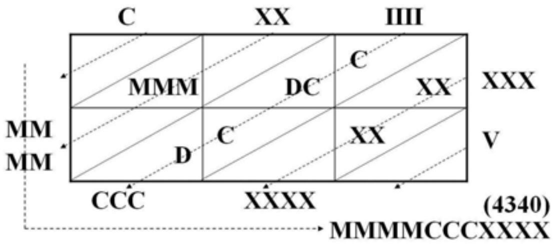
Esaminiamo anche questo procedimento dal punto di vista delle proprietà utilizzate:

$124 \times 35 =$
$= (100+20+4) \times (30+5) = 100 \times 30 + 20 \times 30 + 4 \times 30 + 100 \times 5 + 20 \times 5 + 4 \times 5 =$
$= 1 \times 3 \times 10^{2+1} + 2 \times 3 \times 10^{1+1} + 4 \times 3 \times 10^{0+1} + 1 \times 5 \times 10^{2+0} + 2 \times 5 \times 10^{1+0} + 4 \times 5 \times 10^{0+0} =$
$= 3000 + 600 + 120 + 500 + 100 + 20 = 4340$

Chiaramente il ruolo della tabella è quello di “incolonnare” correttamente i prodotti ottenuti (riconducendo così tutto il calcolo ad operazioni da svolgere sulla tavola pitagorica e a successive addizioni). Già un primo esame del procedimento, dunque, ci consente di evidenziare l’importanza della notazione posizionale nella concezione di questa tecnica moltiplicativa: se scegliamo di considerare uno schema come quello ora presentato nell'ambito degli artefatti, riprendendo la terminologia di Wartofsky (1979), potremmo affermare che la notazione numerica posizionale è un artefatto secondario essenziale.

Ci chiederemo ora (Bagni, 2001): sarebbe possibile e didatticamente utile eseguire la moltiplicazione "per graticola" in notazione additiva?

Un tale tentativo potrebbe portare, ad esempio, alla seguente tabella:

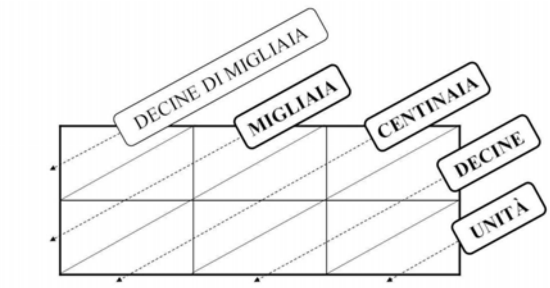


La sola presenza della tabella così compilata non deve ingannare il lettore: non si tratta, infatti, di stabilire la teorica esistenza di una possibile tabella che sintetizzi una moltiplicazione "per graticola" eseguita in notazione additiva. Il problema consiste nel valutare l'effettiva utilità di tale tabella e, dal punto di vista più propriamente didattico, le eventuali difficoltà incontrate dagli allievi nella compilazione di essa.

Alcuni protocolli provenienti da un'esperienza didattica, che esamineremo nella prossima sezione, ci daranno la possibilità di valutare il comportamento degli studenti di fronte ad una moltiplicazione "per graticola" in notazione additiva.

5. L'ESAME DI DUE PROTOCOLLI

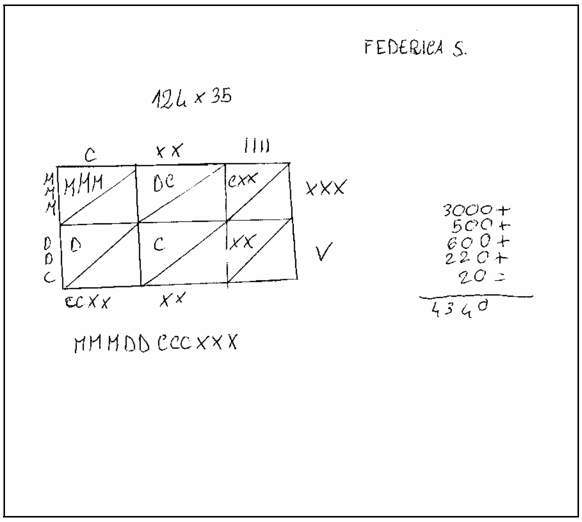
Le tabelle precedenti fanno riferimento ad una struttura che considera ciascuna fascia diagonale (a partire dal basso a destra) con riferimento rispettivamente a unità, decine, centinaia, migliaia e (seppure l'ultima fascia non sia utilizzata) decine di migliaia:



Tale struttura identifica dunque il valore di ogni cifra (con riferimento ai numeri scritti in notazione posizionale). Ma tutto ciò, come sarà confermato dagli esempi che proporremo, viene ad essere inutile nel momento in cui la moltiplicazione "per graticola" è eseguita in notazione numerica additiva.

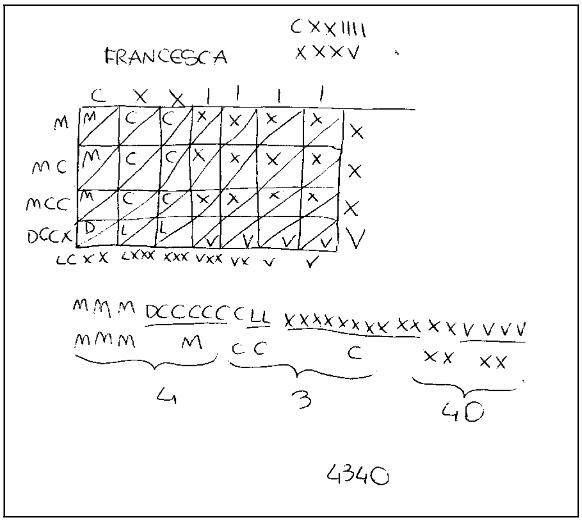
Presenteremo brevemente due protocolli di allieve di I media (Federica e Francesca, 12 anni), chiamate ad eseguire una moltiplicazione "per graticola" utilizzando la notazione numerica additiva romana. Si tratta di un'esercitazione (non valutativa) proposta dall'insegnante di matematica a tutta la classe nel corso di una lezione: gli allievi conoscevano la moltiplicazione "per graticola" e la notazione numerica romana; ad essi è stato assegnato l'esercizio seguente (la traccia è stata scritta alla lavagna dall'insegnante):

Esegui 124×35 "per graticola" utilizzando i numeri romani



Esaminiamo quanto scritto da Federica (nella figura precedente): la tabella rettangolare è stata tracciata sulla base delle analoghe tabelle utilizzate nel caso delle operazioni eseguite in notazione posizionale; tuttavia i prodotti parziali, peraltro corretti, vengono sempre scritti dall'allieva nella prima parte delle caselle. Poi l'operazione viene conclusa addizionando in diagonale ed quindi considerando le somme ottenute, fino a giungere al risultato dell'operazione.

Federica, dunque, ha fatto riferimento ad una tabella con tre colonne e due righe, considerando implicitamente l'usuale scrittura decimale dei fattori dati. Ma l'altra allieva di cui ci occupiamo, Francesca, ha utilizzato una tabella con sette colonne e quattro righe (nella figura seguente), considerando dunque tutti i simboli necessari per scrivere i fattori nella notazione romana (additiva):



Francesca scrive solo il simbolo "V" (corrispondente a 5 = 1×5) nella parte delle caselle tradizionalmente riservata alle unità (nelle ultime quattro caselle in basso): in tutti gli altri casi utilizza l'altra parte delle caselle. L'addizione dei numeri ottenuti è stata successivamente condotta secondo la procedura applicata anche da Federica. Si noti che entrambe le allieve hanno infine ottenuto il risultato esatto (cioè 124×35 = 4340), risultato che è stato controllato mediante due tradizionali moltiplicazioni "in colonna" (velocemente eseguite da Federica su di un piccolo ritaglio di carta e da Francesca, a matita, sul… proprio banco).

Ma quale vantaggio può essere associato, in questi casi, all'esecuzione di una moltiplicazione "per graticola"? La suddivisione di ogni singola casella è priva di senso, come non molto significativa appare l'esecuzione dell'addizione finale distinta in due fasi (si veda il protocollo di Francesca): com'è noto, infatti, un’addizione di numeri in notazione additiva si riduce ad affiancare i simboli corrispondenti agli addendi, operazione alla quale si fa seguire, eventualmente, la semplificazione di simboli ripetuti un numero di volte tale da consentire l’impiego di simboli riferiti a quantità di ordine superiore (cosa che, ad esempio, Federica fa nel passaggio dalla quart’ultima alla terz’ultima riga).

Possiamo pertanto ribadire che la moltiplicazione “per graticola” è stata elaborata in un contesto socio-culturale particolare (il mondo orientale e l’Europa medievale, dove l’importanza delle transazioni commerciali, ad esempio, è ben nota: Swetz, 1987) ed è collegata essenzialmente alla notazione numerica posizionale; si tratta dunque di una “regola” che, per risultare efficace e significativa, deve essere eseguita in un “ambiente” caratterizzato da un approccio sufficientemente evoluto agli oggetti dell’aritmetica: essa richiede insomma il riferimento a determinate convenzioni (potremmo dire a determinati artefatti secondari). L’antica moltiplicazione egiziana “per raddoppio” era invece utilizzabile sia in notazione numerica additiva che posizionale: più precisamente, il passaggio dall’originale ambiente additivo alla più evoluta notazione posizionale non ha comportato, per tale tecnica moltiplicativa, l’insorgere di particolari difficoltà. Queste considerazioni, adeguatamente introdotte dall’insegnante, possono rivelarsi didatticamente utili e stimolanti.

6. RIFLESSIONI CONCLUSIVE

Un algoritmo, così come un qualsiasi altro contenuto matematico (e non solo), viene elaborato in un periodo della storia, in un contesto scientifico e, più in generale, culturale, sulla base di esigenze e di concezioni precise. Pertanto la considerazione del contesto è indispensabile per un corretto approccio all’aspetto storico e per l’efficace applicazione didattica (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri & Garuti, 1997; Radford, 1997 e 2003; Radford, Boero & Vasco, 2000; si veda la discussione in: Gadamer, 2000, pp. 357-359). Come anticipato, lo stesso Wittgenstein afferma che un sistema di concetti deve essere considerato con riferimento ad un ampio contesto culturale:

> “Chi crede che certi concetti siano senz’altro quelli giusti e che colui che ne possedesse altri non si renderebbe conto di quello di cui ci rendiamo conto noi, – potrebbe immaginare certi fatti generalissimi della natura in modo diverso da quello in cui noi siamo soliti immaginarli; e formazioni di concetti diverse da quelle abituali gli diventerebbero comprensibili” (Wittgenstein, 1953, XII).

La prospettiva teorica di Wittgenstein, dunque, ammette che esista un modo di organizzare concettualmente l’esperienza estraneo al nostro schema concettuale e “che tuttavia non abbiamo ragione di considerare meno perfetto quanto a capacità di adattare una vita (la vita di qualcuno) al corso del mondo”

(Messeri, 2000, pp. 190-191; spunti interessanti in tal senso possono essere inoltre ripresi da: Lakoff & Johnson, 1980; Habermas, 1999). A tale proposito, tuttavia, dobbiamo osservare che non possiamo svincolarci dalla nostra tradizione culturale: in un certo senso, "non possiamo non essere etnocentrici, e questa non è una forma di arroganza, perché al contrario arrogante è la pretesa del filosofo metafisico o dell'antropologo liberale e progressista che pretende di disporre di un supervocabolario il quale renderebbe commensurabili i vocabolari delle 'culture altre'" (A.G. Gargani, prefazione a: Rorty, 2003, p. XXIII).

Questo invito ad una corretta contestualizzazione storica e geografica non esaurisce la portata della riflessione didattica che si collega all'esame di alcuni dei più noti algoritmi numerici (realizzabili "con carta e matita"; ma le considerazioni che andiamo ad esporre potrebbero estendersi all'uso di artefatti più sofisticati). Come notato, un algoritmo può essere interpretato come una "regola" e quando proponiamo ai nostri allievi di "seguire una regola" facciamo riferimento ad un comportamento che, secondo le riflessioni di Wittgenstein sopra esposte, deve essere considerato complesso, delicato e profondo.

Abbiamo sopra affermato che un teorema, come ogni verità analitica, esprime una regola di grammatica, dunque si può collegare alla descrizione di un uso; ed un algoritmo, in particolare, viene a riferirsi direttamente ed esplicitamente a questo aspetto pratico. Inoltre, se "il senso dell'intero discorso intorno al seguire la regola" presuppone "lo sfondo di una pratica intrinsecamente collettiva" (citiamo ancora Messeri, 2000, p. 177), diventa importante considerare il ruolo che tale pratica (segnatamente una pratica sociale) può assumere nella definizione stessa di un contenuto matematico.

Quale ricaduta didattica associamo a queste riflessioni? Un punto importante da considerare può essere un approfondimento del significato che un "oggetto" della matematica assume per il discente (o, collettivamente, per i discenti). Che cos'è, per gli allievi della scuola primaria o della secondaria inferiore, una "moltiplicazione"? Potremmo fare riferimento, ad esempio, alla rigorosa forma induttiva della definizione data da Peano ($a\cdot 1 = a$ e $a\cdot(b+1) = ab+a$)?

Per Federica e Francesca la moltiplicazione è probabilmente innanzitutto un'operazione che, all'interno di una comunità d'uso, viene eseguita "in colonna", utilizzando le familiari cifre indo-arabe. Nell'esperienza scolastica l'inusuale moltiplicazione "per graticola" si sovrappone ad essa, ma non costituisce una pratica normalmente usata e dunque non può inserirsi in termini incisivi nella *concept image*, che consente di giungere alla *concept definition* (pur tenendo presente l'importanza degli aspetti legati alle rappresentazioni nella *concept image*: Tall & Vinner, 1981, p. 152; Bagni, in stampa-a e -b; *concept image* e *concept definition* sono introdotte in: Vinner & Hershkowitz, 1980). Di conseguenza lo stesso uso didatticamente indotto (suggerito dalla traccia di un esercizio) può creare perplessità, soprattutto in mancanza della coerenza tra l'algoritmo considerato e l'"ambiente" in cui esso viene applicato: quando spingiamo Federica e Francesca ad eseguire una moltiplicazione "per graticola" con dei numeri in notazione additiva, infatti, snaturiamo l'algoritmo originale. Solo la presenza del risultato corretto (che entrambe le allieve scrivono infine nella familiare notazione indo-araba, come se quest'ultima fosse l'unica a garantire l'efficace comunicabilità dalla "risposta" da dare all'esercizio appena eseguito) assicura che l'applicazione del procedimento è accettabile. La correttezza del risultato, come abbiamo osservato, viene accettata soltanto dopo il rassicurante confronto con l'operazione eseguita "in colonna".

Dunque all'aspetto storico-geografico ("che cos'era" una moltiplicazione per uno scriba egiziano o per un matematico arabo) si sovrappone l'aspetto didattico ("che cos'è", oggi, in una concreta aula scolastica, una moltiplicazione per Federica e per Francesca). Da entrambi questi punti emerge che gli algoritmi, e più in generale gli artefatti (tecnici ovvero psicologici, primari o secondari), sono stati (nella storia) e sono (nelle nostre aule) inscindibilmente collegati al contenuto matematico che contribuiscono ad esprimere: finiscono dunque per essere una parte tutt'altro che trascurabile della sua stessa "definizione".

Concludiamo osservando che le considerazioni precedenti non intendono negare la validità di un confronto critico: la scelta di proporre agli allievi un algoritmo sia in notazione additiva che in notazione posizionale può consentire di evidenziare in modo incisivo proprio gli aspetti matematici che legano una procedura alle caratteristiche dell'"ambiente" matematico nell'ambito del quale applicarla. Naturalmente la fase di chiarimento (di istituzionalizzazione) da parte dell'insegnante assume, in tale caso, una particolare rilevanza.

Bibliografia

Ayer, A.J.: 1954, Can there be a private language? *Proceedings of the Aristotelian Society*, Suppl. 28, 63-76 (Shanker, V.A. & Shanker, S.G., Eds., *Ludwig Wittgenstein: critical assessments*. Croom Helm, London 1986, II, 239-248).

Bachtin, M.: 1979, *Estetica e romanzo*. Einaudi, Torino.

Bachtin, M.: 1988, *L'autore e l'eroe. Teoria letteraria e scienze umane*. Einaudi, Torino.

Bagni, G.T.: 1996, *Storia della matematica*, I-II. Pitagora, Bologna.

Bagni, G.T.: 2001, Dalla Storia alla Didattica della Matematica, Callegarin, G. (Ed.), *Atti del Convegno "La Matematica è difficile?" Adria, 10 maggio 2001*, 19-30.

Bagni, G.T.: in stampa-a, Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of Set Theory. *Educational Studies in Mathematics.*

Bagni, G.T.: in stampa-b, Historical roots of limit notion. Development of its representative registers and cognitive development. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*.

Bartolini Bussi, M.G. & Boni, F.: 2003, Instruments for semiotic mediation in primary school classrooms. *For the Learning of Mathematics*, 23(2), 12-19.

Bartolini Bussi, M.G., Mariotti, M.A. & Ferri, F.: 2005, Semiotic mediation in primary school: Dürer's glass. Hoffmann, M.H.G., Lenhard, J. & Seeger, F. (Eds.), *Activity and sign. Grounding mathematics education. Festschrift for Michael Otte*. Springer, New York, 77-90.

Bartolini Bussi, M.G.: 2002, The theoretical dimension of mathematics: a challenge for didacticians. *Proc. 2000 (24th) Annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, Montreal, 21-31.

Casati, R.: 2000, Il linguaggio psicologico. Marconi, D. (Ed.), *Guida a Wittgenstein*. Laterza, Roma-Bari, 193-240.

Chabert, J.-L. (Ed.): 1998, *A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip*. Springer, Berlin-Heidelberg (edizione originale: *Histoire d'algorithmes. Du caillou à la puce*. Belin, Paris 1994).

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J.: 1997, *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje*. ICE/Horsori, Barcelona.

D'Amore, B.: 1998, La crisi di identità e di valori nella essenza e nella fenomenologia della conoscenza matematica. *Encyclopaideia*, 2, 77-90.

Engestroem, Y.: 1990, When is a tool? Multiple meanings of artifacts in human activity. *Learning, working and imagining: twelwe studies in activity theory*, Orienta-Konsultit Oy, Helsinki, 171-195.

Frascolla, P.: 2000, Filosofia della matematica. Marconi, D. (Ed.). *Guida a Wittgenstein*. Laterza, Roma-Bari, 103-150.

Gadamer, H.G.: 2000, *Verità e metodo*. Bompiani, Milano.

Gargani, A.G.: 1993, *Introduzione a Wittgenstein*. Laterza, Bari-Roma.

Habermas, J.: 1999, *Wahrheit und Rechtfertigung. Philosophische Aufsätze*. Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Mein (*Truth and Justification*. MIT Press, Cambridge 2003; *Verità e giustificazione*. Laterza, Roma-Bari 2001).

Kripke, S.: 1982, *Wittgenstein on rules and private language*. Blackwell, Oxford (Boringhieri, Torino 1984).

Lakoff, G. & Johnson, M.: 1980, *Metaphors we live by*. University of Chicago Press, Chicago IL (*Metafora e vita quotidiana*. Bompiani, Milano 1998).

Lolli, G.: 1974, *Teoria assiomatica degli insiemi*. Boringhieri, Torino.

Loria, G.: 1929-1933, *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*. Sten, Torino (reprint: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982).

Marconi, D. (Ed.): 2000a, *Guida a Wittgenstein*. Laterza, Roma-Bari.

Marconi, D.: 2000b, Il Tractatus. Marconi, D. (Ed.). *Guida a Wittgenstein*. Laterza, Roma-Bari, 15-58.

Marconi, D.: 2000c, Transizione. Marconi, D. (Ed.). *Guida a Wittgenstein*. Laterza, Roma-Bari, 59-102.

Mariotti, M.A., Bartolini Bussi, M.G., Boero, P., Ferri, F. & Garuti, R.: 1997, Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. *Proceedings of PME-21*, Lathi, Finland, I, 180-195.

McGinn, C.: 1984, *Wittgenstein on meaning. An interpretation and evaluation*. Blackwell, Oxford.

Messeri, M.: 2000, Seguire la regola. Marconi, D. (Ed.), *Guida a Wittgenstein*. Laterza, Roma-Bari, 151-192.

Palladino, F., Lombardi, L. & Palladino, N.: 2005, *Algoritmi elementari del calcolo algebrico e aritmetico. Tradizione e modernità*. Pitagora, Bologna.
Penco, C.: 2004, *Introduzione alla filosofia del linguaggio*. Laterza, Roma-Bari.
Picutti, E.: 1977, *Sul numero e la sua storia*. Feltrinelli, Milano 1977.
Radford, L.: 1997, On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching of Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33.
Radford, L.: 2003, On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought. Anderson, M. & Al. (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*, 49-79, Legas, Ottawa.
Radford, L., Boero, P. & Vasco, C.: 2000, Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics. Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education*, 162-167, Kluwer, Dordrecht.
Rorty, R.: 2003, *La filosofia dopo la filosofia*. Laterza, Roma-Bari (edizione originale: *Contingency, irony, and solidarity*. Cambridge University Press, Cambridge).
Swetz, F.J.: 1987, *Capitalism & Arithmetic*. Open Court, La Salle IL.
Tall, D. & Vinner, S.: 1981, Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-69.
Vinner, S. & Hershkowitz, R.: 1980, Concept Images and some common cognitive paths in the development of some simple geometric concepts. *Proceedings of PME-4*, Berkeley, 177-184.
Vygotskij, L.S.: 1974, *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori e altri scritti*. Giunti, Firenze.
Vygotskij, L.S.: 1987, *Il processo cognitivo*. Boringhieri, Torino.
Wartofsky, M.: 1979, Perception, representation and the forms of action: towards an historical epistemology. *Models. Representation and the scientific understanding*, Reidel, Dordrecht.
Wittgenstein, L.: 1953, *Philosophische Untersuchungen*. Blackwell, Oxford (*Ricerche filosofiche*. Einaudi, Torino 1999).
Wittgenstein, L.: 1956, *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Blackwell, Oxford (*Osservazioni sopra i fondamenti della matematica*. Einaudi, Torino 1971).
Wittgenstein, L.: 1969, *Philosophische grammatik*. Blackwell, Oxford (*Grammatica filosofica*. La Nuova Italia, Firenze 1990).
Wright, C.: 1980, *Wittgenstein on the Foundations of Mathematics*. Duckworth, London.