L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 31B, 1, 9–28 (2008)

Eulero e la didattica della matematica

GIORGIO T. BAGNI

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
UNIVERSITÀ DI UDINE

Abstract. In this paper some ideas by Leonhard Euler are presented, with reference to educational purposes. In particular, we shall discuss some important elements from Euler's *Algebra* (1770), dealing with diophantine equations, and from his *Lettres à une princesse d'Allemagne* (written in 1760–1762 and published in 1768–1772), dealing with his celebrated method of sets representations.

Sommario. Nel presente lavoro sono presentate alcune idee di Leonhard Euler, riferite ad aspetti didattici. In particolare, discuteremo alcuni importanti elementi tratti dall'*Algebra* di Eulero (1770), collegati alle equazioni diofantee, nonché tratti dalle sue *Lettres à une princesse d'Allemagne* (scritte nel 1760–1762 e pubblicate nel 1768–1772) e collegati al celebre metodo di rappresentazione degli insiemi.

Eulero e la didattica della matematica

GIORGIO T. BAGNI

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA E INFORMATICA
UNIVERSITÀ DI UDINE

1. INTRODUZIONE

Il 2007, anno euleriano, è stato giustamente festeggiato con innumerevoli iniziative, con l'organizzazione di importanti convegni e con la pubblicazione di una notevolissima quantità articoli dedicati al grande matematico di Basilea. In molti hanno ricordato la sterminata produzione di Eulero, tra i massimi geni della matematica del Settecento (e dell'intera storia della nostra disciplina), in tutti i settori della matematica allora conosciuta.

Nel presente lavoro desideriamo ricordare alcuni spunti della produzione euleriana particolarmente vicini alla didattica della matematica. Ci baseremo particolarmente sull'*Algebra*, opera scritta nel 1770, e sulle *Lettere ad una Principessa d'Alemagna*, risalenti al periodo 1760–1762 ma edite tra il 1768 e il 1772.

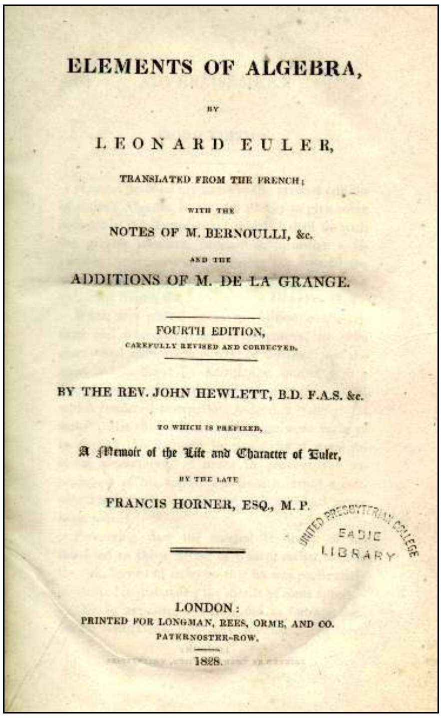
Faremo riferimento a due edizioni d'epoca, che per alcuni versi possono essere considerate originali: per l'*Algebra* utilizzeremo l'edizione inglese del 1828 (Longman, London; è interessante notare che le appendici sono curate da Lagrange; di questa traduzione, curata da J. Hewlett nel 1822, sono note diverse edizioni. Per quanto riguarda edizioni in italiano, segnaliamo: *Elementa algebrae Leonardi Euleri ex gallica in latinam linguam versa, cum notis et additionibus,* 2 vv., Jo. Antonii Pezzana, Venezia 1790). Per le *Lettere* utilizzeremo la prima edizione italiana, curata da Oronzo Carnevale, una delle prime traduzioni dall'originale francese, pubblicata dai Fratelli Terres a Napoli nel 1787.

2. LE EQUAZIONI DIOFANTEE

Un'*equazione diofantea*, com'è noto, è un'equazione indeterminata della quale si vogliono conoscere le soluzioni intere (il riferimento è a Diofanto di Alessandria, il grande autore di *Arithmetica*, operante intorno al 250). Tali equazioni ci consentono quindi di trattare matematicamente situazioni che spesso si presentano in campo concreto (non è raro, infatti, che un problema debba essere risolto in modo da ottenere come risultato solamente delle quantità intere). Nella propria *Algebra* Eulero propone un metodo interessante e moderno per risolvere un'equazione diofantea. Lo illustreremo mediante un esempio (Olds, 1968).

Consideriamo l'equazione in x, y numeri interi relativi:

$$8x+5y = 81$$



ELEMENTS OF ALGEBRA,

BY

LEONARD EULER,

TRANSLATED FROM THE FRENCH;

WITH THE

NOTES OF M. BERNOULLI, &c.

AND THE

ADDITIONS OF M. DE LA GRANGE.

FOURTH EDITION,

CAREFULLY REVISED AND CORRECTED,

BY THE REV. JOHN HEWLETT, B.D. F.A.S. &c.

TO WHICH IS PREFIXED,

A Memoir of the Life and Character of Euler,

BY THE LATE

FRANCIS HORNER, ESQ., M. P.

LONDON:

PRINTED FOR LONGMAN, REES, ORME, AND CO.

PATERNOSTER-ROW.

1828.

Risolviamo innanzitutto l'equazione nella variabile con il minore dei coefficienti x e y (in questo caso y):

$$y = \frac{81-8x}{5}$$

Dividiamo ora per 5 i numeri 81 e 8, mettendo in evidenza i resti (dunque si scriva: $81 = 5\cdot16+1$ e $8 = 5\cdot1+3$); quindi:

$$y = \frac{5\cdot16+1-(5\cdot1+3)x}{5} \qquad \text{cioè} \qquad y = (16-x)+\frac{1-3x}{5}$$

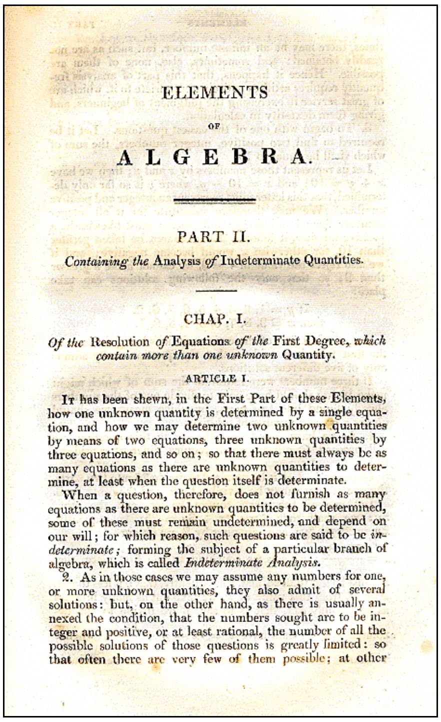
e infine:

$$y = (16-x)+t$$

dove è stato posto:

$$t = \frac{1-3x}{5} \qquad \text{cioè} \qquad 3x+5t = 1$$

Si noti che se x e y sono numeri interi, allora tale è anche t. Anche $3x+5t = 1$, pertanto, è un'equazione diofantea; ma *i suoi coefficienti sono minori di quelli dell'equazione di partenza*. L'idea base del metodo euleriano è dunque questa: le soluzioni (x; y) dell'equazione assegnata sono ricavabili immediatamente dalle soluzioni di *una nuova equazione diofantea con i coefficienti minori di quelli di quella considerata in origine.*


ELEMENTS

OF

ALGEBRA.

PART II.

Containing the Analysis *of* Indeterminate Quantities.

CHAP. I.

Of the Resolution *of* Equations *of the* First Degree, *which contain more than one unknown* Quantity.

ARTICLE I.

It has been shewn, in the First Part of these Elements, how one unknown quantity is determined by a single equation, and how we may determine two unknown quantities by means of two equations, three unknown quantities by three equations, and so on; so that there must always be as many equations as there are unknown quantities to determine, at least when the question itself is determinate.

When a question, therefore, does not furnish as many equations as there are unknown quantities to be determined, some of these must remain undetermined, and depend on our will; for which reason, such questions are said to be *indeterminate;* forming the subject of a particular branch of algebra, which is called *Indeterminate Analysis.*

2. As in those cases we may assume any numbers for one, or more unknown quantities, they also admit of several solutions: but, on the other hand, as there is usually annexed the condition, that the numbers sought are to be integer and positive, or at least rational, the number of all the possible solutions of those questions is greatly limited: so that often there are very few of them possible; at other

Il procedimento ora introdotto può evidentemente essere iterato. Seguendo l'esempio, si risolva l'equazione ottenuta nella variabile avente il minore coefficiente (nel nostro caso x):

$$x = \frac{1-5t}{3} \qquad \text{da cui} \qquad x = \frac{1-(3\cdot 1+2)t}{3} \qquad x = -t + \frac{1-2t}{3} \qquad x = -t+u$$

dove è stato posto:

$$u = \frac{1-2t}{3} \qquad \text{ovvero} \qquad 2t+3u = 1$$

Ragionando come in precedenza, anche $2t+3u = 1$ è un'equazione diofantea e possiamo ripetere ancora il nostro procedimento. Risolviamo l'equazione ottenuta nella variabile con il minore coefficiente (t):

$$t = \frac{1-3u}{2} \qquad \text{da cui} \qquad t = \frac{1-(2\cdot 1+1)u}{2} \qquad t = -u + \frac{1-u}{2} \qquad t = -u+v$$

dove è stato posto:

$$v = \frac{1-u}{2} \qquad \text{cioè} \qquad u+2v = 1 \qquad \text{e infine} \qquad u = 1-2v$$

ottenendo ancora un'equazione diofantea. *L'iterazione si interrompe quando il coefficiente della variabile dell'equazione in esame non interessata dalla posizione (in questo caso il coefficiente della u) viene ad essere 1.* A questo punto, ricordando le espressioni di x e di y e tutte le posizioni effettuate:

$$y = (16-x)+t \qquad x = -t+u \qquad t = -u+v \qquad u = 1-2v$$

e sostituendo "a cascata" si perviene alle:

$$x = 2-5v$$
$$y = 13+8v$$

le quali al variare dell'intero v risolvono l'equazione proposta.

v	…	–2	–1	0	1	2	…
x	…	12	7	2	–3	–8	…
y	…	–3	5	13	21	29	…

Questa equazione ha infinite coppie di soluzioni intere; se però, ad esempio, all'equazione diofantea in esame fosse associata la condizione di non negatività per x e per y (una condizione non rara nelle situazioni applicative), dovremmo risolvere il sistema di disequazioni, con v numero intero:

$$\begin{cases} 2-5v \geq 0 \\ 13+8v \geq 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad -\frac{13}{8} \leq v \leq \frac{2}{5} \quad \text{cioè} \quad v=-1 \ \vee \ v=0$$

Le uniche coppie accettabili sarebbero dunque quelle della tabella seguente:

v	-1	0
x	7	2
y	5	13

2. L'ESISTENZA DI SOLUZIONI INTERE

Il metodo euleriano precedentemente descritto è moderno e stimolante anche da un punto di vista didattico. Osserviamo però che tale procedimento non è sempre il più efficace (Olds, 1968) e, soprattutto, che *non garantisce l'esistenza di soluzioni dell'equazione trattata*. Proprio quest'ultima osservazione è didatticamente significativa e merita di essere illustrata brevemente.

Com'è noto, un'equazione diofantea del tipo di quella sopra vista può non avere soluzioni: ad esempio, data l'equazione $ax+by = c$, con a, b, c interi dati, x, y interi incogniti, se a e b non sono coprimi, allora tutti i loro divisori comuni devono essere anche divisori di c.

Consideriamo a tale riguardo l'equazione in x, y numeri interi relativi:

$$8x+6y = 81$$

Applicando le considerazioni precedenti potremmo sin d'ora stabilire che essa non ammette soluzioni intere, in quanto 8 e 6 sono numeri pari mentre 81 è dispari. Ma che accadrebbe se cercassimo di risolvere anche questa equazione applicando il procedimento utilizzato da Eulero?

Come precedentemente fatto, risolviamo l'equazione nella variabile con il minore dei coefficienti x e y (in questo caso y):

$$y = \frac{81-8x}{6}$$

Dobbiamo dividere per 6 i numeri 81 e 8, mettendo in evidenza i resti (dunque scriveremo: $81 = 6\cdot13+3$ e $8 = 6\cdot1+2$); quindi:

$$y = \frac{6\cdot13+3-(6\cdot1+2)x}{6} \quad \text{cioè} \quad y = (13-x)+\frac{3-2x}{6}$$

e infine:

$$y = (13-x)+t$$

dove è stato posto:

$$t = \frac{3-2x}{6} \qquad \text{cioè} \qquad 2x+6t = 3$$

Si tratta di una nuova equazione diofantea e il procedimento può essere iterato. Risolviamo l'equazione così ottenuta nella variabile avente il minore coefficiente (x):

$$x = \frac{3-6t}{2} \qquad \text{da cui} \qquad x = \frac{2\cdot 1+1-3\cdot 2t}{2} \qquad x = 1-3t+\frac{1}{2}$$

e a questo punto si ottiene:

$$x = 1-3t+u$$

con la (ovviamente ben poco… interessante!) posizione:

$$u = \frac{1}{2}$$

Non otteniamo quindi più per u un'espressione che porta ad una nuova equazione diofantea che ci consentirebbe di iterare il procedimento, bensì un valore numerico non intero.

A questo punto non ci resterebbe che procedere alle sostituzioni, e ricordando l'espressione di y:

$$y = (13-x)+t \qquad y = 13-\left(1-3t+\frac{1}{2}\right)+t \qquad y = 4t+\frac{23}{2}$$

dunque:

$$x = -3t+\frac{3}{2}$$
$$y = 4t+\frac{23}{2}$$

Chiaramente tutto ciò è ben poco significativo: queste espressioni non possono ricondursi ad alcun numero intero per alcuna scelta di t intero.

Il procedimento di Eulero, pertanto, non ci ha portato a… commettere errori, ma ci ha indotto ad elaborare il problema dato in modo scarsamente produttivo, dal punto di vista dell'ottenimento (peraltro, come già sappiamo, impossibile) delle soluzioni dell'equazione diofantea; tuttavia riteniamo non trascurabile, ad esempio in un'ottica specificamente didattica riferita al caso esaminato, l'essere riusciti ad evidenziare le conseguenze "pratiche" di tale impossibilità.

Queste osservazioni non sminuiscono dunque l'importanza (anche) didattica dell'approccio euleriano alle equazioni diofantee: il ruolo dei metodi iterativi nella matematica pura e applicata e nella sua didattica è chiaro; e la stessa possibilità di discutere, anche con i nostri allievi, delle importanti questioni di esistenza delle soluzioni o di efficacia di un metodo risolutivo può rivelarsi preziosa.

3. LE LETTERE A UNA PRINCIPESSA D'ALEMAGNA

Non è possibile parlare di Eulero in chiave didattica senza occuparsi delle *Lettere a una Principessa d'Alemagna* che riassumono un vero e proprio corso per corrispondenza "sopra diversi soggetti di fisica e filosofia", come appare dal frontespizio della prima edizione italiana, alla quale ci riferiamo.

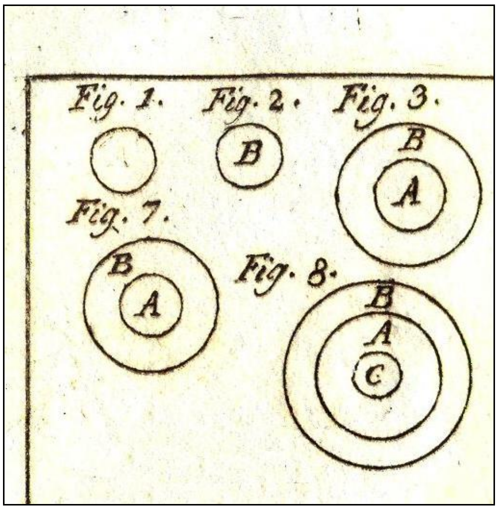
Si tratta di un'opera vasta e complessa, ma didatticamente chiarissima, davvero «un modello da imitare», come afferma Gianfranco Cantelli nell'ampia Introduzione scritta per la riedizione italiana dell'opera, pubblicata nel terzo centenario della nascita del suo autore (Euler, 2007, p. XX).

Nelle *Lettere* di Eulero c'è dunque l'esposizione di molti argomenti di fisica, con costante (critico) riferimento ai maggiori quadri teorici, da quello cartesiano a quello newtoniano. Non riteniamo opportuno approfondire in questa sede la collocazione del genio di Basilea nei confronti di tali impostazioni.; ci limitiamo a ricordare che, per Eulero, il sapere scientifico «si riferisce esclusivamente al mondo dei corpi, l'unico cui possono applicarsi i principi matematici in base ai quali ci è possibile conoscerlo»; e proprio per questa ragione la sua indagine si preoccupò costantemente di operare «una netta distinzione tra le due nature, quella dei corpi e quella degli spiriti, primo passo decisivo per la fondazione della conoscenza scientifica della natura corporea» (Cantelli, in: Euler, 2007, p. XLVIII).

Non è principalmente l'impostazione filosofica di Eulero, tuttavia, ad essere istruttiva per lo studioso di didattica della matematica dei giorni nostri. Alcune idee utilizzate nelle *Lettere* sono infatti diventate grandi protagoniste delle ore di matematica nelle nostre aule scolastiche.

Ad esempio, nella didattica della teoria elementare degli insiemi si ricorre molto spesso alla rappresentazione mediante una figura chiusa ricondotta a Eulero e a John Venn (1834–1923). Riportiamo quanto Euler scrive nella lettera CII (datata 14 febbraio 1761), dopo avere ricordato la classificazione delle proposizioni aristoteliche:

> «Per esprimere sensibilmente la natura di queste […] proposizioni, possiam rappresentarle per mezzo di figure, le quali son di un gran soccorso per ispiegare con somma distinzione qual sia l'esattezza di un raziocinio. E poiché una nozione generale contiene un'infinità di oggetti individuali, si può supporre a guisa di uno spazio, in cui questi oggetti son racchiusi: per esempio si forma uno spazio per la nozione di *uomo* (*Tav. 1. fig. 1.*) in cui si suppone che tutti gli uomini sien radunati.
> Per la nozione di *mortale* se ne forma un altro (*Tav. 1. fig. 2.*) dove si suppone che sia compreso quanto vi è di mortale.
> E quando io pronunzio che *tutti gli uomini son mortali*, intendo che la prima figura sia contenuta nella seconda.
> Dunque la rappresentazione di una proposizione universale affermativa sarà quella della *Tav. 1. fig. 3.*, in cui lo spazio A che dinota il soggetto della proposizione vien tutto intero racchiuso nello spazio B che è il predicato» (Euler, 1787, II, pp. 111–112).



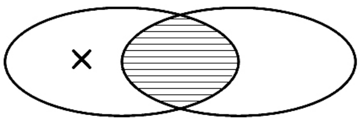
Nella successiva lettera CIII (datata 17 febbraio 1761) Euler scrive:

«Questi cerchj o sien questi spazj (imperciocché è indifferente qualunque figura lor si dia) son molto a portata per facilitare le nostre riflessioni sopra questa materia, e per metterci in chiaro quanti misteri la logica si vanta di avere, i quali somma pena han costata per poterli dimostrare, mentre coll'ajuto di tai segni in un istante tutto salta agli occhi. […] Quanto sin qui si è detto può essere sufficiente a far capire a Vostra Altezza, che tutte le proposizioni possono essere rappresentate con figure; ma il massimo vantaggio si manifesta ne' raziocinj, i quali qualora si esprimon con parole chiamansi *sillogismi*, in cui si tratta di tirare una conclusione esatta da alcune date proposizioni. Con tale invenzione noi potremo subito scandagliare le giuste forme di tutti i sillogismi.
Cominciamo da una proposizione affermativa universale *ogni A è B* […] Se la nozione C è contenuta interamente nella nozione A, sarà contenuta anche interamente nello spazio B (*Tav. 1. fig. 8.*), donde risulta questa forma di sillogismo: *Ogni A è B*, ma *Ogni C è A*, dunque *Ogni C è B* e quest'ultima è la conclusione.
Per esempio. Si disegni la nozione A tutti gli alberi, la nozione B tutto ciò che ha radici, e la nozione C tutti i ciriegi, in tale caso il nostro sillogismo sarà il seguente: *Ogni arbore ha radici*, ma *Ogni ciriegio è un arbore*, dunque *Ogni ciriegio ha radici*» (Euler, 1787, II, pp. 113 e 115–116).

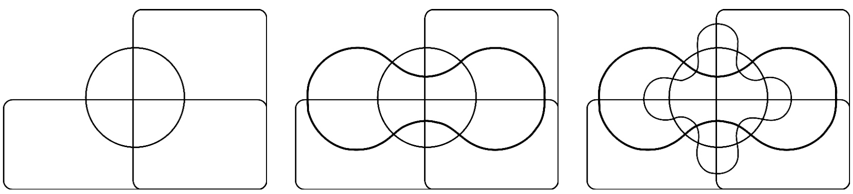
4. DIAGRAMMI DI EULERO, DIAGRAMMI DI VENN

La storia dei *diagrammi di Eulero–Venn* può essere fatta risalire ad alcune rappresentazioni leibniziane (Baron, 1969; i diagrammi di Leibniz non ebbero diffusione fino al 1903) ed è ricca di spunti per i matematici e per gli studiosi di didattica (gli appassionati di geometria combinatoria e di teoria dei grafi possono riferirsi ad esempio a: Grünbaum, 1975, Chilakamarri, Hamburger & Pippert, 1996). Numerose sono le varianti, identificate mediante diverse caratteristiche e denominazioni (*diagrammi di Johnston*, *diagrammi di Peirce*, *mappe di Karnaugh*…) e può essere quindi utile precisare alcune differenze significative.

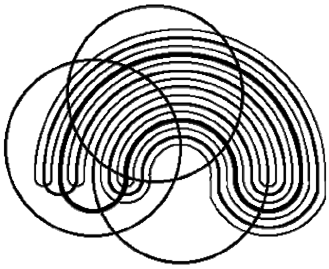
In generale nei diagrammi "di Eulero" si indicano solo le parti (ad esempio le intersezioni) non vuote. Nei diagrammi "di Venn" propriamente detti, invece, si rappresentano *tutte* le parti; in particolare, si indicano con una × i sottoinsiemi certamente non vuoti e con un tratteggio quelli certamente vuote (le parti su cui non si hanno dati si lasciano bianche). Nella figura seguente, ad esempio, il sottoinsieme a sinistra contiene certamente almeno un elemento; l'intersezione tra i due insiemi è vuota, mentre sulla parte a destra non si dispone di informazioni.



La realizzazione di un diagramma di Venn per un certo numero di insiemi richiede, come notato, di disegnare una rappresentazione in cui tutte le intersezioni siano presenti. Il fatto stesso che ciò sia possibile non è banale e diversi Autori si sono dedicati a mettere a punto dei procedimenti costruttivi tali da evidenziare questa possibilità. Nello schema seguente è ad esempio illustrata la costruzione dei diagrammi di Venn secondo Edwards (2004), relativamente a 3, 4 e 5 insiemi, in cui è possibile evidenziare il ruolo di alcune proprietà di simmetria.

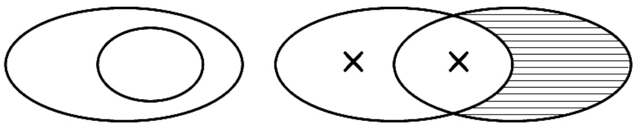


L'analoga costruzione originale proposta da Venn (1880) era invece simile alla seguente, indubbiamente meno chiara:



Abbiamo dunque già evidenziato una differenza tra gli originali diagrammi "di Eulero" e quelli "di Venn". Ma quali utilizziamo, nella pratica didattica?

In generale, nelle nostre aule scolastiche tendiamo a proporre una rappresentazione… intermedia. In effetti, se ci limitiamo a considerare le convenzioni originali, nella pratica didattica sarebbero i diagrammi di Eulero a risultare più chiari e "intuitivi": ad esempio il fatto che A sia un sottoinsieme (proprio) di B appare evidente da una rappresentazione come quella a sinistra ("di Eulero", in cui A è l'insieme più piccolo), piuttosto che da una come quella a destra ("di Venn", in cui A è l'insieme più a destra):



Dunque, didatticamente, con il termine "diagramma di Eulero–Venn" si fa riferimento spesso ad una raffigurazione del primo tipo; talvolta però vengono adottate ulteriori convenzioni rappresentative, come l'uso di indicare gli elementi con dei punti all'interno della figura ellittica.

5. ESEMPI… CRITICI

La rappresentazione mediante i diagrammi di Eulero è certamente molto importante nella matematica e nella sua didattica (nel prossimo paragrafo proporremo alcune considerazioni teoriche); ma ciò non deve indurci a ritenere che la sua applicabilità sia… universale. Notiamo innanzitutto che un approccio matematico avanzato potrebbe prevedere situazioni in cui i diagrammi di Eulero sono "inadatti" a rappresentare una situazione insiemistica (Bagni, 2006–a, 2006–b): se pensiamo ai naturali secondo von Neumann, ad esempio, 0 corrisponde a $\varnothing$, 1 a $\{\varnothing\}$, 2 a $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, 3 a $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ etc.; dunque in tale caso se $a < b$ abbiamo sia $a \in b$ che $a \subseteq b$ (ricordiamo che un insieme a tale che $\forall x\ (x \in a \rightarrow x \subseteq a)$ si definisce *insieme transitivo*). Ebbene, come rappresentare situazioni del genere mediante i diagrammi di Eulero? Nella Prefazione a Bagni (2007), Jean–Philippe Drouhard scrive:

> «L'impossibilità di rappresentare gli ordinali mediante diagrammi […] deriva dal fatto che gli insiemi sono rappresentati da superfici ellissoidali (in francese si chiamano *les "patates"*) mentre gli elementi sono rappresentati da dei punti; ma la nozione stessa di ordinale esige che gli elementi siano dei sottoinsiemi! [… I diagrammi] sono addirittura grossolanamente imperfetti, e ciò anche con riferimento a situazioni ben più semplici rispetto ai bizzarri ordinali. Eppur tuttavia essi continuano ad essere usati, proprio perché si sono ben adattati ad un certo numero di situazioni elementari».

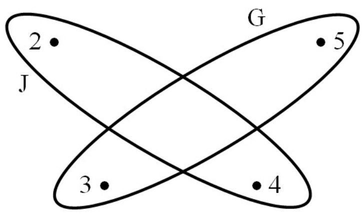
Drouhard si riferisce quindi a situazioni "ben più semplici rispetto ai bizzarri ordinali": non è difficile ideare un esempio in tal senso che potrebbe essere proposto agli allievi delle nostre scuole secondarie. Consideriamo i seguenti insiemi:

$$A = \{1, 5\};\ B = \{1; 2\};\ C = \{2; 3\};\ D = \{3; 4\};\ E = \{4; 5\};$$
$$F = \{2; 5\};\ G = \{3; 5\};\ H = \{1; 4\};\ I = \{1; 3\};\ J = \{2; 4\}$$

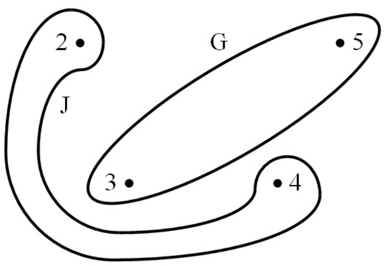
Si voglia rappresentare mediante un diagramma di Eulero la situazione ora descritta (Bagni, 2007). Premettiamo due osservazioni:

(1) le dieci scritture $A = \{1, 5\}$, $B = \{1; 2\}$, $C = \{2; 3\}$, $D = \{3; 4\}$, $E = \{4; 5\}$, $F = \{2; 5\}$, $G = \{3; 5\}$, $H = \{1; 4\}$, $I = \{1; 3\}$, $J = \{2; 4\}$ richiedono di "collegare" ogni elemento di $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ con ciascuno degli altri elementi dello stesso insieme, venendo così a formare i dieci sottoinsiemi ora indicati. Tale collegamento porta a realizzare una sorta di "connessione" grafica dei due elementi in gioco (in generale un insieme viene rappresentato da una parte connessa di piano):

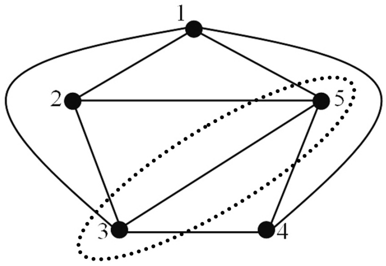
(2) è opportuno che due insiemi disgiunti non siano rappresentati da parti comuni di piano (come notato, questa caratteristica distinguerebbe i diagrammi "di Eulero" propriamente detti da quelli detti "di Venn"). Consideriamo a tale riguardo il caso seguente:



Per rappresentare G = {3; 5} e J = {2; 4} potremmo variare le posizioni dei punti indicanti gli elementi; ma se volessimo mantenere tali posizioni (anche a costo di ricorrere a raffigurazioni non convesse), una rappresentazione sarebbe, nonostante il suo aspetto inusuale:



Torniamo all'esercizio sopra proposto. Si tratterebbe di realizzare un *grafo con cinque nodi completo* (ricordando le caratteristiche del problema) *e planare* (in modo da permettere il disegno dei diagrammi, sulla base della precedente osservazione 1); ma è ben noto che il grafo completo con cinque nodi K_5 (uno dei grafi di Kuratowski) *non* è un grafo planare. Con riferimento alla figura seguente, si realizzino gli insiemi che connettono due elementi collegati da una linea (ad esempio, l'insieme G = {3; 5} è quello indicato con il tratteggio).



È dunque impossibile realizzare graficamente l'insieme J = {2; 4} senza rinunciare alla connessione delle rappresentazioni degli insiemi in gioco o senza determinare "sovrapposizioni" che didatticamente comporterebbero la possibilità di malintesi (come la presenza di una qualche intersezione non vuota tra gli insiemi G = {3; 5} e J = {2; 4}).

Naturalmente non è detto che le rappresentazioni degli insiemi, in un'ampia accezione didattica, abbiano nella connessione una caratteristica irrinunciabile: ma uno studente, a fronte di un insieme rappresentato da due "pezzi staccati" l'uno dall'altro, potrebbe essere indotto a pensare a *due* insiemi…

6. DA EULERO A PEIRCE

Quanto osservato nel paragrafo precedente non ci deve portare a sminuire troppo semplicisticamente l'importanza della rappresentazione mediante i diagrammi di Eulero. Per molti versi, gli esempi precedenti inducono a riflettere su di una delle più classiche e brillanti convenzioni rappresentative introdotte nella storia del pensiero umano.

Innanzitutto possiamo affermare che la realizzazione di una rappresentazione mediante i diagrammi di Eulero–Venn (pur con tutte le possibili "varianti" del procedimento originale) è un processo non banale e tale rappresentazione, se considerata in tutte le sue potenzialità, non è "isomorfa" alla rappresentazione simbolico–proposizionale delle singole relazioni di appartenenza dei vari elementi ai vari insiemi (il ruolo delle metafore è esaminato in: Lakoff & Núñez, 2005). Da qui possiamo essere indotti a chiederci: *che cosa* dunque "rappresentano" queste rappresentazioni così diverse?

Le proposizioni, nota Richard Rorty (1931–2007), sono sequenze di segni e di rumori usate dagli esseri umani nello sviluppo delle pratiche sociali (Rorty, 1994, p. 146; Bagni, in via di pubblicazione) e le stesse rappresentazioni degli "oggetti" della matematica potrebbero essere inquadrate secondo un punto di vista di questo tipo. Ogni modalità mediante la quale noi esprimiamo la matematica ha caratteristiche proprie, può sintetizzare tipi diversi di informazione (le singole relazioni di appartenenza, le inclusioni, le intersezioni etc.) e si collega ai diversi usi (D'Amore, Radford & Bagni, 2006). Non appare insomma corretto pensare alle varie modalità di espressione della matematica come a dei linguaggi sostanzialmente isomorfi, a forme diverse (in quanto basate su convenzioni diverse) di un preteso, universale "linguaggio matematico" in grado di riflettere docilmente i vari "oggetti" della matematica platonisticamente esistenti (Bagni, 2005; stimolante, dal punto di vista critico, è: Duval, 1995).

Ma c'è di più: l'approccio delineato da Eulero può essere collegato (anche dal punto di vista didattico) alla fondamentale nozione di ragionamento diagrammatico. Proponiamo una lunga citazione di Charles Sanders Peirce (1839–1914) da *Pensiero e scrittura* (MS 956, riportato in: Marietti, 2005):

> «Le due parole *logica* e *ragione* hanno origine da due opposte concezioni della natura del pensiero. Logica, da *lògos*, che significa *parola*, mentre *ragione*, incorpora l'idea greca che il ragionamento non possa venir portato avanti senza il linguaggio. Ragione, dal latino *ratio*, che in origine indica un conto, implica che il ragionamento sia una questione di computazione, che richiede non parole bensì qualche tipo di diagramma o abaco o figure. La logica formale moderna, specialmente la logica dei relativi, mostra che la concezione greca è sostanzialmente erronea, e che quella romana è sostanzialmente corretta. Le parole, sebbene indubitabilmente necessarie al pensiero già sviluppato, giocano un ruolo solo secondario nel processo; mentre il diagramma, o icona, che può venire manipolato e sul quale si possono fare esperimenti, è importantissimo. I diagrammi sono stati sempre usati in logica, fin dal tempo di Aristotele; e nessun ragionamento complicato può venir eseguito senza di loro. L'algebra ha le sue formule, che sono un tipo di diagramma. E a cosa servono questi diagrammi? Servono per compierci sopra esperimenti. I risultati di questi esperimenti sono spesso assolutamente sorprendenti. […] Tutto il ragionamento è sperimentazione, e tutta la sperimentazione è ragionamento. Se le cose stanno così, la conclusione per la filosofia è importantissima, vale a dire che davvero non esiste ragionamento che non abbia la natura del ragionamento diagrammatico, o matematico; e dunque non dobbiamo ammettere alcun concetto che non sia suscettibile di venire rappresentato in forma diagrammatica. Idee troppo pompose per essere espresse in diagrammi non sono altro che spazzatura per gli scopi della filosofia. […] Il buon ragionamento ha a che fare con forti immagini visive. Le idee auditive sono la fonte della maggior parte del pensiero scorretto».

È molto importante sottolineare che per Peirce (Marietti, 2001, p. 65)

> «la matematica, come ogni altra nostra conoscenza, ha la propria origine in un atto di osservazione. […] Anche in matematica, così come in ogni altra disciplina conoscitiva, non tutto scaturisce dal pensiero umano e condivide la natura formale del concetto. Vi è invece un ineliminabile elemento materiale, che rende la matematica, al pari delle altre discipline, una scienza osservativa. Solo il singolo individuo, il diagramma, può essere osservato. Solo su questo, e non sul concetto generale, è possibile intervenire con un'*azione*».

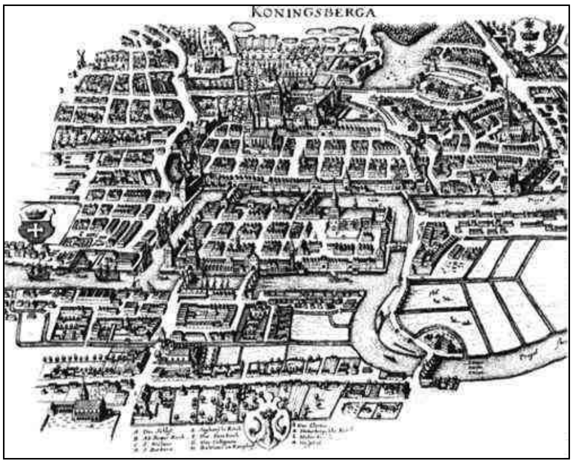
Quest'ultima annotazione è certamente interessante: il diagramma (e pensiamo ai cerchi euleriani, tradotti nelle *"patates"* sopra ricordate da Drouhard) rende possibile un'azione del matematico, dello studente, dell'insegnante sul concetto (nota Marietti, 2001, p. 64, che «il lavoro del matematico si svolge sopra un diagramma particolare. Ma, se questo sarà stato costruito secondo i dettami delle premesse generali, e se inoltre nessun carattere individuale eccetto quelli comuni all'intero ambito di generalità sarà stato utilizzato nel ragionamento, le conclusioni raggiunte non potranno che risultare valide per qualsiasi elemento del dominio concettuale di partenza»; si veda: Kant, 1976, p. 714). L'uso del diagramma consente un'esemplificazione spesso indispensabile per l'attività matematica (Marietti, 2001, pp. 63–64):

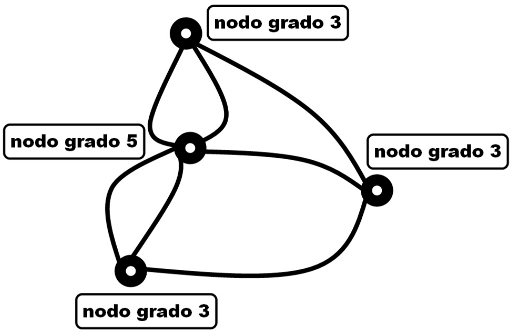
> «Il diagramma, strumento principe della matematica, non è un concetto generale, volto a raffigurare i tratti comuni di una pluralità di enti matematici. Piuttosto, esso è un'immagine singolare dello specifico stato di cose investigato. Per usare una formula più puntuale, definiamo allora il diagramma come "un sistema di elementi individuali in relazione tra loro". È con degli individui che il matematico ha a che fare quando lavora alle proprie strategie, costruisce una figura supplementare, modifica il sistema di relazioni iniziale. […] Ora, però, quando la catena inferenziale sarà portata a termine, l'argomento si riapproprierà dei termini generali di partenza, e il teorema dimostrato potrà a buon diritto essere dichiarato valido».

Riteniamo che queste considerazioni non possano che confermare l'importanza primaria delle rappresentazioni nella matematica in generale e nei processi di insegnamento–apprendimento in particolare (il "ragionamento diagrammatico" ispirato dall'approccio peirceano ha trovato alcune applicazioni molto interessanti in didattica della matematica; indichiamo ad esempio: Dörfler, 2005) e i diagrammi di Eulero possono chiaramente essere interpretati alla luce di questo quadro teorico (si vedano le note originali sull'argomento in: Peirce, 2003, 4.368, e i commenti in: Ferrigni, 2002 e Marietti, 2001, p. 150, anche se non concordiamo con l'osservazione espressa dall'autrice nella nota 84 a proposito della distinzione tra diagrammi di Eulero e diagrammi di Venn; interessante è inoltre un confronto ideale con il *Tractatus*: Wittgenstein, 1998, 2.181 e 2.182, p. 31).

7. CONCLUSIONI

Abbiamo illustrato, nelle pagine precedenti, soltanto una minima parte non già delle idee del grande Eulero, bensì delle sue idee esplicitamente collegabili alla didattica della matematica dei nostri giorni. Moltissimi altri argomenti avrebbero potuto dunque essere citati e approfonditi: la formula per i poliedri, il celebre problema dei ponti di Königsberg al quale si fanno risalire le radici stesse della Teoria dei Grafi…





L'*Opera Omnia* di Eulero, pubblicata da Birkhäuser (Basilea), iniziata nel 1911, è giunta a 84 volumi (e ancora non è stata completata…):

Serie I – Opera Mathematica (30 volumi)
Serie II – Opera Mechanica et Astronomica (32 volumi)
Serie III – Opera Physica, Miscellanea. (12 volumi)
Serie IV – Commercium Epistolicum (10 volumi)

Nel 1937, Eric T. Bell (1883–1960) scriveva:

«Ancora oggi, gran parte di quello che si insegna nei corsi universitari di matematica ha in sostanza l'impronta di Eulero: per esempio, la discussione

> delle sezioni coniche e delle quadriche nello spazio a tre dimensioni, partendo dal punto di vista unificato fornito dall'equazione di secondo grado, o la questione delle annalità e tutto ciò che ne deriva (assicurazioni, pensioni di vecchiaia etc.), messa da Eulero nella forma oggi familiare» (Bell, 1990, p. 151).

Eulero fu, per Bell,

> «il matematico più prolifico della storia [e] scrisse le sue famose dissertazioni con la facilità con cui uno scrittore dall'agile penna scrive una lettera per un amico. La cecità totale che lo afflisse durante gli ultimi diciassette anni di vita non rallentò il ritmo della sua attività; al contrario, la perdita della vista affinò le sue percezioni nel mondo interno della sua immaginazione» (Bell, 1990, p. 140).

Non c'è matematico che, dal Settecento ad oggi, abbia omesso di riconoscere i meriti di Eulero: Pierre Simon de Laplace (1749–1827) ripeteva ai propri allievi: «Lisez Euler, c'est notre maitre à tous!» e Carl Friedrich Gauss (1777–1855) affermò (Struik, 1981, p. 160):

> «lo studio delle opere di Euler rimane la miglior scuola nei diversi campi della matematica e non può essere rimpiazzato da nient'altro».

L'autore ringrazia vivamente Claudio Bernardi dell'Università di Roma "La Sapienza" e Jean–Philippe Drouhard dell'Università di Nizza

Bibliografia

Bagni, G.T.: 2005, 'The historical roots of the limit notion. Cognitive development and development of representation registers'. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 5, 4, 453–468.

Bagni, G.T.: 2006–a, *Linguaggio, storia e didattica della matematica*. Pitagora, Bologna.

Bagni, G.T.: 2006–b, 'Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory'. *Educational Studies in Mathematics* 62, 3, 259–280.

Bagni, G.T.: 2007, *Simboli, parole, artefatti, figure: rappresentare la matematica*. Aracne, Roma.

Bagni, G.T.: in via di pubblicazione, 'Richard Rorty (1931–2007) and his legacy for mathematics educators'. *Educational Studies in Mathematics.*

Baron, M.E.: 1969, 'A note on the historical development of logic diagrams: Leibniz, Euler, and Venn'. *Mathematical Gazette* 53, 113–125.

Bell, E.T.: 1990, *I grandi matematici*. Sansoni, Firenze (*Men of Mathematics.* Simon and Schuster, New York 1937).

Chilakamarri, K.B., Hamburger, P. & Pippert, R.E.: 1996, 'Venn diagrams and planar graphs'. *Geometriae Dedicata* 62, 73–91.

D'Amore, B., Radford, L. & Bagni, G.T.: 2006, 'Ostacoli epistemologici e prospettive socioculturali'. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* 29B, 1, 11–40.
Dörfler, W.: 2005, 'Diagrammatic Thinking: Affordance and Constraints'. In: Hoffmann, M., Lenhard, J. & Seeger, F. (a cura di), *Activity and Sign–Grounding Mathematics Education*. Springer, New York, 57–66.
Duval, R.: 1995, *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Lang, Paris.
Edwards, A.W.F.: 2004, *Cogwheels of the mind: the story of Venn diagrams*, Johns Hopkins University Press, Baltimore and London.
Euler, L.: 1787, *Lettere ad una principessa d'Alemagna sopra diversi soggetti di fisica e di filosofia*, Ferres, Napoli (prima edizione italiana; seconda edizione dopo quella originale, *Lettres à une princesse d'Allemagne*, 1772).
Euler, L.: 1828, *Elements of Algebra*. Longman. London.
Euler, L.: 2006, *Elements of Algebra*. Sangwin, C.J. (a cura di). Tarquin, Stradbroke (UK).
Euler, L.: 2007, *Lettere a una Principessa tedesca*. I–II. Introduzione di G. Cantelli. Bollati Boringhieri, Torino (prima edizione: 1958).
Ferrigni, M.: 2002, 'Peirce e i diagrammi di Eulero-Venn'. *Dianoia* 7, 205-231.
Grünbaum, B.: 1975, 'Venn diagrams and independent families of sets'. *Mathematics Magazine* 48, 12–23.
Kant, I.: 1976, *Critica della ragion pura*. Colli, G. (a cura di). Bompiani, Milano (*Kritik der reinen Vernunft*. Hartknoch, Riga 1787, poi in *Kants Gesammelte Schriften*. Reiner, Berlin 1902-1969).
Marietti, S.: 2001, *Icona e diagramma. Il segno matematico in Charles Sanders Peirce*. LED, Milano.
Marietti, S.: 2005, Charles Peirce. Pensiero e scrittura. *Rivista di filologia cognitiva*, febbraio. http://w3.uniroma1.it/cogfil/peircei.html
Olds, C.D.: 1968, *Frazioni continue*. Zanichelli, Bologna (*Continued Fractions*. Rando House, New York 1963).
Peirce, Ch.S.: 2003, *Opere*. Bonfantini, M.A. (a cura di). Bompiani, Milano (*Collected Papers*. I-VIII. Harvard University Press, Cambridge, Mass. 1931-1958).
Rorty, R.: 1994, *La svolta linguistica*. Garzanti, Milano (*Twenty–Five Years After*. The University of Chicago, Chicago 1992).
Struik, D., 1981, *Matematica: un profilo storico*. Il Mulino, Bologna 1981 (*A Concise History of Mathematics*. Dover, New York 1948).
Venn, J.: 1880, 'On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasonings'. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 9, 1–18.
Wittgenstein, L.: 1998, *Tractatus logico-philosophicus e Quaderni 1914–1916*. Einaudi, Torino (*Tractatus logico-philosophicus*. Routledge & Kegan Paul, London 1922. *Notebooks 1914-1916*. Blackwell, Oxford 1961).

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it