Atti e Memorie dell'Ateneo di Treviso (in via di pubblicazione)

Logica e dimostrazione

GIORGIO T. BAGNI

SOCIO ORDINARIO DELL'ATENEO DI TREVISO - DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DI ROMA "LA SAPIENZA"

Introduzione

> «Una delle domande più imbarazzanti che possano venir rivolte ad un matematico è chiedergli di che cosa si occupa. Per fortuna la maggior parte delle persone crede che un matematico impieghi il suo tempo facendo lunghissime somme o divisioni a cento cifre, e quindi questa domanda non è molto frequente».
>
> E. Giusti
> (Giusti, 1999, p. 15)

> «La matematica è una disciplina che gode della singolare proprietà di ispirare sentimenti ed opinioni estremamente contrastanti: è amata o odiata, considerata di facile o difficile comprensione, viva e stimolante o arida e scostante. Ma tutti hanno di essa una forte immagine».
>
> C. Fiori & C. Pellegrino
> (Fiori & Pellegrino, 1997, p. 428; con rif. a: Furinghetti, 1993)

Le radici storiche della Matematica e della Logica affondano nell'antichità; ed altrettanto antica è la stretta connessione tra le due discipline. Scrive a tale proposito P. Freguglia:

«Il rapporto fra logica e matematica si risolve nella cultura greca in termini di reciproca indipendenza tecnica e dipendenza metodologica della matematica dalla logica, nel senso che l'edificazione teorica della prima ha bisogno dei metodi e degli strumenti della seconda» (Freguglia, 1978, p. 4).

La consapevolezza del legame tra la Matematica e la Logica si è progressivamente perfezionata nel corso dei secoli, fino alla precisazione del programma logicista, tra la fine del XIX secolo e l'inizio del XX (D'Amore & Matteuzzi, 1975; Bagni, 1997). Scrive Bertrand Russell (1872-1970):

«La matematica e la logica, dal punto di vista storico, sono state due discipline completamente distinte. Comunque tutte e due si sono sviluppate nell'età moderna: la logica diventando sempre più matematica e la matematica sempre più logica. La conseguenza è che ora è completamente impossibile tracciare tra le due discipline una linea di demarcazione; sostanzialmente le due sono in realtà una disciplina sola» (Russell, 1970, p. 226).

Da ciò si giunge ad una domanda centrale, dalle chiare implicazioni filosofiche, epistemologiche e didattiche: «Siamo così portati a porci un problema: che cosa è questo soggetto che può essere chiamato matematica o logica? Esiste un modo per definirlo?» (Russell, 1970, p. 229).

Come accennato, la posizione di Russell si inquadra naturalmente in una delle scuole di pensiero che hanno caratterizzato il XX secolo[1]: il *logicismo* è spesso ricondotto all'opera del matematico e filosofo inglese (sebbene talvolta gli storici indichino il logicismo accomunando i nomi di Leibniz, Frege e Russell: Bochenski, 1972); il programma logicista può essere sintetizzato nel tentativo di ricondurre l'intera Matematica alla Logica, ma la presenza delle antinomie mise in difficoltà questo progetto: i tentativi di eludere la formazione delle antinomie portarono a teorie profonde (teorie dei

---

[1] Citiamo ancora Russell: «Si dice spesso che la matematica è la scienza delle "quantità", Veramente la parola "quantità" è vaga, e per dicutere l'affermazione fatta possiamo sostituirla con la parola "numero". Ora, l'affermazione che la matematica è la scienza dei numeri è falsa da due punti di vista differenti. Da un lato, esistono intere parti della matematica che non hanno nulla a che fare con i numeri (…) D'altro lato (…) ciò che in un primo momento costituiva il semplice studio dell'aritme tica si è andato gradatamente dividendo in una molteplicità di discipline separate, nessuna delle quali particolarmente legata ai numeri» (Russell, 1970, pp. 227-228. Inoltre: Russell, 1963).

tipi semplici e ramificati), anche se nessuna di queste, tuttavia, riuscì a risolvere in modo esauriente il problema (Lolli, 1985). Si consideri, ad esempio, quello che stabiliva Russell nel 1902:

«La matematica pura è l'insieme di tutte le proposizioni della forma "*p* implica *q*", dove *p* e *q* sono proposizioni che contengono una o più variabili, né *p* né *q* contenendo costanti che non siano costanti logiche. Le costanti logiche sono concetti che si possono definire nei termini di: implicazione, relazione di un termine ad una classe di cui è membro, nozione di 'tale che', nozione di relazione, ed ogni altro concetto implicito nella nozione generale delle proposizioni della forma precedente. Oltre a questi, la matematica usa un concetto che non fa parte delle proposizioni che essa considera, vale a dire la nozione di verità (…) Il fatto che tutta la matematica sia logica simbolica è una delle scoperte più importanti della nostra epoca; una volta stabilita questa circostanza, ciò che resta dei principi della matematica consiste nell'analisi della logica simbolica stessa» (traduzione in: Cantini, 1979, pp. 118-119 e 120).

Indipendentemente dalla collocazione storico-filosofica della posizione di Russell, dunque, è evidente come i *teoremi* e le loro *dimostrazioni* costituiscano una parte centrale della Matematica.

Ricavo e dimostrazione

> «Si deve sottolineare che le inferenze tratte dalle osservazioni e in seguito incorporate in una teoria non hanno carattere deduttivo. Per lo più esse ricadono in tre categorie: induzione, ipotesi o analogia; tutte hanno radici in campi extrascientifici, come abitudini, tradizioni, ideali estetici o ideologie».
>
> J.M. Jauch
> (Jauch, 1996, p. 12)

Spesso, in celebri scritti della storia della matematica come nella ricerca contemporanea e nella pratica didattica, ricorrono termini come "ricavo", "verifica", "dimostrazione". Talvolta essi sono (implicitamente o esplicitamente) considerati alla stregua di sinonimi, assunzione generalmente scorretta che può portare a notevoli difficoltà, ad esempio in ambito didattico.

Consideriamo un esempio introduttivo: la ricerca delle soluzioni dell'equazione diofantea:

$$x^2+y^2 = z^2 \qquad [1]$$

Mediante le formule seguenti è possibile trovare infinite soluzioni intere (*terne pitagoriche*):

$$x = 2ab \quad \wedge \quad y = a^2-b^2 \quad \wedge \quad z = a^2+b^2 \qquad [2]$$

(essendo a, b parametri interi)[2]. Un'immediata verifica del fatto che tali formule forniscono terne pitagoriche si ottiene calcolando direttamente:

$$x^2+y^2 = 4a^2b^2+(a^2-b^2)^2 = a^4+2a^2b^2+b^4 = (a^2+b^2)^2 = z^2 \qquad [3]$$

Ovviamente la verifica diretta ora proposta non può essere considerata un *ricavo* delle formule in questione. In altri termini, affinché una verifica di tali formule abbia senso, e sia didatticamente proponibile, è indispensabile che esse siano note, siano state precedentemente intuite.

Si osservi che formule [2] possono essere ricavate nell'ambito della geometria analitica considerando l'intersezione della circonferenza di raggio unitario avente centro nell'origine degli assi e di una retta passante per il punto di coordinate (0; −1) con il coefficiente angolare t non nullo:

$$\text{o} \qquad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y+1=tx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+(tx-1)^2=1 \\ y=tx-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2t}{t^2+1} \\ y=\dfrac{t^2-1}{t^2+1} \end{cases} \quad \text{e se: } t=\frac{a}{b}:$$

---

[2] Tali formule si trovano nel Problema I del VI libro dell'*Aritmetica* di Diofanto di Alessandria, vissuto tra il 250 e il 350 d.C.; formule del tutto analoghe ad esse, ma con la posizione $b = 1$, sono attribuite a Platone, 427-347 a.C. (Kline, 1991, I; Bagni, 1996, I).

$$\begin{cases} x = \dfrac{2\dfrac{a}{b}}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+1} \\ y = \dfrac{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2-1}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^2+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2ab}{a^2+b^2} \\ y = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2} \end{cases} \text{ e in coordinate omogenee: } \begin{cases} x = 2ab \\ y = a^2-b^2 \\ z = a^2+b^2 \end{cases} \quad \nu$$

Quello ora accennato è un procedimento per ricavare le formule [2], ma presuppone alcune conoscenze non del tutto banali. Più elegante e più semplice è il procedimento seguente.

o Cercheremo le soluzioni intere dell'equazione [1] supponendo che il MCD(x; y; z) sia 1 (ciò non è restrittivo). Tale assunzione comporta che x e y non siano entrambi pari, in quanto se lo fossero risulterebbe pari anche z, contro l'ipotesi che vuole 1 il MCD(x; y; z). Inoltre x, y non possono essere entrambi dispari; se così fosse, ovvero se $x = 2m+1$ e $y = 2n+1$, avremmo:

$$z^2 = (2m+1)^2+(2n+1)^2 = 2(2m^2+2n^2+2m+2n+1)$$

ovvero z^2 risulterebbe il doppio di un numero dispari: ciò sarebbe impossibile (in quanto tale numero, avendo uno ed un solo fattore 2, non sarebbe un quadrato). Scriviamo quindi:

$$x = 2\alpha \quad \wedge \quad y = 2\beta+1 \quad \Rightarrow \quad 4\alpha^2 = z^2-y^2 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = \frac{z+y}{2}\cdot\frac{z-y}{2}$$

Mostriamo ora che $\dfrac{z+y}{2}$ e $\dfrac{z-y}{2}$ devono essere coprimi; se infatti così non fosse, risulterebbe:

$$\frac{z+y}{2} = pq \quad \wedge \quad \frac{z-y}{2} = ps \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = p(q+s) \\ z = p(q-s) \end{cases}$$

contro l'ipotesi che sia 1 il MCD(x; y; z). Abbiamo, con le opportune posizioni:

$$\begin{cases} \dfrac{z+y}{2} = a^2 \\ \dfrac{z-y}{2} = b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2ab \\ y = a^2-b^2 \\ z = a^2+b^2 \end{cases} \quad \nu$$

Abbiamo "ricavato" la soluzione del problema: non è necessaria una previa conoscenza della formula da dimostrare; la soluzione del problema viene "costruita" partendo dalla posizione del problema stesso e il procedimento costruttivo costituisce la dimostrazione del risultato.

Chiaramente procedimenti come questo sono spesso più impegnativi di una verifica diretta.

Dimostrazione e ricerca nella storia della Matematica

> «Inizialmente, la Geometria ha a che fare con sensazioni, esperienze e osservazioni 'esterne', di tipo sensomotorio (la fonte dell'Aritmetica e della Logica è in qualche modo più "interna" a noi stessi); procede poi per razionalizzazioni successive di queste prime osservazioni».
>
> F. Speranza
> (Speranza, 1987, p. 16).

Il *metodo di esaustione*[3] è opera di uno dei più importanti matematici del mondo greco, Eudosso di Cnido (408?-355? a.C.). Una dimostrazione di un risultato con il metodo di esaustione deve essere

[3] Tutte le sue opere sono andate perdute e l'attribuzione di risultati a Eudosso è sempre indiretta: per l'esaustione, decisiva è la testimonianza di Euclide. Il termine "esaustione" fu introdotto nel XVII secolo (Kline, 1991; Bagni, 1996).

preceduta dalla ricerca euristica della tesi, condotta mediante tecniche diverse (ad esempio concettualmente vicine al seicentesco metodo degli indivisibili). Tali tecniche erano talvolta basate sull'intuizione e dunque non erano considerate sufficienti a garantire la verità del risultato. Individuata la tesi, la dimostrazione rigorosa, per assurdo, era condotta con il metodo di esaustione propriamente detto (Frajese, 1969, pp. 266-273). Illustriamo quanto ricordato con alcuni esempi.

Il metodo di esaustione è basato sul *postulato di Eudosso*, secondo il quale date due grandezze qualsiasi esiste un multiplo della minore che supera la maggiore. L'ovvietà di tale affermazione è solo apparente: *non* tutte le classi di grandezze omogenee sono anche archimedee, cioè rispettano tale postulato (detto di Eudosso-Archimede)[4]. L'enunciato della *proprietà di esaustione*:

Proposizione 1 del X libro. [Assumendosi come] date due grandezze diseguali, se si sottrae dalla maggiore una grandezza maggiore della metà, dalla parte restante un'altra grandezza maggiore della metà, e così si procede successivamente, rimarrà una grandezza che sarà minore della grandezzaminore [inizialmente] assunta (Euclide, 1970, p. 596).

La prima dimostrazione per esaustione negli *Elementi* è la seguente (Euclide, 1970, p. 931):

Proposizione 2 del XII libro. I cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri.

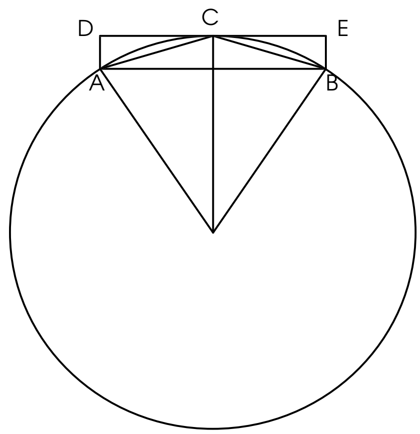

Fig. 1

o Siano c e C i due cerchi assegnati, rispettivamente di diametri d e D e di aree a e A. Vogliamo provare che: $\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$. Per quanto detto, dobbiamo escludere le possibilità $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$ e $\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$.

- Ammettiamo innanzitutto che sia: $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$. Deve esistere una grandezza $a' < a$ tale che: $\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2}$. Consideriamo ora la grandezza $a - a'$ e i poligoni regolari di n lati di area p_n e P_n rispettivamente inscritti in c ed in C. Osserviamo che le aree delle parti di piano interne ai cerchi ma esterne ai poligoni inscritti si ridurrebbero a meno della metà se raddoppiassimo il numero dei lati.

Infatti, passando dal segmento circolare di base AB alla coppia di segmenti circolari congruenti di base AC e CB abbiamo 'tolto' dal segmento circolare considerato il triangolo isoscele ABC; la parte tolta è maggiore della metà del segmento circolare di base AB, essendo ABC la metà del rettangolo ABED, il quale a sua volta è maggiore del segmento circolare di base AB. Pertanto, in base alla proprietà di esaustione, è possibile ridurre tali aree fino a scrivere (con riferimento alla grandezza $a - a'$): $a - p_n < a - a' \Rightarrow p_n > a'$.

[4] Ad esempio, l'insieme costituito dagli angoli rettilinei e curvi linei (compresi, cioè, gli angoli di contingenza) *non* è una classe di grandezze archimedee (Carruccio, 1971).

In base al lemma secondo il quale il rapporto di due poligoni simili inscritti in due cerchi è uguale al rapporto dei quadrati dei diametri dei cerchi circoscritti (proposizione 1 del XII libro), è $\frac{p_n}{P_n} = \frac{d^2}{D^2}$, da cui, essendo $\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2}$, segue $\frac{p_n}{P_n} = \frac{a'}{A}$. Se, come abbiamo sopra provato, è $p_n > a'$, risulta infine $P_n > A$. Ma ciò è assurdo, non potendo essere l'area di un poligono inscritto in un cerchio maggiore dell'area del cerchio stesso. Pertanto è escluso che sia: $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$.

In modo analogo giungiamo ad escludere anche la possibilità: $\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$.

Non ci resta che concludere con la tesi: $\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$ ν [5]

Ad Archimede di Siracusa (287-212 a.C.), uno degli scienziati più importanti ed originali del mondo greco e di tutta la storia del pensiero umano, è dovuto il perfezionamento applicativo del metodo di esaustione. Il ruolo essenziale di tale metodo nella ricerca archimedea era quello di garantire i risultati inizialmente intuiti empiricamente, cioè di *conferire il definitivo rigore alle loro dimostrazioni* (D'Amore & Matteuzzi, 1976, pp. 52-53). Ma sottolineiamo nuovamente l'aspetto fondamentale: la dimostrazione per esaustione non ha *mai* valore euristico (in Archimede né altrove: Castelnuovo, 1938, p. 29). Con tale metodo, Archimede *dimostrava* un risultato che doveva essere *già* supposto, intuito mediante altri procedimenti (Rufini, 1926; Archimede, 1974).

Un classico risultato archimedeo riguarda il volume di un paraboloide di rotazione; dimostreremo, illustrando il metodo di esaustione in notazione moderna, che il volume del segmento di paraboloide rotondo è la metà di quello del cilindro circoscritto (cioè avente la stessa base e la stessa altezza).

o Consideriamo una parabola ed una sua corda BC ortogonale all'asse e distante a dal vertice.

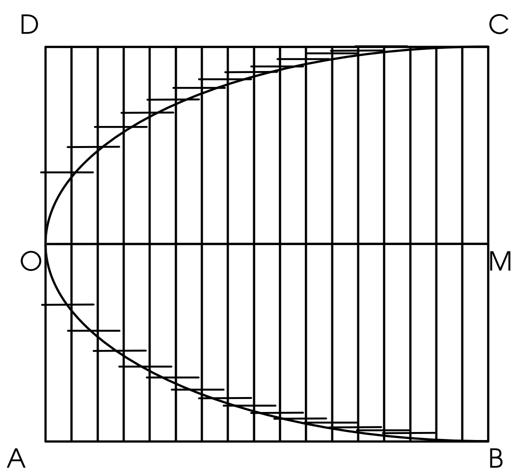

Fig. 2

[5] Gerolamo Saccheri (1667-1733) in *Euclides ab omni naevo vindicatus*, così commentò l'argomentazione degli *Elementi*: «Euclide ha già dimostrato (prop. 1) che due poligoni simili, inscritti in due cerchi, stanno tra loro come i quadrati dei loro diametri; proposizione da cui, come corollario, avrebbe potuto ricavare la 2 considerando i cerchi come poligoni infinitilateri» (Saccheri, 1904, p. 104). A proposito di questa affermazione, A. Frajese osserva: «Saccheri è evidentemente assai vicino, nel tempo, alla fondazione del calcolo infinitesimale! Ma è proprio per evitare il ricorso all'infinito in questo modo che Eudosso di Cnido, il rigorizzatore della matematica greca, l'imbrigliatore dell'infinito, escogitò quel metodo che i posteri tardi dissero *metodo di esaustione*» (Euclide, 1970, p. 931). Una caratteristica specifica ed importante delle dimostrazioni per esaustione, infatti, è la seguente: in esse non troviamo mai un procedimento che corrisponda formalmente ad un moderno passaggio al limite (Kline, 1991, pp. 99-100).

Sia tale parabola espressa dall'equazione $x = y^2$ in un riferimento cartesiano avente l'asse delle ascisse coincidente con l'asse della parabola e l'asse delle ordinate coincidente con la retta AD tangente alla parabola nel vertice O.

Sia M il punto medio di BC; suddividiamo OM in n parti e sia ciascuna di esse h; risulta pertanto $\frac{1}{n} \cdot a = h$. Per i punti così ottenuti su OM tracciamo le corde perpendicolari all'asse della curva e consideriamo i rettangoli inscritti e circoscritti alla parabola. La rotazione completa della figura attorno all'asse OM porta alla considerazione di un segmento di paraboloide e di due scaloidi s_n e S_n, rispettivamente inscritto e circoscritto al paraboloide. Per i volumi di tali scaloidi, scriviamo:

$$s_n = \pi\left(\sqrt{h}\right)^2 h + \pi\left(\sqrt{2h}\right)^2 h + ... + \pi\left(\sqrt{(n-1)h}\right)^2 h = \pi h^2(1+2+...+n-1) = \frac{\pi h^2 (n-1)n}{2}$$

$$S_n = \pi\left(\sqrt{h}\right)^2 h + \pi\left(\sqrt{2h}\right)^2 h + ... + \pi\left(\sqrt{nh}\right)^2 h = \pi h^2(1+2+...+n) = \frac{\pi h^2 n(n+1)}{2}$$

$$s_n = \frac{\pi h^2 n^2}{2} - \frac{\pi h^2 n}{2} = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{\pi h^2 n^2}{2n} = \frac{\pi a^2}{2} - \frac{\pi a^2}{2n}$$

$$S_n = \frac{\pi h^2 n^2}{2} + \frac{\pi h^2 n}{2} = \frac{\pi a^2}{2} + \frac{\pi h^2 n^2}{2n} = \frac{\pi a^2}{2} + \frac{\pi a^2}{2n}$$

Se con V indichiamo il volume del segmento parabolico, risulta:

$$s_n < \mathrm{V} < S_n \qquad \text{ed anche:} \qquad s_n < \frac{\pi a^2}{2} < S_n$$

$S_n - s_n = \frac{\pi a^2}{n}$, per n opportuno, è *arbitrariamente* piccolo: $\mathrm{V} = \frac{\pi a^2}{2}$, dunque il volume V del segmento di paraboloide rotondo è la metà del volume (πa^2) del cilindro ad esso circoscritto. ν (Carruccio, 1972, pp. 168-170).

Se una fase della storia dei metodi infinitesimali può essere individuata nell'impiego sistematico del metodo di esaustione, quasi venti secoli dopo gli studi archimedei a tale procedimento si sostituì il *metodo degli indivisibili*, nato dalle ricerche di Johannes Kepler (1571-1630), Bonaventura Cavalieri (1598-1647), Gilles Personne de Roberval (1602-1675) ed Evangelista Torricelli (1608-1647)[6]. P. Dupont scrive:

«Nel XVII secolo, la matematica cambia volto. I procedimenti archimedei sono ineccepibili, ma sono ingombranti. Si vuol procedere più speditamente. Nasce un'analisi infinitesimale agile ma su basi fragilissime. La disinvoltura prende il posto del rigore. Gli indivisibili (…) sostituiscono il metodo di esaustione» (Dupont, 1981, p. 36).

La proposizione sulla quale si basa il metodo degli indivisibili è il *principio di Cavalieri*, secondo il quale se due solidi sono compresi tra due piani paralleli (hanno uguale altezza) e se le sezioni tagliate da piani paralleli alle basi ed ugualmente distanti da queste stanno sempre in un fissato rapporto, allora anche i volumi di tali solidi stanno in tale rapporto[7]. Per una semplice

[6] Il metodo degli indivisibili può inizialmente riferirsi ad una frase di Leonardo da Vinci (1452-1519) riportata nel *Codice Atlantico*: «Questa tal prova resta persuasiva immaginando esser diviso il circolo in strettissimi paralleli, a modo di sottolissimi capelli in continuo contatto fra loro» (Arrigo & D'Amore, 1992, p. 72).

[7] Nota E. Carruccio: «Questo principio si dimostra facilmente quando si sia già in possesso dell'attuale analisi infinitesimale; infatti equivale a dire che due integrali definiti, tra gli stessi limiti d'integrazione, aventi uguali funzioni integrande, sono uguali; e inoltre una costante moltiplicativa può portarsi indifferentemente dentro o fuori dal segno di integrazione. Ma Cavalieri non disponeva ancora di un'analisi infinitesimale algoritmicamente sistemata» (Carruccio, 1972, p. 179). N. Bourbaki afferma: «Verosimilmente questi principi sono stati suggeriti a Cavalieri da teoremi, quali ad esempio quello di Euclide (o piuttosto di Eudosso) sul rapporto dei volumi di piramidi aventi la stessa altezza, e prima di enunciarli in modo generale egli volle verificarne la validità su di un grande numero di esempi presi da Archimede» (Bourbaki, 1963, p, 186).

visualizzazione piana del metodo si consideri la Fig. 3: Se per ogni retta *s* parallela alle *a*, *b* e compresa tra di esse le intersezioni delle figure F e G con la *s* hanno la stessa lunghezza, allora F e G sono equivalenti.

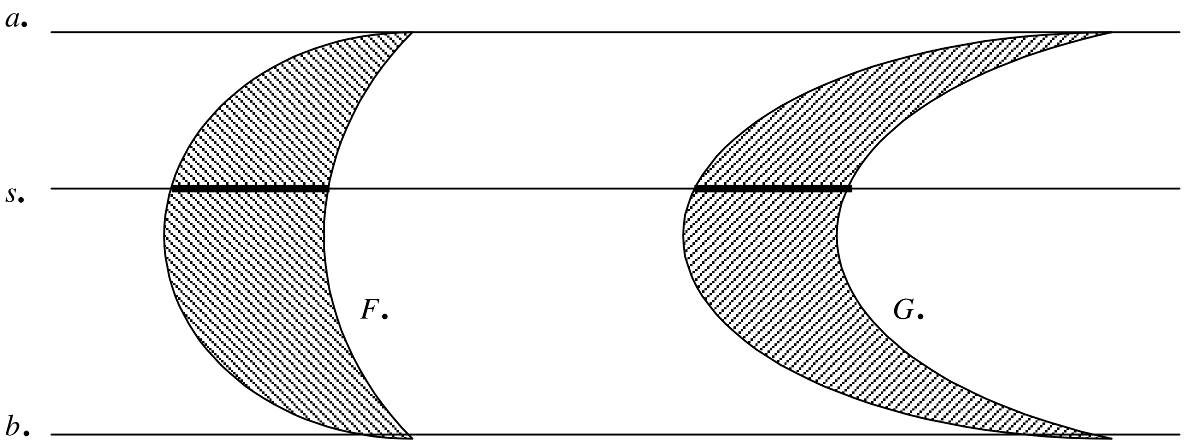

Fig. 3

Storicamente interessante è osservare che Cavalieri ben conosceva il metodo di esaustione, ma mostrò di ritenere il proprio metodo degli indivisibili superiore ad esso (Cavalieri, 1989, p. 256). Tale convincimento era probabilmente determinato dal fatto che nel metodo di esaustione è essenziale la dimostrazione per assurdo, mentre il metodo degli indivisibili porta a realizzare delle dimostrazioni costruttive, preferite da Cavalieri[8].

Le applicazioni pratiche delle intuizioni cavalieriane sugli indivisibili superano certamente le limitate potenzialità del metodo di esaustione; tuttavia, non essendo ancora sorrette da un adeguato impianto concettuale e formale, tali intuizioni finirono per costituire una teoria intuitiva, ma non del tutto rigorosa[9]: Cavalieri riprese inconsapevolmente proprio le tecniche che lo stesso Archimede aveva impiegato per ricavare informalmente i propri risultati (forse in ciò preceduto anche da Democrito), dimostrati poi con il metodo di esaustione.

La fondazione dell'analisi nel XVII secolo portò ad una rivoluzione rispetto all'impostazione ellenica: i metodi infinitesimali archimedei erano basati sull'intuizione dell'integrazione; nelle opere di Newton e di Leibniz era invece la *differenziazione* ad essere considerata l'operazione analitica principale e proprio da questa impostazione derivò una nuova flessibilità operativa.

Un'altra considerazione si impone nel raffronto tra le impostazioni archimedea e newtoniana: la rivalutazione del Siracusano che ebbe luogo tra la fine del XVI e la metà del XVII secolo (Giusti, 1993) è da attribuire proprio alle dimostrazioni rigorose, alle applicazioni del metodo di esaustione:

---

[8] La preferenza per le dimostrazioni costruttive risulta evidente dall'esame dell'intero corpus delle dimostrazioni cavalieriane (Cavalieri, 1989): egli fece uso della dimostrazione per assurdo soltanto in un'occasione, per il teorema XXII del II libro della *Geometria indivisibilibus continuorom*; ma non si ritenne soddisfatto da tale prova per assurdo ed alcuni anni dopo, nelle *Exercitationes geometricae sex*, riprese il teorema citato e riuscì a dare di esso una dimostrazione diretta (Cavalieri, 1989, p. 256).

[9] Il metodo di esaustione entrò inoltre nella polemica sugli indivisibili tra Cavalieri e Paul Guldin (lat. Guldino, 1577-1643). In risposta ad alcune critiche contenute nella *Centrobaryca* di Guldino (Giusti, 1993, p. 102), Cavalieri, nel 1647, pubblicò *Contro Guldino. Esercitazione terza*, nelle *Exercitationes geometricae sex* (Cavalieri, 1989, p. 32). Così Cavalieri cita alcune contestazioni di Guldino: «Infatti in molti passi, sia Archimede, sia molti altri dediti alla Geometria più pura, dimostrano che si possono inscrivere, e circoscrivere ad una figura data altre figure, in modo che la figura circoscritta superi l'inscritta per una grandezza, la quale sia minore di qualsiasi grandezza data del medesimo genere. Concludono dunque che la circoscritta è uguale all'inscritta? Per niente affatto; adoperato invece un altro termine medio dimostrano che la figura alla quale è stata fatta la inscrizione e la circoscrizione, è uguale a una certa altra, la quale sia invero minore della circoscritta, maggiore invece della inscritta» (Cavalieri, 1989, pp. 824-825). Appare significativo che al metodo cavalieriano sia stato contrapposto da Guldino proprio il metodo di esaustione, indicato come modello di rigore («Il rigore, disse Cavalieri (...) è affare della filosofia e non della geometria»: Kline, 1982, p. 217).

in quell'epoca i metodi archimedei (ricordati anche da Pascal e Barrow, che però ne misero in dubbio l'utilità: Bourbaki, 1963, p. 180) erano noti, forse ancora utilizzati. Ma il loro successo era un riconoscimento solo formale; per quanto riguarda l'impiego nella ricerca, citiamo Fermat:

«Sarebbe facile dare delle dimostrazioni con il metodo di Archimede (...); basterà chiarirlo una volta per tutte, onde evitare continue ripetizioni» (Fermat, 1891-1922, I, p. 257).

Sarebbe facile, ma pressoché *inutile*, lascia intendere Fermat. Torniamo così al problema centrale della questione: metodo di esaustione non può essere impiegato per la ricerca di un risultato, ma solo per la dimostrazione di una tesi *già conosciuta*: limitazione insostenibile per una comunità scientifica lanciata verso la scoperta di un nuovo mondo matematico[10].

Gli esempi proposti mostrano come il ruolo della dimostrazione nella ricerca matematica sia centrale ma non del tutto esclusivo nello stesso sviluppo storico del sapere matematic (Sfard, 1991).

Alcune citazioni didattiche

«Formalmente non c'è differenza tra l'accettare la correttezza di una dimostrazione matematica e l'accettare l'universalità di un'afferma zione come garantita da quella dimostrazione. Il fatto che, per l'alunno, ci sia differenza tra accettare una dimostrazione ed accettare l'universalità dell'asserto provato da essa dimostra che si può prendere in considerazione un elemento in più. Tale elemento aggiuntivo è costituito dal bisogno di un'accettazione intuitiva complementare della capacità predittoria assoluta di un'affer mazione che è stata formalmente provata».

E. Fischbein
(Fischbein, 1983, pp. 22-23)

«È possibile insegnare ad uno studente a riflettere? In senso stretto, è impossibile. Riflettere è sempre compito molto personale di ogni discente, che questi deve eseguire sotto la propria responsabilità. Ma per gli insegnanti ciò ha l'importante conseguenza che essi debbono dare sufficienti opportunità e, fin dove è possibile, dare agli studenti in modo appropriato stimoli per la riflessione».

M. Neubrand
(Neubrand, 1990, p. 5).

Le implicazioni didattiche di quanto visto sono ampie, e scopo della presente nota non è quello di esaurire il loro esame critico, vivo nella comunità scientifica (Balacheff, 1992). Citiamo G. Hanna:

«Con l'attuale enfasi su di un insegnamento "significativo" della matematica, gli insegnanti sono incoraggiati a dedicare attenzione alla spiegazione dei concetti matematici e agli studenti è richiesto di giustificare i propri risultati e le proprie asserzioni. Questo sembrerebbe essere il clima giusto per rendere la maggior parte delle dimostrazioni uno strumento di spiegazione e per esercitarlo come definitiva forma di giustificazione matematica. Ma perché questo succeda, gli studenti devono familiarizzare con i criteri del ragionamento matematico: in altre parole, si deve insegnar loro la dimostrazione» (Hanna, 1997, p. 250)[11].

Gli scopi didattici di una dimostrazione possono essere diversi. Ciò è evidente anche da un'analisi storica: gli antichi matematici cinesi, ad esempio, distinguevano la moda lità *bian* (che mirava a convincere) dalla modalità *xiao* (che mirava a far capire: Barbin 1988; sulla questione si veda inoltre: Bagni, 1998). Come sopra anticipato, nella presente sezione del nostro lavoro non intendiamo dar conto delle molte ricerche che anche recentemente si sono sviluppate e sono state

[10] Ricordiamo ancora le parole di Bourbaki: «Ma era passato il momento di versare vin nuovo in botti vecchie (...) La via all'analisi moderna si apre solo quando Newton e Leibniz, voltando le spalle al passato, si accontentano di cercare provvisoriamente la giustificazione dei nuovi metodi non in dimostrazioni rigorose, ma nella fecondità e nella coerenza dei risultati» (Bourbaki 1963, p. 181).

[11] C. Marchini, in alcune dimostrazioni tratte da libri di testo per la secondaria, riscontra talvolta la presenza di «quel metodo induttivo, dal particolare al generale, tanto severamente bollato da Popper» (Marchini, 1992, p. 100).

pubblicate in questo importante settore; riteniamo invece di proporre all'attenzione del lettore alcuni problemi epistemologicamente e didatticamente rilevanti mediante una selezione di posizioni significative.

Il nesso tra la storia e la pratica didattica è un elemento centrale della ricerca, anche dal punto di vista epistemologico[12]. Scrive G. Israel, rifacendosi al pensiero di Federigo Enriques (1871-1946):

«Per Enriques, il modo in cui i concetti scientifici vengono acquisiti sul piano psicologico è almeno altrettanto importante della loro verifica formale: infatti, la struttura dei concetti scientifici è determinata dalla via psicologica attraverso cui essi sono stati conseguiti. Pertanto l'analisi della genesi psicologica dei concetti e delle teorie scientifiche è l'aspetto centrale della teoria della conoscenza. Muovendosi temerariamente contro la corrente montante dell'assiomatica e del logicismo, Enriques si spingeva fino al punto di attribuire un ruolo subordinato alla logica nel processo della conoscenza… E poiché i processi psicologici si manifestano nel tempo, un ruolo fondamentale ha, per Enriques, la *storia della scienza*» (Israel, 1992, p. XVI).

Giova riportare, a tale riguardo, un brano originale di Enriques:

«Che dire di una visione puramente formale che rimane affatto indifferente al contenuto del sapere? (…) Ben altro è l'insegnamento della storia. Abbiamo pur veduto il pensiero matematico svolgersi da problemi che sono posti alla nostra intuizione, inseguendo una verità che ci appare come qualcosa di dato, e che si chiarisce a poco a poco al nostro spirito anche attraverso l'errore. Dovremmo forse rigettare lontano da noi questa somma di sforzi per celebrare autori delle matematiche quei logici che ne traducono il frutto nel loro linguaggio?» (Enriques, 1938, pp. 141-142; inoltre: Enriques & de Santillana, 1932).

La posizione, coraggiosa e molto dibattuta[13] ha importanti implicazioni didattiche; scrive Israel:

«L'elemento più interessante e vivo del soggettivismo di Enriques è rappresentato dal ponte che la sua visione getta fra la conoscenza scientifica e le altre forme di sapere e di attività intellettuali e in particolare dall'analisi che egli conduce, da tale punto di vista, delle correlazioni fra i diversi settori della conoscenza scientifica (…) È quasi superfluo sottolineare cha l'audacia con cui Enriques gettava un ponte (e anzi una stretta connessione) fra epistemologia, psicologia e storia poneva le basi per una visione unitaria della teoria della conoscenza e, di conseguenza, per una visione unitaria dell'insegnamento» (Israel, 1992, pp. XVII-XVIII).

In tempi più vicini a noi, Francesco Speranza (1932-1998) riprese alcune idee di Enriques:

«In quanto alla pratica matematica, le dimostrazioni sono solo una parte del lavoro (anche per i matematici "puri"): essa è preceduta da una fase di intuizioni, di congetture, di tentativi che via via si perfezionano» (Speranza, 1992, p. 135; inoltre: Sfard, 1991; Speranza, 1997).

Citiamo ancora Speranza:

«La battuta "Il professore ha passato un'ora cercando di convincerci di una cosa della quale nessuno di noi dubitava" è indicativa della confusione che si fa tra apprendere i contenuti e dimostrare le affermazioni: si rammenti che quelle che sarebbero state le prime dimostrazioni (attribuite a Talete) si riferiscono a proprietà "evidenti", segno che già allora s'era capita la differenza fra *logica della ricerca* e *logica della dimostrazione*» (Speranza, 1992, p. 136).

Sottolineiamo inoltre, con Speranza, che non raramente, nella pratica scolastica, alla dimostrazione vengono esplicitamente o implicitamente attribuite finalità didattiche improprie:

---

[12] Scrivono J. Fauvel e J. van Maanen: «Come ogni progetto educativo, quello di intendere la storia della matematica come una componente dell'insegnamento implica un'aspettativa più o meno esplicita in termini di un migliore apprendimento. La ricerca sull'uso della storia della matematica nell'insegnamento è quindi una parte importante della ricerca in didattica della matematica» (Fauvel & van Maanen, 1997, p. 8).

[13] «La scienza è, per Enriques, una costruzione essenzialmente soggettiva, in quanto espressione di un'attività psicologica e storicamente determinata del soggetto scientifico: fu cecità di Croce il non vedere quanto una visione siffatta avesse evidenti punti di contatto con un approccio di tipo idealistico» (Israel, 1992, p. XVI).

«Molti insegnanti di matematica sono convinti che attraverso le dimostrazioni gli studenti imparino sia i "contenuti" sia la "struttura logica" della disciplina, e siano educati allo "spirito critico". Almeno per la geometria, sono profondamente convinto che questa sia un'illusione. Anzitutto i "fatti spaziali" si imparano per esperienza concreta (in ce rta misura, anche quella offerta dal metodo delle coordinate); del resto, anche altri settori, nei quali i fatti sono meno "palpabili", come l'aritmetica e l'algebra, si apprendono anzitutto affrontando problemi » (Speranza, 1992, p. 136).

Inseriamo dunque in questa nostra breve antologia di considerazioni un'osservazione di B. Piochi:

«Prima ancora che la logica interna di una dimostrazione, gli studenti spesso non capiscono quale sia la differenza fra "mostrare", "verificare" e "dimostrare", ma soprattu tto *perché si debba dimostrare* (…) Questo problema è chiaramente cruciale: lo studente che non capisce la finalità di dimostrare potrà anche impadronirsi brillantemente delle tecniche della dimostrazione, ma inevitabilmente le userà a sproposito» (Piochi, 1992, p. 117)[14].

Si tratta di un utile spunto di riflessione per gli insegnanti che sottolinea ancora una volta la centralità della consapevolezza nell'intero processo di apprendimento.

Per una conclusione "aperta"

Le precedenti considerazioni non possono avere la pretesa di chiudere un vasto e delicato problema didattico ed epistemologico, ma di ribadirne l'apertura e l'importanza.

Se la dimostrazione è uno dei cardini della Matematica, come scienza ipotetico-deduttiva, la didattica disciplinare non può vincolarsi ad un assoluto formalismo che porti l'allievo ad identificare nella dimostrazione l'essenza della razionalità matematica. La Matematica non può ignorare i molti collegamenti filosofici, storici, psicologici; ed analoga necessità sussiste per la didattica disciplinare.

Un'osservazione di F. Speranza può sintetizzare quanto affermato nella presente nota:

«In campo disciplinare, gli studiosi sentono spesso la necessità di definire dei "paradigmi", fino a stabilire degli steccati nei confronti di discipline anche affini. In ambito filosofico, in particolare epistemologico, bisogna invece essere aperti ad altre forme di pensiero, ad altre esperienze. In questo senso, negli anni scorsi l'epistemologia della matematica si è aperta (o riaperta) verso la storia, l'epistemologia "generale", la psicologia (…) Ovviamente, un epistemologo della matematica non è diventato uno storico, (…) ma il coinvolgimento è spesso andato al di là di un puro e semplice interesse per queste discipline: si è in qualche modo modificato il "profilo professionale". Ma vale anche il viceversa: vi sono storici, psicologi (…) che sono diventati un po' epistemologi della matematica. L'elenco precedente delle discipline gemellate non è forse completo: in ogni caso mi sembra venuto il momento di ampliare questo orizzonte. Il passo più naturale mi sembra quello di volgere la nostra attenzione ad alcune grandi correnti della filosofia contemporanea, con prudenza ma con coraggio» (Speranza, 1999, p. VI).

Riferimenti bibliografici

Archimede (1974), *Opere*, A. Frajese (a cura di), UTET, Torino.
Arrigo, G. & D'Amore, B. (1992), *Infiniti*, Angeli, Milano.
Bagni, G.T. (1997), *Storia della Logica formale*, Pitagora, Bologna.
Bagni, G.T. (1998), Dimostrare e convincere, *Bollettino dei Docenti di Matematica*, 36, 53-60.
Balacheff, N. (1982), Preuve et démonstration en mathématique au collège, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol. 3, 3.

[14] «Proprio nel campo dove con più assiduità si tende ad applicare lo "strumento dimostrazione", la Geometria, è (...) esperienza comune quanto l'aspetto grafico svii l'attenzione immettendo nella dimostrazione problematiche di altro genere, e "convincendo" lo studente visivamente in modo intuitivo ("A che serve dimostrare.. . se si vede?"). Spesso gli stessi testi rischiano di creare convinzioni errate, laddove utilizzano frasi del tipo *Dal disegno si vede che...* oppure *Il seguente esempio mostra come...*» (Piochi, 1992, p. 117; indichiamo inoltre: Mazzanti & Piochi, 1990).

Barbin, E. (1988), La dimostrazione matematica: significati epistemologici e questioni didattiche, *Quaderni di lavoro n. 10*, Istituto Filippin, Paderno del Grappa.
Bochenski, J.M. (1972), *La Logica formale. I. Dai Presocratici a Leibniz. II. La Logica matematica*, Einaudi, Torino.
Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano (*Eléments d'histoire des mathematiques*, Hermann, Paris 1960).
Cantini, A. (1979), *I fondamenti della matematica*, Loescher, Torino.
Carruccio, E. (1972), *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, Pitagora, Bologna.
Castelnuovo, G. (1938), *Le origini del Calcolo infinitesimale*, Zanichelli, Bologna (Feltrinelli, Milano 1962).
Cavalieri, B. (1989), *Geometria degli indivisibili*, L. Lombardo Radice (a cura di), UTET, Torino.
Dupont, P. (1981), *Appunti di storia dell'analisi infinitesimale*, I, II, Cortina, Torino.
D'Amore, B. & Matteuzzi, M. (1975), *Dal numero alla struttura*, Zanichelli, Bologna.
D'Amore, B. & Matteuzzi, M. (1976), *Gli interessi matematici*, Marsilio, Venezia.
Enriques, F. (1938), *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna (Zanichelli, Bologna 1982).
Enriques, F. & de Santillana, G. (1932), *Storia del pensiero scientifico*, Milano-Roma.
Euclide (1970), *Elementi*, Frajese, A. & Maccioni L. (a cura di), UTET, Torino.
Fauvel, J. & van Maanen, J. (1997), Storia e didattica della matematica, *Lettera Pristem*, 23, 8-13.
Fiori, C. & Pellegrino, C. (1997), Immagine della matematica tra concezione e divulgazione, *La matematica e la sua didattica*, 4, 426-443.
Fischbein, E. (1983), Intuition and proof, *For the Learning of Mathematics*, 3, 2, 9-24 (Intuizione e dimostrazione, Fischbein, E. & Vergnaud, G., 1992, *Matematica a scuola: teoria ed esperienze*, Pitagora, Bologna, 1-24).
Frajese, A. (1969), *Attraverso la storia della matematica*, Le Monnier, Firenze.
Freguglia, P. (1978), *L'algebra della logica*, Editori Riuniti, Roma.
Furinghetti, F. (1993), Images of Mathematics outside the community of mathematicians: evidence and explanations, *For the Learning of Mathematics*, 13, 2, 33-38.
Gallo, E. (1985), Geometria, percezione, linguaggio, *L'educazione matematica*, 6, 61-104.
Giusti, E. (1993), *Euclides reformatus. Teoria delle proporzioni nella scuola galileiana*, Bollati Boringhieri, Torino.
Giusti, E. (1999), *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Bollati Boringhieri, Torino.
Hanna, G. (1997), Il valore permanente della dimostrazione, *La matematica e la sua didattica*, 3, 236-252.
Israel, G. (1992), Federigo Enriques e il ruolo dell'intuizione, Enriques, F. & Amaldi, U., *Elementi di geometria*, Studio Tesi, Pordenone.
Jauch, J.M. (1996), *Sulla realtà dei quanti. Un dialogo galileiano*, Adelphi, Milano (*Are quanta real? A Galilean dialogue*, Indiana University Press, 1973).
Kitcher, P. (1984), *The nature of mathematical knowledge*, Oxford University Press, New York.
Kline, M. (1982), *La matematica nella cultura occidentale*, Feltrinelli, Milano (*Mathematics in western culture*, Oxford University Press, New York 1953).
Kline, M. (1991), *Storia del pensiero matematico*, I, II, Einaudi, Torino (*Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York, 1972).
Lolli, G. (1985), *Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche*, Il Mulino, Bologna.
Marchini, C. (1992), Procedimenti dimostrativi presenti nei manuali scolastici, Furinghetti, F. (a cura di), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti II Internucleo della Scuola sec. superiore, Progetto strategico CNR: TID, Quaderno 13, 97-110.
Mazzanti, G. & Piochi, B. (1990), Riflessioni sulla dimostrazione in didattica della matematica, *Didattica delle scienze e dell'informatica nella scuola*, 149, 45-50.
Neubrand, M. (1990), L'apprendere e il riflettere: perché e come associarli nella didattica della matematica, *La matematica e la sua didattica*, 2, 5-16.
Piochi, B. (1992), Come motivare lo studente alla dimostrazione?, Furinghetti, F. (a cura di), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti II Internucleo della Scuola sec. superiore, Progetto strategico CNR: TID, Quaderno 13, 117-124.
Rufini, E. (1926), *Il «Metodo» di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell'antichità*, Zanichelli, Bologna (Feltrinelli, Milano 1961).
Russell, B. (1963), *I principi della matematica*, Longanesi, Milano.
Russell, B. (1970), *Introduzione alla filosofia matematica*, Newton Compton, Roma.
Saccheri G. (1904), *Euclides ab omni naevo vindicatus*, Boccardini (a cura di), Hoepli, Milano 1904.
Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
Speranza, F. (1987), A che cosa serve la filosofia della matematica?, *La matematica e la sua didattica*, 1, 14-24.
Speranza, F. (1992), La geometria nelle scuole superiori: dimostrazioni o progetto di razionalità, Furinghetti, F. (a cura di), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti II Internucleo della Scuola sec. superiore, Progetto strategico CNR: TID, Quaderno 13, 135-141.
Speranza, F. (1997), *Scritti di Epistemologia della Matematica*, Pitagora, Bologna.
Speranza, F. (1999), Appello all'ermeneutica, *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 8, VI-VII.