

I logaritmi nel Settecento e la soluzione euleriana a trecento anni dalla nascita di Leonhard Euler

Giorgio T. Bagni

Riassunto La celebre formula euleriana $e^{i\omega} = \cos \omega + i \cdot \sin \omega$ consentì ai matematici del XVIII secolo di chiudere l'annosa controversia sui logaritmi dei numeri negativi, dibattito che ebbe origine da una lettera di Gottfried Wilhelm Leibniz a Johann Bernoulli (16 marzo 1712). Nel presente articolo riassumiamo tale dibattito anche considerando la descrizione data di esso dal matematico udinese Francesco Maria Franceschinis.

Abstract The celebrated Euler's formula $e^{i\omega} = \cos \omega + i \cdot \sin \omega$ allowed 18th century mathematicians to close the debate about logarithms of negative numbers, a debate dating back to a letter by Gottfried Wilhelm Leibniz to Johann Bernoulli (march 16th, 1712). In this paper we summarise the debate taking into account its description provided by the mathematician Francesco Maria Franceschinis of Udine.

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine

*Per ricordare
Laura Piva Pradella (1922–2007)*

Introduzione

Il nome di Leonhard Euler, *Princeps Mathematicorum* nato trecento anni fa, il 15 aprile 1707, è accostato ad uno dei periodi più vivaci dello sviluppo della matematica, un'epoca che vide Eulero tra i più importanti e fecondi protagonisti (Langer, 1935). Renderemo omaggio al grande matematico di Basilea proponendo alcune considerazioni storiche sui logaritmi, con particolare riferimento al dibattito settecentesco sulla natura dei logaritmi dei numeri negativi (Naux, 1971; Giuntini, 1984; Bagni, 1994). Nel presente articolo, dopo aver ripercorso alcuni momenti dell'introduzione dei logaritmi, riassumeremo le posizioni degli studiosi che intervennero nell'aspra "controversia" (Bourbaki, 1963) ed evidenzieremo infine la decisiva posizione di Eulero che pose fine a tali discussioni.

Nella storia dei logaritmi (Curtze, 1868; Chuquet, 1880) il problema della natura dei logaritmi dei numeri negativi viene sollevato in una lettera di Gottfried Wilhelm Leibniz a Johann Bernoulli, datata 16 marzo 1712 (Leibniz, 1856; Giusti, 1982) e vede coinvolti alcuni dei più celebri matematici del secolo. Gli studiosi sono infatti divisi in due schieramenti contrapposti: da un lato, molti sostengono l'opinione di Leibniz, poi ripresa da Eulero (1749) e in Italia, tra gli altri, da Fontana (1783 e 1799) e da Franceschinis (1787), secondo la quale i logaritmi dei numeri negativi devono essere interpretati come quantità immaginarie. Contrario a questa opinione è un altrettanto folto gruppo di celebri matematici, guidati da Johann Bernoulli, il quale propone di considerare reali i logaritmi dei numeri negativi, e di definirli attraverso l'uguaglianza (Loria, 1929–1933; Bagni, 1996, II):

$$\log(-x) = \log(+x)$$

in base all'osservazione, considerata decisiva dai Bernoulliani:

$$2 \cdot \log(-1) = \log(-1)^2 = \log(+1)^2 = 2 \cdot \log(+1)$$

Tra i molti matematici che si dichiarano a favore di Bernoulli ricordiamo Caldani (1782 e 1791), d'Alembert (Franceschinis, 1787; Kline, 1991), Ferroni (1782), Vincenzo e Giordano Riccati (G. Riccati, 1778a e 1778b; V. Riccati, 1789; Bagni, 1993 e 1994), figli di Jacopo Riccati.

Come anticipato, sarà Eulero nel 1747 a chiarire definitivamente la questione dei logaritmi dei numeri negativi, applicando la celebre formula:

$$e^{i\omega} = \cos \omega + i \cdot \sin \omega$$

(già sostanzialmente nota a Cotes e a De Moivre: Boyer, 1982, p. 513). Ponendo, in essa, $\omega=\pi$, infatti, si ottiene direttamente: $e^{i\pi} = -1 \Rightarrow \log_e(-1) = i\pi$. Eulero proverà che ciascun numero ammette, in ambito complesso, infiniti logaritmi (infatti dalla $e^{i\omega} = \cos \omega + i \cdot \sin \omega$ con $k \in \mathbb{Z}$ segue $\log_e a = b + 2k\pi \cdot i$); egli utilizzò inoltre l'uguaglianza citata per calcolare i logaritmi dei numeri complessi, provando che essi sono a loro volta complessi e mostrando in tal modo la chiusura del corpo complesso rispetto al logaritmo e all'esponenziale.

Con l'opera euleriana la tesi che vuole immaginari i logaritmi dei numeri negativi trova la sua consacrazione, nonostante la residua presenza di qualche resistenza mossa ancora per alcuni anni dagli studiosi di tradizione bernoulliana. A tali contestazioni si contrappone il Barnabita udinese Francesco Maria Franceschinis (1756–1840), il quale nel 1787 pubblica la memoria *De' logaritmi de' numeri negativi* che esamineremo nel terzo paragrafo del presente lavoro, non senza aver proposto una sintetica presentazione storica delle fasi di introduzione del logaritmo.

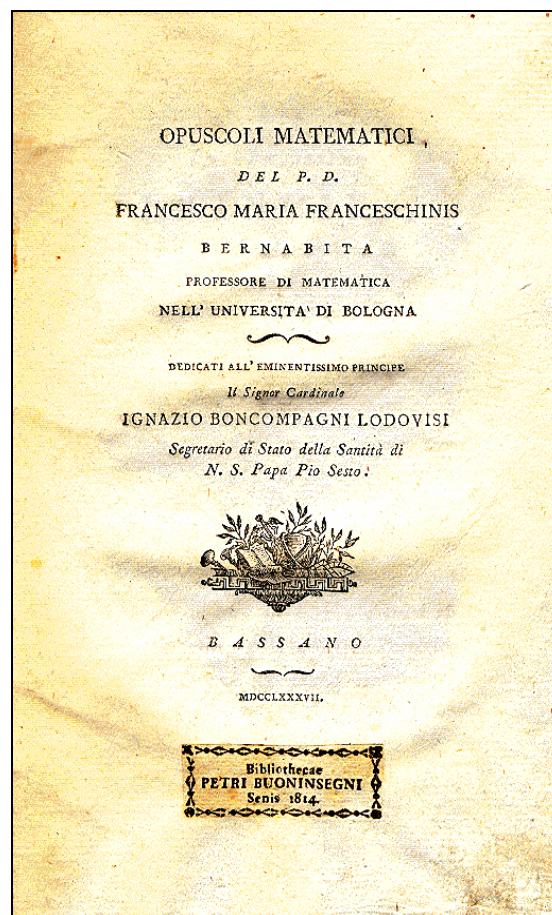
I logaritmi: radici storiche

La nascita dei logaritmi e i primi studi condotti sulle loro proprietà e sulle loro applicazioni possono essere collocati in un periodo di tempo ben individuabile e relativamente ristretto: la prima metà del Seicento. I logaritmi furono infatti ideati nel 1594 dallo scozzese John Napier (1550–1617), il quale pubblicò due trattati sull'argomento soltanto nel 1614 e nel 1619. Nel 1615 Henry Briggs (1561–1631) segnalò l'opportunità di adottare la base 10 e diede una definizione di logaritmo assai chiara. Indipendentemente da Napier e da Briggs, anche lo svizzero Joost Bürgi (1552–1632), un collaboratore di Johannes Kepler (1571–1630), ideò i logaritmi nei primi anni del XVII secolo; egli rese però pubblici i propri risultati, sostanzialmente analoghi a quelli di Napier, soltanto nel 1620.

Già Michael Stifel (1487–1567), nella propria *Aritmetica integra*, aveva osservato che i termini di una progressione geometrica $1, a, a^2, a^3, \dots$ possono essere posti in corrispondenza con gli esponenti, in progressione aritmetica, $0,$

1, 2, 3, ... in modo che il prodotto di due termini della progressione geometrica corrisponda alla somma degli esponenti di tali termini (Kline, 1991, I, p. 299), osservazione che troviamo anche nel *Triparty en la science des nombres* di Nicolas Chuquet (seconda metà del XV sec.).

Nel 1787, nella memoria sopra citata, inclusa in *Opuscoli Matematici*, una raccolta di note pubblicata a Bassano, anche Franceschinis esordisce con la presentazione dell'isomorfismo tra la progressione aritmetica degli esponenti e la progressione geometrica delle potenze:

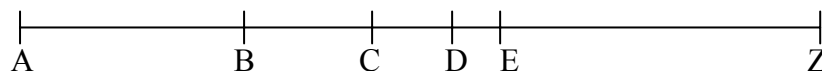


“I logaritmi [...] altro non sono, che i termini di una qualunque progressione aritmetica corrispondenti per ordine ai termini di una qualunque progressione geometrica [...]

Secondo questa idea le due serie sono tra loro indipendenti, onde la stessa progressione aritmetica potrà dare allo stesso tempo la serie de' logaritmi per i termini d'infinite progressioni geometriche diverse: così ogni quantità potrà avere infiniti logaritmi [...] e viceversa ogni quantità potrà essere logaritmo d'infinite quantità diverse" (Franceschinis, 1787, p. 12).

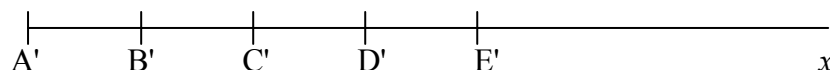
Questa stessa idea aveva guidato anche Napier, il quale era interessato all'introduzione di accorgimenti atti a facilitare i calcoli trigonometrici in astronomia. Nella *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (1614) e nella *Mirifici logarithmorum canonis constructio* (1617) il matematico scozzese espone il proprio metodo.

Napier considera inizialmente il segmento AZ sul quale un punto α si muove dall'estremo A all'estremo Z con velocità proporzionale alla distanza da Z.



Se assumiamo che la velocità del punto mobile sia costante in degli intervalli di tempo uguali e “abbastanza piccoli”, ad esempio AB, BC, CD, ..., fissando in ciascun intervallo la velocità costante assunta nel punto iniziale, si dimostra che le lunghezze AZ, BZ, CZ, DZ, ... risultano in progressione geometrica.

Quindi Napier considera un secondo punto α' che si muove da A' con velocità costante sulla semiretta A'x, in modo che α' parta contemporaneamente ad α e si trovi in B', C', D', ... quando α si trova in B, C, D, ...



Le distanze A'B', A'C', A'D', ... sono in progressione aritmetica e vengono dette da Napier *logaritmi* rispettivamente di BZ, CZ, DZ, ... (il logaritmo di AZ viene posto uguale a 0). Il termine “logaritmo”, coniato da Napier da λόγος e ἀριθμός, significa “numero del rapporto” (Kline, 1991, I, p. 300).

Dal punto di vista didattico può essere utile indicare un esempio del procedimento neperiano. Ammettiamo che l'iniziale segmento AZ sia di lunghezza unitaria (non sarà inutile osservare che questa scelta è ben diversa da quella di Napier, che aveva optato per 10^7 ; le motivazioni pratiche di tale scelta sono discusse in: Boyer, 1982, p. 360; Kline, 1991, I, p. 299) e che ciascun termine della successione AZ, BZ, CZ, ... sia la metà del precedente. Risulta dunque:

$$BZ = 1/2 \quad CZ = 1/4 \quad DZ = 1/8 \quad \dots$$

Siano A'B', A'C', A'D', ... rispettivamente 1, 2, 3, ...

Definendo ora:

A'B' come logaritmo di BZ

A'C' come logaritmo di CZ

A'D' come logaritmo di DZ

...

si scriverà:

$$\log 1/2 = 1$$

$$\log 1/4 = 2$$

$$\log 1/8 = 3$$

...

e la base di tali logaritmi sarà 1/2. Può essere utile ricordare che il procedimento originale portava a considerare invece una base 1/e. Se:

$$N = 10^7 \left(1 - \frac{1}{10^7} \right)^L$$

allora L veniva definito come il “logaritmo” neperiano di N (questa definizione viene ad essere equivalente all’introduzione precedente; i dettagli possono essere visti in: Boyer, 1982, pp. 359–361).

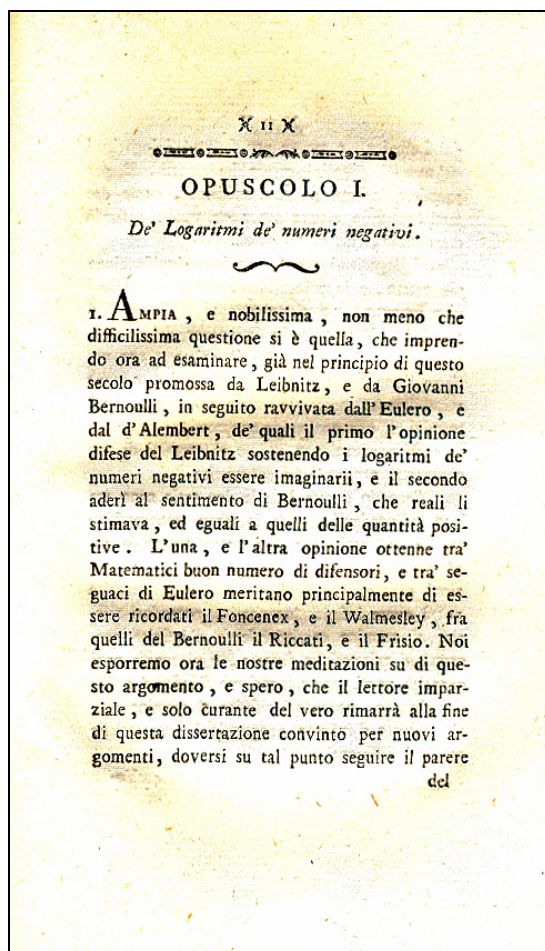
Come anticipato, sarà Briggs a proporre (1615) di utilizzare la base 10 e di definire come logaritmo di un numero l’esponente della potenza di 10 uguale a tale numero.

La “controversia” nella descrizione di Franceschinis

Per inquadrare lo svolgersi della disputa sui logaritmi dei numeri negativi, esaminiamo ora in dettaglio il contenuto dell’opera *De’ logaritmi de’ numeri negativi* di Franceschinis (seguiremo: Bagni, 1994 e il Capitolo XIII di Bagni, 1996, II), in cui l’Autore si proclama assertore della tesi leibniziana–euleriana.

L’udinese Francesco Maria Franceschinis insegnò al Collegio di Bologna, alla Sapienza di Roma, all’Università di Padova e al Collegio di Monza. Nell’opera in esame, come abbiamo sopra ricordato, non diversamente dai matematici del XVII secolo, introduce i logaritmi parlando dei “termini di una

qualunque progressione aritmetica corrispondenti per ordine ai termini di una qualunque progressione geometrica” (Franceschinis, 1787, p. 12). Subito, però, l’Autore osserva che la questione posta in termini così generali necessita di precisazioni (“ma di qual utilità sarebbero i logaritmi, se si prendessero in quella loro generalità?” Franceschinis, 1787, p. 13) e nota: “è dunque necessario che le due progressioni sieno in qualche modo tra loro dipendenti, e perciò sieno determinate” (Franceschinis, 1787, p. 14). Per precisare questa “dipendenza” è necessario fissare due coppie di termini corrispondenti nelle successioni introdotte: in questo modo, suggerisce l’Autore, risulteranno subito determinati “la ragione, e la differenza, e perciò tutti gli altri termini della geometrica, e dell’aritmetica progressione” (Franceschinis, 1787, p. 14).



Dunque si fissano, innanzitutto, rispettivamente in 1 ed in 0 i primi termini delle due successioni, ovvero si suppone (per ogni valore accettabile della base): $\log 1 = 0$.

Dopo aver ricordato le proprietà dei logaritmi (“i quattro [...] Teoremi, che tutto l’utile ne fanno”, Franceschinis, 1787, p. 16), nota l’Autore:

“Ora perché possiamo godere del vantaggio, che nel calcolo ne presentano i logaritmi, cioè onde per essi risalire possiamo alle quantità, è necessario, che tutti sieno presi in uno stesso sistema” (Franceschinis, 1787, p. 17).

E da qui egli passa alla questione ritenuta centrale per quanto riguarda il problema dei logaritmi dei numeri negativi:

“Fissato il rapporto dei due primi termini delle due serie in modo, che tutti i numeri positivi abbiano il loro logaritmo, i numeri negativi il potranno pure avere nel medesimo sistema?” (Franceschinis, 1787, p. 17).

La risposta di Franceschinis è negativa: “dalla genuina, e prima idea de’ Logaritmi deducesi evidentemente non darsi i logaritmi de’ numeri negativi” (Franceschinis, 1787, p. 19). Ecco la motivazione addotta:

“Perché nel sistema medesimo, che i logaritmi inchiude di tutti i numeri positivi, quelli pure si avessero de’ numeri negativi, sarebbe primieramente necessario il poter fingere una progressione geometrica, in cui essendo compresi [...] i numeri positivi possibili potessero pure essere compresi [...] i negativi. Ma questo è impossibile” (Franceschinis, 1787, pp. 19–20).

L’Autore giustifica ciò ricordando che una progressione geometrica di base h e ragione j (con h positivo e diverso da 1 e j intero) non può assumere valori non positivi. “Dove dunque saranno i logaritmi de’ numeri negativi?” si chiede l’Autore (Franceschinis, 1787, p. 21); e subito introduce una tesi proposta, tra gli altri, da d’Alembert:

“Non v’è altro ripiego, che asserire, che il medesimo logaritmo corrisponde al medesimo numero, sia positivo, che negativo. Ciò diffatti procura di persuadere d’Alembert dicendo [...] che la progressione negativa è il complemento della positiva, poiché esse riunite ne danno tutte le medie proporzionali possibili” (Franceschinis, 1787, p. 21).

L’affermazione alla quale l’Autore si riferisce merita attenzione e può essere illustrata attraverso un semplice esempio: sappiamo, infatti, che la “media

proporzionale” tra 1 e 4 è 2; la tesi di d’Alembert porterebbe ad affermare che anche il valore -2 gode della stessa proprietà rispetto a 1 ed a 4, in quanto è:

$$(1) \cdot (4) = (+2) \cdot (+2) = (-2) \cdot (-2)$$

Per confutare l’asserzione di d’Alembert, Franceschinis osserva:

“In una progressione geometrica ciascun termine non ha la sola relazione di essere media proporzionale, lo che a tutti conviene fuori che al primo, e all’ultimo, ma quello altresì di essere estremo, e terza proporzionale, lo che a tutti conviene” (Franceschinis, 1787, p. 21).

Riprendendo l’esempio precedente, infatti, sia $+2$ che -2 possono essere considerati “media proporzionale” tra 1 e 4, ma soltanto il valore positivo, $+2$, può essere considerato “estremo” con 4 ed 8 nella proporzione:

$$2 : 4 = 4 : 8$$

Franceschinis ritiene di poter con ciò affermare l’estraneità delle quantità negative da una progressione geometrica e prosegue nell’esame di un secondo argomento indicato dai sostenitori delle tesi di Bernoulli (l’opinione è espressa, tra gli altri, dallo stesso d’Alembert). Ma il giudizio del matematico udinese è, ancora una volta, negativo:

“Essere cioè $2 \cdot \log 1 = 2 \cdot \log(-1)$, e provarsi dall’essere $1 : (-1) = (-1) : 1$, onde ne nasce $(-1) \cdot (-1) = (+1) \cdot (+1)$ e $2 \cdot \log 1 = 2 \cdot \log(-1)$ (del qual argomento sembrano trionfare i Bernoulliani) trovasi, esaminato a fondo essere insussistente” (Franceschinis, 1787, p. 25).

La ragione di questa opposizione è così spiegata: “poiché da questo, che sia $(-1) \cdot (-1) = (+1) \cdot (+1)$ non si può dedurre, che sia $2 \cdot \log 1 = 2 \cdot \log(-1)$ quando pure non deducasi essere $-1 = 1$, lo che niun buon Matematico mai vorrà” (Franceschinis, 1787, p. 25); l’Autore nota infatti che “siccome [...] nel passaggio delle potenze alle radici conviene usare di molta cautela, questa pure sarà necessaria passando dai logaritmi delle potenze a quelli delle radici” (Franceschinis, 1787, pp. 26–27). Franceschinis sottolinea cioè che per estrarre la radice quadrata di entrambi i membri dell’uguaglianza $(-1) \cdot (-1) = (+1) \cdot (+1)$ siamo tenuti ad imporre opportune condizioni (“usare di molta cautela”) per evitare evidenti assurdità quali $+1 = -1$. E analoghe precauzioni sono necessarie nell’estrazione del logaritmo nell’esempio sopra riportato “perché l’equazione sussista” (Franceschinis, 1787, p. 27).

La curva logaritmica e la posizione di Malfatti

La trattazione prosegue con l'esame della questione della curva logaritmica: sempre in contrasto con d'Alembert, Franceschinis nega che il grafico cartesiano dell'equazione $y = \log x$ possa essere costituita da due rami simmetrici rispetto all'asse delle ordinate; ciò è indicato dal grande pensatore francese e da molti altri sostenitori della realtà dei logaritmi dei numeri negativi, tra i quali gli stessi Riccati (G. Riccati, 1778a e 1778b; V. Riccati, 1789; Bagni, 1993 e 1994). Giordano Riccati (1778a), ad esempio, afferma:

“La vera equazione della Logistica [...] ha due rami affatto simili, e dall'assintoto equidistanti, onde ci sono forniti i logaritmi di' numeri negativi eguali a quelli de' numeri positivi”.

Così replica Franceschinis:

“Come può egli poi proporre il problema della costruzione della logaritmica in modo, che resti esclusa l'idea della progressione geometrica, se questa ne forma la essenza? [...] nella quale progressione geometrica è impossibile il passaggio dal 0 al negativo” (Franceschinis, 1787, pp. 31–32).

Anche altri argomenti sostengono l'opinione dei matematici schierati per la realtà dei logaritmi dei numeri negativi; Franceschinis li presenta e si appresta a confutarli:

“Dalla equazione $dx/x=dy$ crede Bernoulli, e d'Alembert dedursi invincibilmente, darsi i logaritmi de' numeri negativi, ed essere essi eguali ai logaritmi de' numeri positivi, poichè, dicon essi, l'equazione $dx/x = -dx/(-x) = dy$, onde sarà $y = \log x = \log(-x)$ ” (Franceschinis, 1787, p. 37).

Franceschinis non ritiene però decisivo questo argomento e, dopo aver premesso che “l'equazione differenziale non ne dà mai espressamente la natura, e l'andamento della curva, ma solo ne esprime la relazione degli elementi delle coordinate”, sottolinea: “perché il doppio segno delle semiordinate indichi un doppio ramo di curva, è necessario, che questo doppio segno siavi necessariamente inchiuso, né basta, che si possa l'uno per l'altro prendere salvando l'equazione” (Franceschinis, 1787, p. 37).

Per giustificare la propria opinione, l'Autore indica quale controesempio l'equazione differenziale:

$$2dy/y = -dx/x$$

“Se suppongo mutato il segno alla x , l’equazione differenziale non si muta, perché $-dx/x = dx/(-x)$ [...] dunque la curva ha un ramo, che corrisponde alle x negative?” (Franceschinis, 1787, p. 38; analoghi argomenti erano comparsi in uno scambio epistolare tra Leibniz e Johann Bernoulli, pubblicato nelle *Memoirie* dell’Accademia delle Scienze di Parigi del 1702 per la parte bernoulliana e negli *Acta Eruditorum* del 1712 per gli scritti leibniziani: Leibniz, 1856; Kline, 1991, I, pp. 475–476). E subito risponde integrando l’equazione proposta ed ottenendo una funzione in cui, “posta x negativa, y diventa immaginaria. Dunque la curva non può avere un ramo corrispondente ad x negativa”. La conclusione è decisa:

“Così non dovrò poter argomentare un ramo negativo della logaritmica dal trovare, che mutando il segno all’ordinata non si muta l’equazione differenziale della logaritmica” (Franceschinis, 1787, p. 38).

Prima di abbandonare la questione della curva logaritmica, Franceschinis non risparmia un’ulteriore critica alle argomentazioni bernoulliane:

“Di più il raziocinio del Bernoulli parmi che supponga in certo modo quello che è in questione. Diffatti come può egli conchiudere essere $\log x = \log(-x)$ dall’essere $dx/x = -dx/(-x)$, se non suppone $-dx/(-x)$ essere il differenziale del logaritmo di $-x$, e perciò darsi tale logaritmo, ed essere reale, giacché reale è sicuramente il suo differenziale?” (Franceschinis, 1787, pp. 38–39).

La trattazione prosegue con l’esame di un’altra questione collegata ad altre annotazioni di d’Alembert. Questi, riferendosi all’equazione esponenziale, sottolinea che “ci possono essere infiniti valori di x , che ne diano un doppio valore di y ” (Franceschinis, 1787, p. 43); ad esempio, risulta:

$$\begin{aligned} (+2)^2 &= (-2)^2 = 4 \\ (+2)^4 &= (-2)^4 = 16 \end{aligned}$$

...

La risposta di Franceschinis è la seguente:

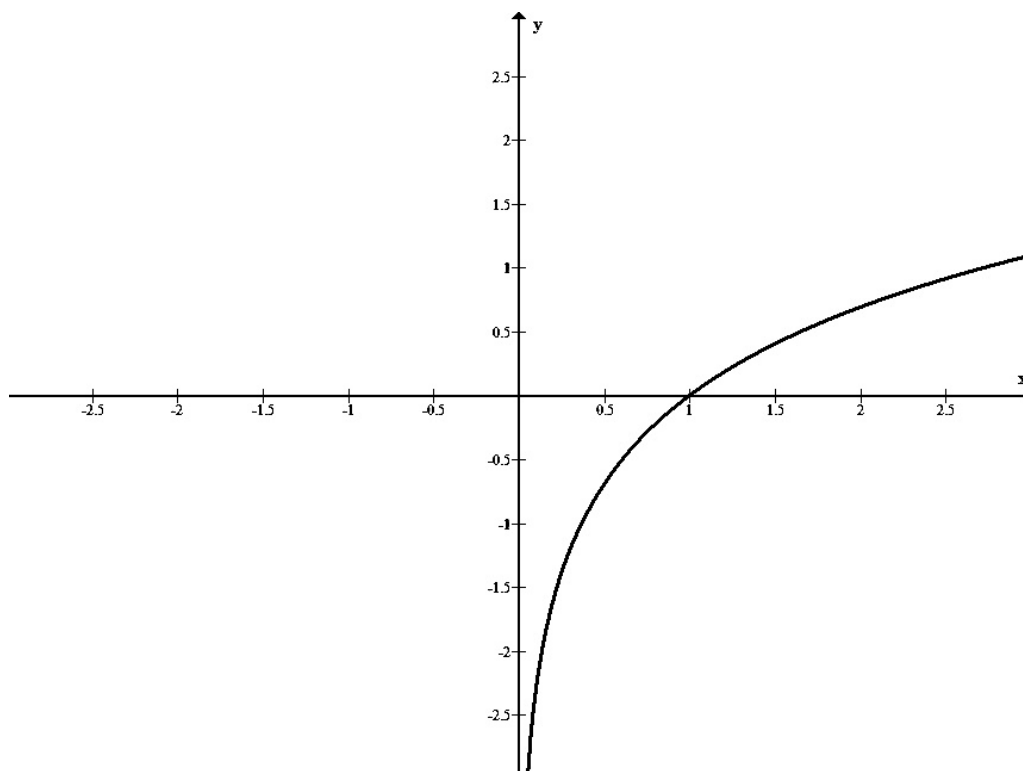
“Io credo, che l’equazione [...] non dia pel ramo negativo, che dei punti conjugati, e sconnessi, e non continuati, talmente che vi sono infiniti punti dell’asse, a cui non corrisponde ordinata negativa [...] onde l’equazione [...] non è generale, e non si adatta a tutti i punti dell’asse, e perciò il ramo negativo della curva non può essere composto di punti uniti, ma solo di punti divisi” (Franceschinis, 1787, pp. 43–44).

Tra i molti matematici che hanno preso posizione nella controversia in esame merita particolare attenzione Giovanni Francesco Giuseppe Malfatti (1731–

1807), un allievo di Vincenzo Riccati nello studio bolognese. Malfatti, come vedremo, contesta la posizione del proprio maestro sulla realtà di tali logaritmi (Malfatti, 1795; Giusti, 1982). Tuttavia nell'occuparsi dell'argomento bernoulliano che sostiene la simmetria della curva logaritmica rispetto all'asse delle ordinate (argomento sostenuto anche dai Riccati), assume una posizione di mediazione, forse (nota Giusti, 1982) per confermare il rispetto e la gratitudine nei confronti del proprio maestro.

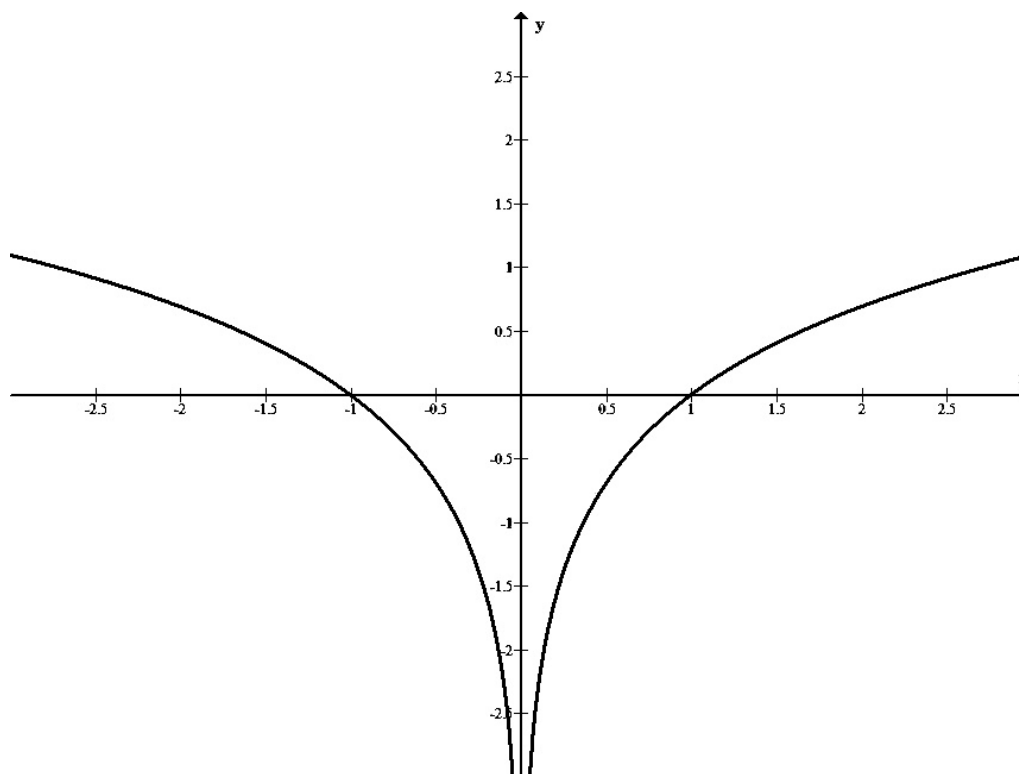
In sostanza, Malfatti sottolinea che la curva logaritmica di equazione:

$$y = \log x$$



non può essere considerata coincidente con la curva di equazione:

$$2y = \log x^2$$



essendo quest'ultima equazione esprimibile da (Malfatti, 1795; Giusti, 1982):

$$\begin{aligned} \text{se } x > 0, \quad y &= \log(+x) \\ \text{se } x < 0, \quad y &= \log(-x) \end{aligned}$$

ovvero da

$$y = \log|x|$$

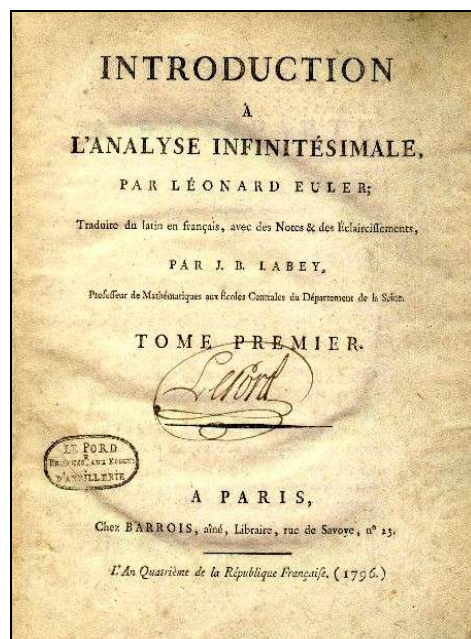
I due rami della curva, invocati dai sostenitori delle tesi di Bernoulli (e, tra di essi, anche dal maestro di Malfatti, Vincenzo Riccati), risultano quindi propri soltanto del grafico di quest'ultima equazione, la quale tuttavia non può essere collegata all'originale curva logaritmica.

Ci limitiamo ad osservare che, dal punto di vista didattico, le idee di Malfatti sono interessanti: l'identificazione di $y = \log x$ e di $2y = \log x^2$ fornisce lo spunto per considerazioni rilevanti a proposito di alcune analogie improprie che a volte caratterizzano il comportamento degli studenti (Bagni, 2000).

Il passo decisivo: Eulero

Torniamo ora al ruolo certamente essenziale (e conclusivo) avuto nella “controversia” da Leonhard Euler. Uno scambio epistolare sulla questione dei logaritmi dei numeri negativi avviene tra il giovane Eulero e Johann Bernoulli già tra il 1727 e il 1731 (Kline, 1991, I, p. 476; alcune idee riconducibili a Eulero sono già state discusse nell’interpretazione di Franceschinis). In generale l’importanza della posizione del sommo matematico di Basilea è tale da suggerirci di dedicare ad essa la sezione finale del nostro lavoro.

Seguiremo qui la fondamentale *Introduction à l’analyse infinitésimale*, Barrois, Paris 1796, in due volumi (prima edizione francese di *Introductio in analysin infinitorum*, pubblicata da Bosquet, Lausanne 1748), una delle opere più significative di Eulero.



L’introduzione dei logaritmi, nel grande trattato euleriano, si trova alle pagine 72–73 e riflette un’impostazione didatticamente diretta ed efficace. Come

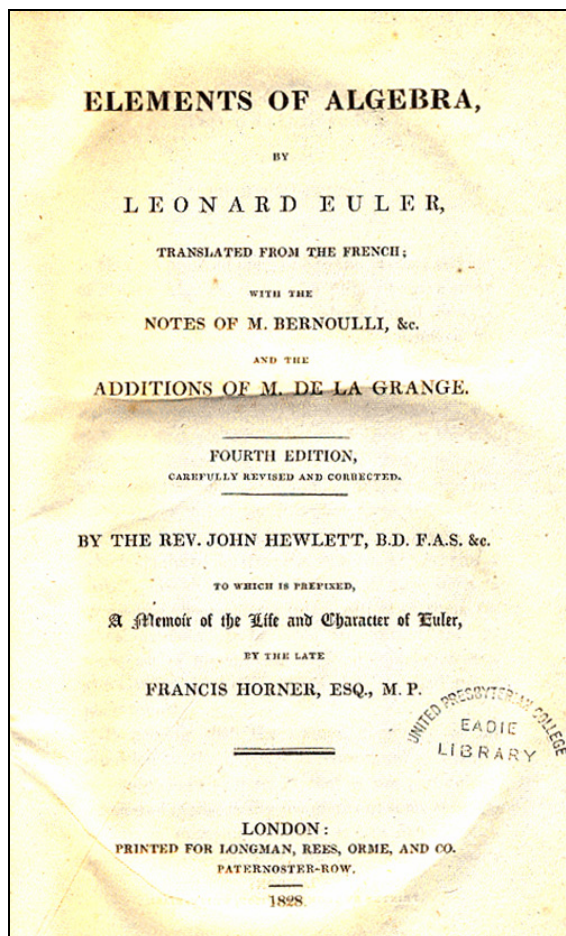
si può notare nelle due immagini seguenti, Eulero definisce modernamente il logaritmo di un numero nella base assegnata a come l'esponente al quale elevare la base data per ottenere tale numero (in ciò ispirandosi ad alcune idee di Briggs ed eludendo l'introduzione basata sulle successioni geometrica e aritmetica sopra ricordata nella versione originale di Napier, ripresa ad esempio da Franceschinis).

102. Si étant donné le nombre a , on peut conclure de chaque valeur de x , celle de y ; réciproquement ayant pris pour y une valeur quelconque positive, on conçoit qu'il existe pour x un nombre convenable pour que $a^x = y$; cette valeur de x , en tant qu'elle peut être regardée comme une fonction de y , s'appelle ordinairement le LOGARITHME de

ET DES LOGARITHMES. 73
de y . La théorie des logarithmes suppose donc l'existence d'un nombre constant représenté par a , que pour cette raison on appelle la *Base* des logarithmes. Cette base une fois choisie, le logarithme d'un nombre y n'est autre chose que l'exposant de la puissance a^x égale à ce nombre y . On a coutume d'indiquer le logarithme du nombre y de cette manière ly . Conséquemment, si $a^x = y$, $x = ly$. Il s'en suit de-là que la base logarithmique, quoique arbitraire, doit cependant être plus grande que l'unité, & qu'il n'y a que les nombres positifs qui puissent avoir des logarithmes réels.

Boyer (1982, p. 517) sottolinea esplicitamente l'importanza e la pratica modernità dell'impostazione data da Eulero all'argomento. Ed è interessante notare che anche in *Algebra*, opera di carattere didattico risalente al 1770, Eulero introduce i logaritmi in termini analoghi (per l'*Algebra* faremo riferimento all'edizione inglese del 1828, Longman, London; è interessante notare che le appendici sono curate da Lagrange. Di questa traduzione, curata da J. Hewlett

nel 1822, sono note diverse edizioni: per quanto riguarda le versioni in italiano, segnaliamo: *Elementa algebrae Leonardi Euleri ex gallica in latinam linguam versa, cum notis et additionibus*, 2 vv., Jo. Antonii Pezzana, Venezia 1790).



Alle pagine 63–64 dell’edizione sopra citata di *Algebra* (Euler, 1828; si veda anche l’edizione dei nostri giorni: Euler, 2006) troviamo la chiara e moderna introduzione euleriana dei logaritmi; il lettore la può seguire nelle due immagini seguenti.

CHAP. XXI.

Of Logarithms in general.

220. Resuming the equation $a^b = c$, we shall begin by remarking that, in the doctrine of Logarithms, we assume for the root a , a certain number taken at pleasure, and suppose this root to preserve invariably its assumed value. This being laid down, we take the exponent b such, that the power a^b becomes equal to a given number c ; in which case this exponent b is said to be the *logarithm* of the number c . To express this, we shall use the letter L . or the initial letters *log.* Thus, by $b = L. c$, or $b = \log. c$,

we mean that b is equal to the logarithm of the number c , or that the logarithm of c is b .

221. We see then, that the value of the root a being once established, the logarithm of any number, c , is nothing more than the exponent of that power of a , which is equal to c : so that c being $= a^b$, b is the logarithm of the power a^b . If, for the present, we suppose $b = 1$, we have 1 for the logarithm of a^1 , and consequently $\log. a = 1$; but if we suppose $b = 2$, we have 2 for the logarithm of a^2 ; that is to say, $\log. a^2 = 2$, and we may, in the same manner, obtain $\log. a^3 = 3$; $\log. a^4 = 4$; $\log. a^5 = 5$, and so on.

222. If we make $b = 0$, it is evident that 0 will be the logarithm of a^0 ; but $a^0 = 1$; consequently $\log. 1 = 0$, whatever be the value of the root a .

Suppose $b = -1$, then -1 will be the logarithm of a^{-1} ; but $a^{-1} = \frac{1}{a}$; so that we have $\log. \frac{1}{a} = -1$, and in the same manner, we shall have $\log. \frac{1}{a^2} = -2$; $\log. \frac{1}{a^3} = -3$; $\log. \frac{1}{a^4} = -4$, &c.

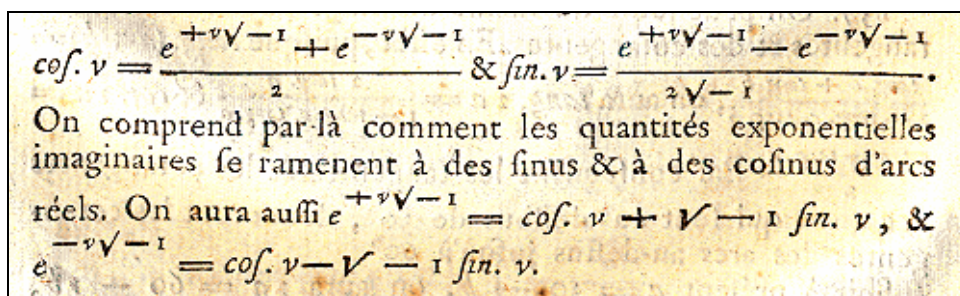
Torniamo ora all'*Introductio*. Per quanto riguarda le funzioni esponenziale e logaritmica (lo studio della prima da parte di Wallis, Newton, Leibniz e Johann Bernoulli aveva permesso di evidenziare come la seconda ne fosse l'inversa:

Kline, 1991, I, p. 470), era stato William Jones (1675–1749) a proporre un'introduzione sistematica del logaritmo come funzione. Eulero definisce le due funzioni nei termini seguenti (che qui riportiamo nella nostra notazione moderna):

$$e^x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{n} \right)^n$$

$$\log x = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(x^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$$

È alla pagina 102 dell'*Introductio*, alla quale si riferisce l'immagine seguente, che possiamo finalmente incontrare la formula chiave per la decisiva soluzione della controversia sui logaritmi dei numeri negativi.



Come precedentemente notato, infatti, la

$$e^{i\omega} = \cos \omega + i \cdot \sin \omega$$

(con la posizione $\omega=\pi$) porta immediatamente alla celebre formula

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

una scrittura affascinante, in cui compaiono cinque grandi protagonisti dell'intera matematica:

$$e, i, \pi, 1, 0$$

e che consente di ricavare direttamente il logaritmo di -1 .

Per ottenere la formula $e^{i\pi} + 1 = 0$ è dunque sufficiente dare una giustificazione della $e^{i\omega} = \cos \omega + i \cdot \sin \omega$, cosa che lo stesso Eulero fa introducendo, come visto nella precedente riproduzione, le formule:

$$\cos \omega = \frac{e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{2}$$

$$\sin \omega = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}$$

Una giustificazione si può basare sul seguente sviluppo in serie di Taylor:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

da cui per $x = i\omega$ risulta:

$$e^{i\omega} = 1 + i\omega - \frac{\omega^2}{2!} - \frac{i\omega^3}{3!} + \frac{\omega^4}{4!} + \frac{i\omega^5}{5!} - \frac{\omega^6}{6!} - \frac{i\omega^7}{7!} + \frac{\omega^8}{8!} + \dots$$

Tenendo presente inoltre i ben noti sviluppi (ricordiamo peraltro che il contesto storico-culturale in cui operava Eulero non era caratterizzato dalla nostra attenzione per il “rigore” formale, ad esempio per la valutazione delle questioni di convergenza):

$$\cos \omega = 1 - \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^4}{4!} - \frac{\omega^6}{6!} + \frac{\omega^8}{8!} + \dots$$

$$\sin \omega = \omega - \frac{\omega^3}{3!} + \frac{\omega^5}{5!} - \frac{\omega^7}{7!} + \frac{\omega^9}{9!} + \dots$$

si giunge alla $e^{i\omega} = \cos \omega + i \cdot \sin \omega$, dunque alla formula che permise ad Eulero di chiudere definitivamente la “controversia dei logaritmi dei numeri negativi”.

Bibliografia

- Bagni, G.T., 1993, *Vincenzo, Giordano e Francesco Riccati e la matematica del Settecento*, Teorema, Treviso
- Bagni, G.T., 1994, Una “controversia” della matematica del Settecento: i logaritmi dei numeri negativi, *Periodico di Matematiche*, VII, 2, 2/3, 95–106

- Bagni, G.T., 1996, *Storia della Matematica*, I–II, Pitagora, Bologna
- Bagni, G.T., 2000, «Simple» rules and general rules in some High School students' mistakes, *Journal für Mathematik Didaktik*, 21, 2, 124–138
- Bourbaki, N., 1963, *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano (*Éléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris 1960)
- Boyer, C.B., 1982, *Storia della matematica*, Mondadori, Milano (*A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968)
- Caldani, P.M., 1782, *Della proporzione bernoulliana fra il diametro, e la circonferenza del circolo e dei logaritmi*, Lelio Della Volpe, Bologna
- Caldani, P.M., 1791, *Riflessioni sopra un opuscolo del P. Franceschinis Bernabita, dei logaritmi dei numeri negativi stampato in Bassano*, Società Tipografica, Modena
- Chuquet, N., 1880, Le Triparty en la Science des Nombres, edizione curata da A. Marre. *Bull. bibl. storia math.*, XIII, 555–659 e 693–814
- Curtze, M., 1868, Über die Handschrift 'Algorismes proportionum magistri Nicolay Orem', *Zeitschr. für Math. und Phys.*, XIII, Suppl., 64–79 e 101–104
- Euler, L., 1749, De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires, *Mem. Acad. des Sciences de Berlin*, 5
- Euler, L., 1796, *Introduction a l'analyse infinitésimale*, Barrois, Paris (prima edizione francese di *Introductio in analysin infinitorum*, Bosquet, Lausanne 1748)
- Euler, L., 1828, *Elements of Algebra*, Longman, London
- Euler, L., 2006, *Elements of Algebra*, Sangwin, C.J. (a cura di), Tarquin, Stradbroke (UK)
- Ferroni, O., 1782, *Magnitudinum exponentialium logarithmorum et trigonometria sublimis theoria nova methodo pertractata*, Allegrini, Firenze
- Fontana, G., 1783, Sopra i logaritmi delle quantità negative e sopra gli immaginarj, *Mem. della Soc. Ital.*, I, 1782, 183
- Fontana, G., 1799, Sopra la pretesa distinzione fra il nulla reale ed il nulla immaginario, *Mem. della Soc. Ital.*, VIII, 174
- Franceschinis, F.M., 1787, *Opuscoli matematici del P. D. Francesco Maria Franceschinis Bernabita*, Remondini, Bassano
- Giuntini, S., 1984, Una discussione sulla natura dello zero e sulla relazione fra numeri immaginari e numeri reali (1778–1799), *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, 4, 1, 25–63

- Giusti, E., 1982, Problemi e metodi di analisi matematica nell'opera di Gianfrancesco Malfatti, *Atti del Convegno su Gian Maria Malfatti*, Ferrara, 23–24 ottobre 1981, 37–56
- Kline, M., 1991, *Storia del pensiero matematico*, I–II, Einaudi, Torino (ediz. originale: *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press., New York, 1972)
- Langer, R.E., 1935, The life of Leonhard Euler, *Scripta Mathematica*, 3, 61–66 e 131–138.
- Leibniz, G.W., 1856, Briefwechsel zwischen Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli und Nicolaus Bernoulli, *Mathematischen Schriften*, a cura di C.I. Gerhardt, III, II, 887, 895, 899, Halle (ristampa anastatica: Georg Olms Verlagsbuchhandlung 1962)
- Loria, G., 1929–1933, *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino (riedizione: Hoepli, Milano 1950; ristampa anastatica: Cisalpino–Goliardica, Milano 1982)
- Malfatti, G.F., 1795, Pensieri sulla famosa questione dei logaritmi dei numeri negativi, *Mem. Reale Acc. di Sci. Lett. ed Arti di Mantova*, 3–54
- Naux, C., 1971, *Histoire des logarithmes de Neper a Euler*, Blanchard, Paris
- Riccati, G., 1778a, Lettera al Signore Iacopo Ab. Pellizzari sopra i logaritmi de' numeri negativi, *Continuazione del Nuovo Giorn. de' Letterati di Modena*, XVI
- Riccati, G., 1778b, Teorema. Il nulla immaginario non può confondersi col nulla reale, *Mem. della Soc. Ital.*, IV, 116
- Riccati, V., 1789, *Sopra i logaritmi dei numeri negativi, lettere cinque*, Società Tipografica, Modena

Giorgio T. Bagni