Bollettino dei Docenti di Matematica (1997), 34, 33-40

Attualità del *Princeps Mathematicorum*, Leonhard Euler

Giorgio T. Bagni
Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica di Bologna

Summary. The works of Leonhard Euler, *Princeps Mathematicorum*, are nowadays interesting also for the modern didactics of mathematics. In this paper, some thecniques and some examples from Euler's works are presented and their educational importance is underlined.

Il panorama matematico tra il XVII ed il XVIII secolo fu dominato dalle ricerche nel campo dell'analisi ([1]); ma questa caratterizzazione non esclude la presenza di approfondimenti estremamente significativi in altri settori della matematica. Basti ricordare l'imponente figura di Leonhard Euler (1707-1783), che fu detto dai propri contemporanei *Princeps Mathematicorum*: non c'è infatti parte della matematica allora conosciuta (oltre al calcolo differenziale ed integrale, ricordiamo la teoria dei numeri, la trigonometria, la geometria analitica, l'algebra, la geometria pura, la matematica applicata, la teoria dei giochi, la didattica e la divulgazione) che non abbia ricevuto da Euler un contributo essenziale [Weil, 1993]. Per questo gli storici della matematica ricordano la ben giustificata esortazione rivolta da Pierre Simon de Laplace (1749-1827), il creatore della teoria della probabilità, ai propri allievi: "Lisez Euler, c'est notre maitre à tous!" Anche Carl Friedrich Gauss (1777-1855), che come Euler sarà detto *Princeps Mathematicorum*, riconobbe i meriti del grande matematico svizzero ed affermò: "Lo studio delle opere di Euler rimane la miglior scuola nei diversi campi della matematica e non può essere rimpiazzato da nient'altro" [Struik, 1981, p. 160].

([1]) Scrive M. Kline: "Il calcolo infinitesimale fu la più grande realizzazione del XVII secolo. Da questa fonte scaturirono nuove e importanti branche della matematica: le equazioni differenziali, le serie infinite, la geometria differenziale, il calcolo delle variazioni, la teoria delle funzioni di variabile complessa e molte altre ancora... e il XVIII secolo fu dedicato in gran parte allo sviluppo di alcune di queste branche dell'analisi" [Kline, 1991, I, p. 466].

L'astronomo François Arago (1786-1853) definì Euler "l'incarnazione dell'Analisi": con Euler, infatti, l'analisi seicentesca si trasformò nella moderna disciplina studiata ai giorni nostri [Dieudonné, 1989]; il trattato *Introductio in analysin infinitorum* (1748) deve essere considerato una pietra miliare. Altrettanto importanti sono le *Institutiones calculi differentialis* (1755) e le *Institutiones calculi integralis* (1768-1780) [Langer, 1935].

1. Il differenziale da Leibniz ad Euler

Leonhard Euler si inserì nella ricerca sui fondamenti dell'analisi matematica, in piena evoluzione nel Settecento ([2]), che ebbe al centro il concetto di differenziale. Ricordiamo infatti che nel XVII secolo i procedimenti infinitesimali vennero introdotti ed impiegati in una forma notevolmente da quella nella quale oggi comunemente li intendiamo.

Così si esprimeva Leibniz in un manoscritto del 1695 ([3]):

"Sarà sufficiente se, quando parliamo di quantità... indefinitamente piccole (cioè le più piccole di cui possiamo venire a conoscenza) si intenda che vogliamo indicare quantità... tanto piccole quanto si vuole, cosicché l'errore che si può commettere sia minore di una certa quantità assegnata" [Kline, 1991, I, p. 451].

Interessanti sono inoltre alcune osservazioni contenute in una lettera (datata 30 marzo 1690) di Leibniz a Wallis:

([2]) Osserva M. Kline: "Alcuni germi della formulazione corretta dei nuovi concetti possono essere già trovati nella letteratura del Seicento. Wallis, nell'*Arithmetica infinitorum*, introdusse il concetto aritmetico del limite di una funzione come il numero avvicinato dalla funzione in modo tale che la differenza tra esso e la funzione possa essere resa minore di qualunque quantità assegnabile fino ad annullarsi quando il procedimento viene continuato all'infinito. La sua formulazione è vaga, ma contiene l'idea giusta" [Klin e, 1991, I, p. 453]. Una rigorizzazione della nozione di limite, che in parte riprese le considerazioni di d'Alembert, fu merito di Augustin Louis Cauchy (1789-1857), autore del *Cours d'analyse* (1821): con tale opera l'analisi infinitesimale raggiunse una sistemazione vicina a quella oggi accettata. Tra il XIX ed il XX secolo la sistemazione del concetto di limite fu resa possibile dalla nascita e dallo sviluppo della topologia.

([3]) F. Enriques riconosce una qualche ambiguità circa il ruolo del differenziale nell'opera di Leibniz: "La derivazione... viene considerata da lui come quoziente di due *differentiae* o (come si è detto in seguito secondo Giov. Bernoulli e L. Eulero) di due differenziali... Se questi incrementi vadano intesi soltanto in senso potenziale, cioè come quantità variabili evanescenti, ovvero staticamente come infinitesimi attuali non appare chiaramente nell'opera di Leibniz" [Enriques, 1938, p. 60].

‘È utile considerare quantità infinitamente piccole tali che, quando si cerca il loro rapporto, esse possono non essere considerate uguali a zero, ma che vengono respinte non appena compaiono insieme con quantità incomparabilmente più grandi. Così, se abbiamo $x+dx$, dx viene respinto. È però diverso se cerchiamo la differenza fra $x+dx$ e x. Analogamente, non possiamo avere insieme xdx e $dxdx$. Se quindi dobbiamo differenziare xy, scriveremo $(x+dx)(y+dy)–xy = xdy+ydx+dxdy$. Così, in ogni caso particolare l’errore è minore di qualsiasi quantità finita [Leibniz, 1849-1863, IV, p. 63].

La critica contemporanea ha ripreso alcune posizioni leibniziane, giungendo ad elaborare sistemazioni interessanti (anche didatticamente), come l’analisi non-standard ([4]). Ma le applicazioni dei metodi infinitesimali ebbero, fin dall’inizio del XVIII secolo, anche attivi oppositori, tra i quali George Berkeley (1685-1753), autore di *The Analyst, or a discourse addressed to an infidel mathematician* [Arrigo-D’Amore, 1992] ([5]). Le critiche all’analisi erano spesso espresse da matematici non professionisti: a parte il filosofo e scienziato Berkeley, citiamo il borgomastro olandese Bernard Nieuwentijdt (1654-1718). Ma anche un analista quale Michel Rolle (1652-1719) nutrì dubbi sulla sistemazione dell’analisi: ricorda U. Bottazzini che egli “non era affatto convinto della correttezza del calcolo leibniziano, che considerava una sorta di trucco ben riuscito” [Bottazzini, 1990, p. 27] ([6]). Lo stesso Jean-Baptiste Le Rond d’Alembert (1717-1783) espresse qualche perplessità sull’insufficiente precisazione del concetto di limite e sul fatto che gli infinitesimi potessero essere considerati come espressioni di quantità nulle, pur essendo qualitativamente diversi da zero. Egli affermò:

([4]) Scrive A. Robinson riferendosi ai fondamenti storici dell’analisi non standard: Leibniz intuì che la teoria degli infinitesimi implica l’introduzione di numeri ideali che possono essere infinitamente piccoli... se paragonati ai numeri reali. Né lui né i suoi discepoli né i suoi successori seppero dare uno sviluppo razionale ad un tale sistema... Questi numeri ideali, governati dalle stesse leggi dei numeri ordinari, sono solo una comoda finzione, adottata per abbreviare l’argomentazione e per facilitare l’invenzione o la scoperta matematica” [Robinson, 1974].

([5]) G. Berkeley scrisse: “Concepire una quantità infinitamente minore di ogni sensibile o immaginabile quantità oltrepassa, lo confesso, ogni mia capacità. Ma concepire una parte di questa quantità infinitesima, tale che sia ancora infinitamente minore di essa, questa è una infinita difficoltà per qualunque uomo” [Arrigo-D’Amore, 1992, p. 123]. A Berkeley rispose direttamente (ma non sempre efficacemente) James Jurin (1684-1750) con l’opera *Geometry, no friend to infidelity* (1734).

([6]) Si veda ad esempio l’interessante opera di Giuseppe Torelli (1721-1781) *De nihilo geometrico libri II*, pubblicata nel 1758 a Verona [Torelli, 1758].

"Una quantità o è qualcosa o è niente: se è qualcosa, non si è ancora annullata; se è niente, si è letteralmente annullata. Supporre che vi sia uno stato intermedio tra qualcosa e niente è pura chimera" (*Mèlanges de litèrature, d'histoire et de philosophie*, pp. 249-250, in [Boyer, 1982, p. 521]).

Così si espresse inoltre d'Alembert nell'articolo intitolato *Limite*:

"La teoria dei limiti è la vera metafisica del calcolo... Nel calcolo differenziale non si ha mai a che fare con quantità infinitesime, ma unicamente con limiti di quantità finite. Perciò la metafisica delle quantità infinite e infinitamente piccole, più grandi o più piccole l'una dell'altra, è completamente inutile per il calcolo differenziale" [Kline, 1991, I, p. 505].

Interessante è in questo contesto la posizione di Leonhard Euler, il quale "respingeva il concetto di infinitesimo come quantità più piccola di qualunque grandezza assegnabile e tuttavia diversa da zero" [Kline, 1991, I, p. 500]; egli scrisse nelle proprie *Institutiones calculi differentialis*:

"Non c'è dubbio che ogni quantità può essere diminuita in misura tale da annullarsi completamente e svanire. Ma una quantità infinitamente piccola non è nient'altro che una quantità evanescente e perciò la cosa stessa è uguale a 0. Ciò è anche in armonia con quella definizione delle cose infinitamente piccole di cui si dice che sono minori di qualunque quantità assegnabile; è certo che essa dovrebbe essere nulla perché, a meno che non sia uguale a 0, sarebbe possibile assegnarle una quantità uguale, il che è contrario all'ipotesi" [Euler, 1755-1787] (traduzione in [Kline, 1991, I, p. 500]).

Certamente Euler fu in grado di distinguere il differenziale di una funzione dal suo incremento; ma non sempre seguì rigorosamente tale distinzione (cfr. [Euler, 1755-1787]). Euler dunque si preoccupò di operare una riflessione anche approfondita sulla natura di alcuni oggetti fondamentali del calcolo, ma, in assenza di fondazioni precise (che non avrebbero potuto essere impostate che nel secolo XIX), *egli optò per la feconda ricerca matematica, eludendo un rigore che avrebbe finito per limitare le potenzialità dell'intuito* ([7]).

([7]) "È istruttivo dar conto non solo di alcuni dei contributi di Euler alla scienza, ma anche della debolezza di qualche sua conclusione... Non possiamo seguire Euler quando scrive che $1-3+5-7+... = 0$, o quando dal fatto che $n+n^2+... = 1/(1-n)$ e che $1+n^{-1}+n^{-2}+... = 1/(n-1)$ egli conclude che $...+n^{-2}+n^{-1}+1+n+n^2+... = 0$. Certo bisogna stare attenti a non criticare troppo frettolosamente Euler per il suo modo di manipolare serie divergenti... A molti dei risultati del suo lavoro apparentemente indiscriminato sulle serie è stato dato un senso assolutamente rigoroso da parte dei matematici moderni" [Struik, 1981, pp. 160-161].

Concludiamo dunque con le parole di M. Kline, che così riassume lo stato della ricerca sui fondamenti del calcolo infinitesimale nel XVIII secolo:

"Quasi tutti i matematici del Settecento fecero qualche sforzo per migliorare la logica del calcolo infinitesimale, o almeno si pronunciarono su di essa, e anche se uno o due di loro erano sulla giusta strada, tutti gli sforzi abortirono miseramente. La distinzione fra un numero molto grande e un numero «infinito» non veniva quasi mai fatta e sembrava chiaro che un teorema valido per qualsiasi *n* dovesse valere anche per *n* infinito. Analogamente, un rapporto incrementale veniva sostituito da una derivata e non si distingueva quasi mai la somma di un numero finito di termini da un integrale... Tutti questi sforzi potrebbero essere sintetizzati nella descrizione di Voltaire del calcolo infinitesimale come «l'arte di enumerare e di misurare esattamente una Cosa la cui Esistenza non può essere concepita»" [Kline, 1991, I, p. 506].

2. Il concetto di funzione nell'*Introductio in analysin infinitorum* e nelle *Institutiones calculi differentialis*

I trattati euleriani *Introductio in analysin infinitorum*, *Institutiones calculi differentialis* e *Institutiones calculi integralis* furono il punto di arrivo della speculazione analitica del periodo, lungo circa un secolo, che va dal 1665, anno al quale vengono fatte risalire le prime ricerche newtoniane sul metodo delle flussioni, fino alla metà del Settecento. Al contempo, essi vennero ad essere il punto di partenza dell'analisi matematica moderna, che, attraverso i contributi di autori quali Cauchy e Weierstrass, giungerà alla sistemazione concettuale dell'inizio del secolo XX. L'analisi di Euler è essenzialmente basata sul concetto di funzione: interessante è seguire l'evoluzione di tale concetto attraverso le principali opere euleriane ([8]) (ricordiamo che un primo riferimento alla nozione di funzione fu proposto da Jean Bernoulli).

([8]) Euler definiva il calcolo differenziale come "il metodo per determinare il rapporto di incrementi evanescenti assunti da funzioni qualsiasi quando viene attribuito un incremento evanescente alla quantità variabile della quale esse sono funzione" [Euler, 1755-1787, I, p. LVII-LVIII]. Ad esso si affianca il calcolo integrale, definito come "il metodo per trovare, assegnato il rapporto degli incrementi evanescenti, quelle stesse funzioni ai quali tali incrementi sono riferiti" [Euler, 1755-1787, I, p. LVIII]. Per quanto riguarda i "rapporti di incrementi evanescenti", ricordiamo che Sylvestre François Lacroix (1765-1843) nel suo *Traité elementaire du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral* fu il primo ad introdurre il termine "coefficiente differenziale" per indicare la derivata; egli inoltre definì il differenziale di una funzione sulla base della derivata della funzione stessa, ovvero nella forma $dy = f'(x)dx$ [Lacroix, 1837].

Per chiarire la concezione euleriana della funzione è necessario rifarsi all'*Introductio in analysin infinitorum*, nella quale Euler definì la funzione come *un'espressione analitica qualsiasi in cui siano coinvolte una quantità variabile ed un numero qualsiasi di costanti*. Così scrive M. Kline a proposito del concetto di funzione presente nell'*Introductio* euleriana:

"La principale differenza tra le funzioni, dice Euler, consiste nella combinazione di variabili e di costanti che le compongono. Così, aggiunge, le funzioni trascendenti si distinguono dalle funzioni algebriche perché le prime ripetono infinite volte le combinazioni delle seconde, cioè le funzioni trascendenti possono essere date mediante serie infinite. Euler e i suoi contemporanei non ritenevano necessario prendere in considerazione il problema della validità delle espressioni ottenute mediante un'applicazione ripetuta infinite volte delle quattro operazioni razionali" [Kline, 1991, I, pp. 471-472].

Nel Settecento, dunque, e segnatamente per Euler, una funzione era data da un'espressione analitica *finita o infinita* (anche il termine "funzione continua" era comunemente impiegato per indicare una funzione espressa analiticamente).

Se i precedenti riferimenti sono tratti dall'*Introductio* (1748), in un secondo momento, ovvero nelle *Institutiones calculi differentialis* (1755), lo stesso Euler diede una definizione di funzione significativamente diversa:

"Se alcune quantità dipendono dalle altre in modo tale da subire delle variazioni quando queste ultime sono fatte variare, allora si dice che le prime sono funzioni delle seconde" [Euler, 1755-1787] (in [Kline, 1991, I, p. 591]).

Con tale definizione veniva finalmente eluso l'implicito riferimento alle funzioni espresse analiticamente, sia come singole funzioni, sia come termini di una serie [Bourbaki, 1963]. Euler si rese conto dell'importanza di questo ampliamento concettuale e scrisse a d'Alembert il 20 dicembre 1763:

"La considerazione delle funzioni che non sono soggette ad alcuna legge di continuità [analiticità] ci schiude un intero nuovo campo di analisi" [Kline 1991, I, p. 592].

3. Euler didatta: le equazioni diofantee

Euler, dunque, fu davvero l'"incarnazione dell'Analisi". Ma le parole di Arago non renderebbero giustizia, da sole, alla sterminata e sempre stimolante produzione del grande matematico di Basilea.

Un manuale divulgativo di Algebra (*Vollstandige Anleitung zur Algebra*, pubblicato nel 1770) è dovuto ancora alla felice penna di Euler; il carattere chiaramente innovativo e l'eccezionale efficacia didattica di quest'opera sono riconosciute da G. Loria:

"Ciò che rende l'Algebra di Euler di straordinario interesse dal punto di vista didattico è il numero, la varietà e l'eleganza dei problemi trattati" [Loria, 1929-1933, p. 704].

Alcune tecniche euleriane sono particolarmente attuali dal punto di vista didattico: presenteremo un classico ed elegante procedimento risolutivo per alcune equazioni diofantee esposto nell'*Algebra* di Euler [Olds, 1963].

Consideriamo ad esempio l'equazione in $x \in \mathbf{Z}$, $y \in \mathbf{Z}$:

$$8x+5y = 81$$

Si risolve innanzitutto l'equazione nella variabile avente il minore coefficiente (in questo caso y):

$$y = \frac{81-8x}{5}$$

Si dividano per 5 i numeri 81 e 8, mettendo in evidenza i resti:

$$81 = 5\cdot 16+1 \qquad\qquad 8 = 5\cdot 1+3$$

e si scriva quindi:

$$y = \frac{5\cdot 16+1-(5\cdot 1+3)x}{5} \qquad\qquad y = (16-x)+\frac{1-3x}{5}$$

e infine:

$$y = (16-x)+t$$

dove è stato posto:

$$t = \frac{1-3x}{5} \quad \Leftrightarrow \quad 3x+5t = 1$$

Si noti che: ($x\in\mathbf{Z} \wedge y\in\mathbf{Z} \wedge t = x+y-16$) $\Rightarrow t\in\mathbf{Z}$. Dunque anche $3x+5t = 1$ è un'equazione diofantea. L'id ea base del metodo euleriano è la seguente: *le soluzioni (x; y) dell'equazione data sono collegate alle soluzioni di equazioni diofantee con i coefficienti minori di quelli della data*.

Il procedimento precedente può essere iterato. Si risolva l'equazione ottenuta nella variabile avente il minore coefficiente (x):

$$x = \frac{1-5t}{3} \qquad\qquad x = \frac{1-(3\cdot 1+2)t}{3}$$

$$x = -t + \frac{1-2t}{3} \qquad\qquad x = -t+u$$

dove è stato posto:

$$u = \frac{1-2t}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2t+3u = 1$$

Si noti che: ($x\in\mathbf{Z} \wedge t\in\mathbf{Z} \wedge u = x+t$) $\Rightarrow u\in\mathbf{Z}$. Dunque anche $2t+3u = 1$ è un'equazi one diofantea.

Ripetiamo ancora il procedimento. Si risolva l'equazione ottenuta nella variabile con il minore coefficiente (t):

$$t = \frac{1-3u}{2} \qquad\qquad t = \frac{1-(2\cdot 1+1)u}{2}$$

$$t = -u + \frac{1-u}{2} \qquad\qquad t = -u+v$$

dove è stato posto:

$$v = \frac{1-u}{2} \quad \Leftrightarrow \quad u+2v = 1 \quad \Leftrightarrow \quad u = 1-2v$$

Si noti che: ($t\in\mathbf{Z} \wedge u\in\mathbf{Z} \wedge v = u+t$) $\Rightarrow v\in\mathbf{Z}$.

L'iterazione si interrompe quando il coefficiente della variabile dell'equazione in esame non interessata dalla posizione (in questo caso il coefficiente della u nell'equazione diofantea infine ottenuta) viene ad essere unitario.

Ricordando le espressioni di x e di y e tutte le posizioni effettuate:

$$y = (16-x)+t \qquad x = -t+u \qquad t = -u+v \qquad u = 1-2v$$

si perviene alle:

$$x = 2-5v \qquad\qquad y = 13+8v$$

le quali al variare di $v \in \mathbf{Z}$ risolvono l'equazione proposta ([9]).

Ad esempio:

v	...	-2	-1	0	1	2	...
x	...	12	7	2	-3	-8	...
y	...	-3	5	13	21	29	...

Se all'equazione diofantea fosse associata la condizione di non negatività per x e per y, dovrebbe essere risolto il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} 2-5v \ge 0 \\ 13+8v \ge 0 \\ v \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -\dfrac{13}{8} \le v \le \dfrac{2}{5} \\ v \in \mathbf{Z} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad v = -1 \ \vee \ v = 0$$

Ovvero le uniche coppie (x; y) accettabili sarebbero quelle presenti nella tabella seguente:

v	-1	0
x	7	2
y	5	13

Riferimenti bibliografici

G. Arrigo-B. D'Amore, *Infiniti*, Angeli, Milano 1992.

U. Bottazzini, *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino 1990.

([9]) Osserviamo che il metodo euleriano, ora presentato, non garantisce l'esistenza di soluzioni dell'equazione in esame; ad esempio, si può dimostrare che, data l'equazione $ax+by = c$ (con a, b, c interi dati, x, y interi incogniti), se a e b non sono coprimi, allora tutti i loro divisori comuni devono essere anche divisori di c (la prova è immediata); inoltre, il procedimento ora descritto non è sempre il più breve [Olds, 1963].

N. Bourbaki, *Elementi di storia della matematica*, Hermann, Paris 1960 (traduzione italiana: Feltrinelli, Milano 1963).
C.B. Boyer, *Storia della matematica*, Mondadori, Milano 1982.
J. Dieudonné, *L'arte dei numeri* , Mondadori, Milano 1989.
F. Enriques, *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna 1938 (ristampa anastatica: Zanichelli, Bologna 1982).
L. Euler, *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in Analysi Finitorum ac Doctrina Serierum*, 2 vv., Galeati, Pavia 1787. La presente seconda edizione del capolavoro euleriano contiene alcune aggiunte alla prima (1755), curate da F. Speroni sulla base delle annotazioni dello stesso Euler.
M. Kline, *Storia del pensiero matematico. I. Dall'Antichità al Settecento. II. Dal Settecento a oggi*, Einaudi, Torino 1991.
R.E. Langer, *The life of Leonhard Euler*, 'Scripta mathematica", 3, 1935.
G.W. Leibniz, *Mathematische Schriften*, C.I. Gerhardt (a cura di), Ascher-Schmidt, Berlin-Halle 1849-1863 (ristampa anastatica: Georg Olms Verlagsbuchhandlung, Hildesheim 1962).
S.F. Lacroix, *Traité elementaire du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*, 5me edition, Bachelier, Paris 1837.
G. Loria, *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino 1929-1933 (riedizione: Hoepli, Milano 1950; ristampa anastatica: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982).
C.D. Olds, *Continued Fractions*, Random House, New York 1963 (traduzione italiana: *Frazioni continue*, Zanichelli, Bologna 1968).
D.J. Struik, *Matematica: un profilo storico*, Il Mulino, Bologna 1981.
G. Torelli, *De nihilo geometrico libri II*, Carattoni, Verona 1758.
A. Weil, *Teoria dei numeri. Storia e matematica da Hammurabi a Legendre*, Einaudi, Torino 1993.