

In Sbaragli, S. (Ed.), *La matematica e la sua didattica. Vent'anni di impegno* (pp. 34–37). Roma: Carocci Faber (2006)

## «Eadem sunt, quae sibi mutuo substitui possunt, salva veritate»

**Giorgio T. Bagni**

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine

**Abstract.** In this paper a celebrated quotation by Leibnizian *Characteristica* is presented and compared with some modern approaches, in particular Frege's substitution principle and his thesis according to which the reference of a sentence is a truth-value.

Una celebre citazione che ha coinvolto due giganti della logica risale al 1892: in *Über Sinn und Bedeutung* (Frege, 2001), Gottlob Frege (1848-1925) ricorda una frase di Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716): «Eadem sunt, quae sibi mutuo substitui possunt, salva veritate» (manteniamo la dicitura originale latina). Frege intende con ciò riferirsi al 'principio di sostituibilità', secondo il quale quando si sostituisce parte di una proposizione con un'espressione avente il medesimo significato (medesima denotazione), ma senso diverso, il valore di verità della proposizione resta immutato (indichiamo il Cap. VII di: Kneale, Kneale, 1972; Saw, 1954, pp. 116-117, e il Cap. 3 di: Bagni, 1997). Troviamo numerosi riferimenti alla posizione ora menzionata negli scritti di Leibniz; ad esempio:

«Eadem sunt quorum unum in alterius locum substitui potest, salva veritate» (Leibniz, 1931, VII, p. 219).

«Defin. 1: Eadem seu coincidentia sunt quorum alterutrum ubilibet potest substitui alteri salva veritate» (Leibniz, 1931, VII, p. 236).

Tra il 1684 e il 1686, Leibniz scrisse il saggio *Sulla caratteristica* (Leibniz, 1973-a) in cui si trovano non poche affermazioni di notevole importanza per l'inquadramento della logica simbolica leibniziana. Alcune citazioni sono assai significative: dopo aver indicato come 'carattere' una lettera qualsiasi «A oppure B o un altro segno» ed aver chiamato 'formula' «il composto di più caratteri» (Leibniz, 1973-a, p. 61), Leibniz afferma:

«Qualora una formula equivalga a un carattere, in modo che essi si possano sostituire l'un l'altro, tale formula si chiamerà 'valore del carattere'» (le citazioni fanno qui riferimento alla traduzione italiana: Leibniz, 1973-a, p. 61).

Dunque in questo caso la sostituibilità viene esplicitamente invocata sul piano dell'espressione simbolica. Inoltre:

«Il valore primitivo di un carattere, il valore, cioè, che viene assegnato arbitrariamente ad esso senza che vi sia bisogno di alcuna prova, è il 'significato' di esso» (Leibniz, 1973-a, p. 61).

«Tra quei termini, dei quali l'uno può sostituire l'altro senza alterare la legge del calcolo, si dirà sussistere una relazione di 'equipollenza'» (Leibniz, 1973-a, p. 61).

Si ricordi che una posizione simile era stata anticipata dallo stesso Leibniz ad esempio nelle *Aggiunte al Saggio di calcolo universale*, opera redatta tra il 1680 e il 1685 (Leibniz, 1973-b), in cui si legge:

«Ciò che è concluso con certe lettere indeterminate deve essere considerato concluso con altre lettere che obbediscono alle medesime condizioni» (Leibniz, 1973-b, p. 57).

Come osserva Bruno D'Amore nella propria analisi del saggio leibniziano *Sulla caratteristica* (D'Amore, 2001), non è chiaro che cosa si intenda qui con 'valore' del carattere; ma se si considera una 'relazione di equivalenza' tra le formule, il 'valore di un carattere' potrebbe coincidere con l'estensione del carattere stesso nell'insieme delle formule costruite nel linguaggio nel quale il carattere è un segno alfabetico (D'Amore, 2001, pp. 4-5).

Questa tesi merita di essere attentamente discussa e un raffronto con la classica impostazione fregeana sembra essere assai indicativo. Com'è noto, Frege introduce, per ogni espressione linguistica:

- 'Sinn' cioè: il 'Senso'
- 'Bedeutung' cioè: il 'Significato' (spesso anche 'Denotazione')

Ci sono, naturalmente, diversi tipi di espressioni linguistiche; possiamo considerare, ad esempio, i termini singolari, i predicati, gli enunciati. Per ciascuno di essi è quindi necessario specificare 'senso' e 'significato'.

Consideriamo inizialmente il caso di un termine singolare come 'Dante' (un nome proprio) o come 'l'autore della *Divina Commedia*' (una descrizione definita). In entrambi i casi, il significato è l'uomo Dante Alighieri in carne ed ossa. Il senso è il modo in cui il termine singolare in questione viene dato: sarebbe infatti diverso dire 'l'autore della *Divina Commedia*' o 'l'autore del *Convivio*'. È solo grazie al loro senso che le espressioni hanno un significato: se un nome è privo di senso non si può ovviamente determinare di quale oggetto esso è il nome (Casalegno, 1997. Si noti che la distinzione tra senso e significato, immediata nel caso di una descrizione definita, vale anche per un nome proprio, abbreviazione di una descrizione definita; con lo stesso nome si possono abbreviare diverse descrizioni definite: ad esempio, con 'Dante' parlanti diversi possono intendere 'l'autore della *Divina Commedia*', 'l'allievo di Brunetto Latini che cantò Beatrice' etc. Il problema è ineliminabile nel

linguaggio naturale, mentre, per Frege, in un linguaggio artificiale questa ambiguità di senso potrebbe essere evitata).

Anche la distinzione tra senso e significato nel caso dei predicati e degli enunciati è interessante per inquadrare l'organicità della classica impostazione fregeana. Un predicato, per Frege, è una funzione. Egli considerava la funzione alla stregua di un ente incompleto ('insaturo'); le funzioni, cioè, sono entità, ma dotate di uno statuto ontologico diverso da quello degli 'oggetti': un oggetto è un'entità 'satura', un numero particolare, ad esempio '12', è dunque un oggetto dotato di una sua 'compiutezza'. Una funzione come 'il triplo di  $x$ ', spesso espressa con  $f(x) = 3x$ , per Frege non rappresenta un (singolo) oggetto. Lo rappresenterà solo quando a  $x$  verrà sostituito un elemento del dominio: ad esempio, se poniamo  $x = 4$ , allora  $f(x) = f(4) = 3 \cdot 4 = 12$ .

Il significato del predicato è il concetto stesso che viene espresso; il senso è il 'modo di presentazione' del concetto. Infatti lo stesso concetto ('uomo') può essere espresso in modi diversi ('animale razionale' o 'bipede implume' etc.). Quando 'saturiamo' un predicato  $P(x)$  sostituendo a  $x$  un particolare elemento, otteniamo un enunciato e a tale enunciato corrisponde un valore di verità.

Per un enunciato, quindi, nelle parole di Frege, il senso è il 'pensiero' (*Gedanke*); il significato è il valore di verità. Ciò ci porta ad affermare che ogni enunciato vero può essere considerato come (un) 'nome del vero' e ogni enunciato falso come (un) 'nome del falso'. Dunque 'vero' e 'falso', per Frege, sono 'oggetti' e gli enunciati sono i nomi di tali 'oggetti' (intendendo come 'oggetti' entità che possono essere argomenti o valori di una funzione).

Un'osservazione interessante può essere collegata all'estensione di un predicato. Chiamiamo 'estensione di un predicato  $P(x)$ ' l'insieme di tutti gli oggetti  $x$  tali che  $P(x) = \text{vero}$ . Ad esempio, l'estensione del predicato ' $x$  è un uomo', ovvero 'uomo ( $x$ )', è l'insieme costituito da tutti e soltanto gli uomini.

Abbiamo sopra accennato che il significato di un predicato il concetto è una funzione  $F(x)$  tale che se  $x$  appartiene all'estensione di  $P$  allora  $F(x) = \text{vero}$ . Potremmo chiederci (Casalegno, 1997 e rifacendoci anche all'interpretazione data da D'Amore alla posizione leibniziana): *perché Frege non identifica direttamente il significato di un predicato con la relativa estensione?* La risposta si collega a un punto chiave dell'impostazione teorica di Frege: il 'principio di composizionalità', secondo il quale il significato di una qualsiasi espressione si ottiene componendo i significati delle espressioni semplici da cui è costituita (Penco, 2004). Identificando il significato del predicato con l'estensione, tale significato verrebbe ad essere un 'oggetto' (un insieme), mentre per Frege è preferibile che il significato dell'enunciato (il valore di verità) sia ottenuto operando per 'saturazione' sul significato del predicato, che è componente dell'enunciato.

Secondo molti (Mugnai, 1973, pp. 2-4; D'Amore, 2001, p. 1), Leibniz può essere considerato un grande precursore degli sviluppi della moderna logica simbolica. Non potremmo ovviamente trascurare alcune differenze ineludibili

collegate ai diversi contesti socio-culturali (facendo riferimento all'approccio epistemologico storico-culturale delineato ad esempio in: Radford, 1997): si può notare, seguendo Mugnai, che Leibniz individuò proprio nella matematica del XVII-XVIII secolo «un modello cui doveva ispirarsi la logica per realizzare 'compiti metafisici'», mentre Bertrand Russell (1872-1970), «tanto per fare un esempio, vede nella matematizzazione della logica la strada per fondare la validità di una scienza autonoma indipendente da ogni tipo di subordinazione a secondi fini metafisici» (Mugnai, 1973, p. 4; Russell, 1937). Ovviamente, dunque, tali diverse concezioni della logica non possono non risentire dei due secoli che separano questi importanti momenti della storia del pensiero umano.

## Bibliografia

- Bagni G.T. (1997). *Elementi di storia della logica formale*. Prefazione di F. Speranza. Bologna: Pitagora.
- Casalegno P. (1997). *Filosofia del linguaggio*, Roma: La Nuova Italia Scientifica.
- D'Amore B. (2001). Riflessioni sulla 'Caratteristica' leibniziana. In: *Scritti di epistemologia matematica 1980-2001*. Bologna: Pitagora, 1-9 (*Annali dell'Istituto di Discipline filosofiche dell'Università di Bologna*. 1, 1979/1980, 204-208).
- Frege G. (2001). Senso e riferimento. *Senso, funzione e concetto*. Roma-Bari: Laterza (Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 100, 1892, 25-50).
- Kneale W., Kneale M. (1972). *Storia della logica*. Torino: Einaudi (*The Development of Logic*. Oxford: Clarendon Press, 1978).
- Leibniz G.W. (1931). *Die Philosophische Schriften*. Leipzig: Lorenz, Leipzig.
- Leibniz G.W. (1973-a). Sulla caratteristica. In: Mugnai M., *Leibniz e la logica simbolica*. Firenze: Sansoni, 59-62 (*Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz*, herausgegeben von G.I. Gerhardt. Berlin: Weidmannsche Buchhandlung, 1875-1890, VII, 1890, 204-207).
- Leibniz G.W. (1973-b). Saggio di calcolo universale. In: Mugnai M., *Leibniz e la logica simbolica*. Firenze: Sansoni, 53-58 (*Die philosophischen Schriften von Gottfried Wilhelm Leibniz*, herausgegeben von G.I. Gerhardt. Berlin: Weidmannsche Buchhandlung, 1875-1890, VII, 1890, 218-221).
- Mugnai M. (1973). *Leibniz e la logica simbolica*. Firenze: Sansoni.
- Penco C. (2004). *Introduzione alla filosofia del linguaggio*. Roma-Bari: Laterza.
- Radford L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of mathematics* 17(1), 26-33.
- Russell B. (1937). *A critical exposition of the philosophy of Leibniz*. London: Allen and Unwin.
- Saw R.L. (1954). *Leibniz*. Harmondsworth: Penguin.