Progetto Alice II, 5 (2001), 175-190

Dai coniglietti alla "sezione aurea": piccole storie matematiche

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica,
Università di Roma "La Sapienza"

Riassunto L'articolo propone un percorso storico attraverso alcuni classici argomenti, segnatamente collegati alla successione di Fibonacci ed alle frazioni continue. Dal punto di vista didattico, ciò può essere utile per stimolare o per rinforzare, nell'allievo, l'interesse e la motivazione.

Abstract In this work we propose some examples from History of Mathematics, particularly related to the Fibonacci sequence and continued fractions. From an educational point of view, they can be useful in order to stimulate or strengthen pupils' interest and conviction.

Era una mattinata davvero molto calda. Per qualche istante la bambina appoggiò dolcemente la testa sul banco: forse chiuse gli occhi e la voce dell'insegnante sembrò affievolirsi…

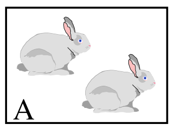
Primo personaggio: un Pisano, all'inizio del Duecento

Il mio nome è Leonardo e sono nato a Pisa; mi chiamano Fibonacci, "il figlio di Bonaccio", e mi occupo di Aritmetica. Voglio raccontarti la storia di un gruppo di simpatici coniglietti bianchi.

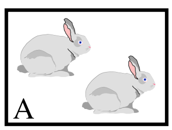
Immagina di possedere una coppia di giovanissimi conigli. Dopo un mese di vita essa diviene feconda e, da quel momento in poi, genera una nuova coppia di coniglietti al mese. Ogni nuova coppia di coniglietti si comporterà allo stesso modo, ricorda: dopo un primo mese di attesa, genererà una nuova coppia di coniglietti al mese, tutti i mesi.

Seguiamo insieme l'evoluzione del gruppo di coniglietti; in particolare, facciamo attenzione al numero di coppie di coniglietti che avremo a disposizione, mese dopo mese:

- all'inizio abbiamo solo una coppia di coniglietti, che chiameremo A; inizialmente, come sappiamo, non è feconda:

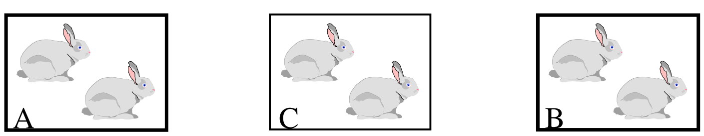


- dopo un mese abbiamo ancora la sola coppia A, che però è diventata feconda (la indicheremo inquadrandola con una linea più marcata):



- dopo due mesi la coppia A ha generato una nuova coppia di coniglietti, B, che, inizialmente, non è feconda:

- dopo tre mesi la coppia A ha generato un'altra coppia di coniglietti, C, inizialmente non feconda; la coppia B è intanto diventata feconda:



- dopo quattro, cinque, sei mesi… continua tu!

Se conteremo, mese dopo mese, il numero delle coppie di coniglietti, troveremo questa successione che viene detta *successione di Fibonacci*: fu il matematico francese Edouard Lucas (1842-1891) che propose tale denominazione:

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; …

I calcoli diventano sempre più complicati; come potremmo scrivere una "regola" che ci aiuti a calcolare con facilità i termini di tale successione? Non è difficile: in fondo, quante saranno le coppie di coniglietti ad un mese considerato?

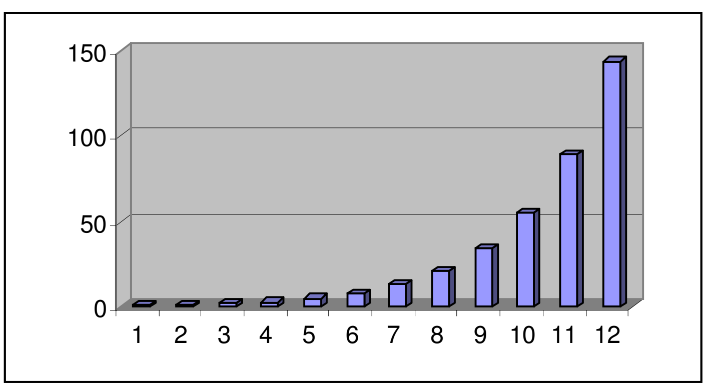
- Ci saranno, ovviamente, tutte le coppie di coniglietti del mese precedente.
- Ci saranno poi le coppie "neonate": ma quante? Una per ogni coppia in età feconda (nel mese precedente al mese che consideriamo). A questo riguardo, ricordiamo che le coppie di coniglietti diventano feconde dopo un mese di "attesa". Quindi per sapere quante coppie di coniglietti si trovano in età feconda al momento considerato, bisogna controllare il numero delle coppie di coniglietti presenti *due* mesi prima: sono proprio loro che, il mese successivo (*un* mese prima del momento di cui ci occupiamo) si sarebbero trovate in età feconda ed avrebbero quindi generato una nuova coppia di coniglietti.

Quindi: il numero di coppie di un mese considerato è *la somma del numero delle coppie presenti nei due mesi precedenti*.

Possiamo formalizzare quanto affermato nel modo seguente ([1]):

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \end{cases} \qquad n \in \mathbf{N}$$

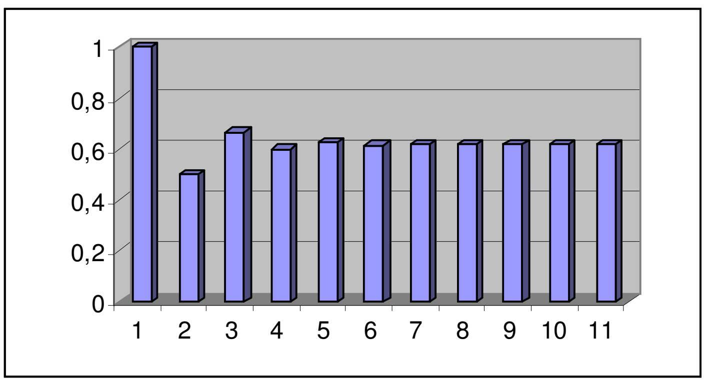
Possiamo anche rappresentare in un grafico l'andamento della nostra "popolazione" per i primi mesi (consideriamo, ad esempio, il primo anno):



A questo punto possiamo osservare una caratteristica interessante a proposito del "ritmo" di crescita del numero dei nostri coniglietti: se esaminiamo il rapporto R_n tra il numero di coppie al mese n-esimo ed al mese $(n+1)$-esimo, troviamo:

$$\frac{1}{1};\ \frac{1}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{3}{5};\frac{5}{8};\frac{8}{13};\frac{13}{21};\frac{21}{34};\frac{34}{55};\frac{55}{89};\frac{89}{144};\ \ldots$$

Scritte così, queste frazioni possono non apparire molto significative; ma se scriviamo tali numeri in forma decimale (1; 0,5; 0,666…; 0,6; 0,625; 0,615…; 0,619…; 0,617…; 0,6188…; 0,6179…; 0,61805…) o, meglio, se li riportiamo in un grafico, ci renderemmo conto che al crescere dell'indice n il rapporto tende a "stabilizzarsi", a collocarsi intorno ad un valore di poco superiore a 0,6:



Questo comportamento ci sembra senz'altro interessante; per poterlo studiare meglio, però, sarebbe opportuno scrivere una "regola" (simile a quella ricavata poco fa) che ci consenta di calcolare facilmente i rapporti tra due termini consecutivi della nostra successione di Fibonacci.

Riflettiamo: il primo rapporto è evidentemente 1 (i primi due elementi della successione di Fibonacci sono infatti uguali!). Per quanto riguarda i rapporti successivi, proviamo a calcolare il rapporto R_{n+1} tra il numero di coppie al mese $(n+1)$-esimo ed al mese $(n+2)$-esimo; possiamo scrivere:

$$R_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1} + a_n} = \frac{1}{\frac{a_{n+1} + a_n}{a_{n+1}}} = \frac{1}{1 + \frac{a_n}{a_{n+1}}} = \frac{1}{1 + R_n}$$

e dunque la "regola" è la seguente:

$$\begin{cases} R_0 = 1 \\ R_{n+1} = \dfrac{1}{1 + R_n} \end{cases} \qquad n \in \mathbf{N}$$

Chissà, forse questa scrittura potrà essere interessante. Ma di ciò se ne occuperà qualche mio bravo Collega; sarebbe infatti interessante sapere se c'è un valore particolare al quale il rapporto R_n si avvicina quando n diventa sempre più grande, vero? Noi ci limiteremo ad applicare la regola trovata per i primi tre o quattro valori del rapporto R_n; potremmo scrivere:

$$R_0 = 1$$

$$R_1 = \frac{1}{1+1}$$

$$R_2 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}$$

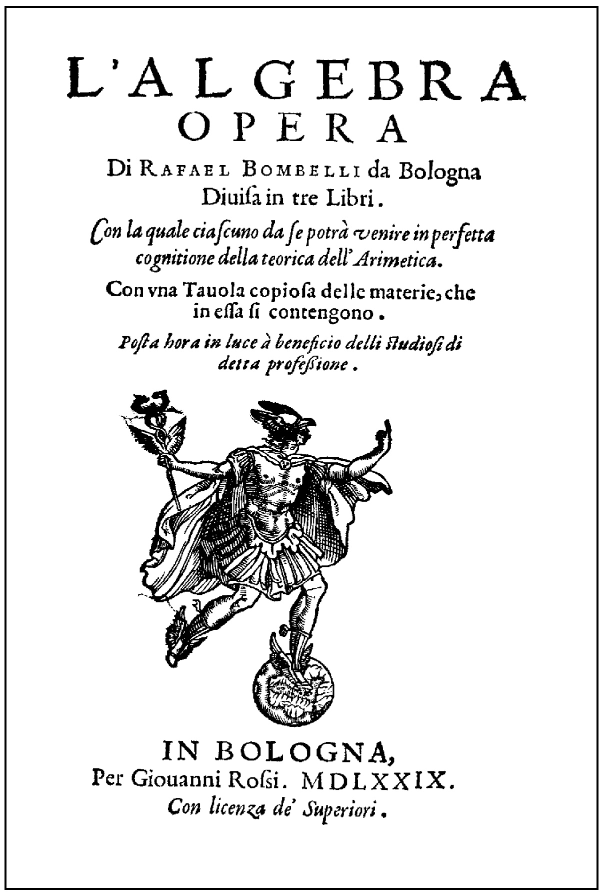
$$R_3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}}$$

Dopo un po', naturalmente, dovremo fermarci!

Secondo personaggio: un Bolognese del Seicento

Mi chiamo Pietro Antonio Cataldi e sono nato a Bologna. Quarant'anni or sono, nel 1572, un mio famoso conterraneo, il Maestro Raffaele Bombelli di Borgo Panigale, autore di un bellissimo libro intitolato *Algebra*, ha calcolato la radice quadrata del numero 13 con un procedimento nuovo, veloce e strano, un metodo che mi ha proprio incuriosito:

$$\sqrt{13} = 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6 + \dots}}}$$



L'ALGEBRA
OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuiſa in tre Libri.
Con la quale ciaſcuno da ſe potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copioſa delle materie, che in eſſa ſi contengono.
Poſta hora in luce à beneficio delli ſtudioſi di detta profeſſione.

IN BOLOGNA,
Per Giouanni Roſsi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori.

L'*Algebra* di Bombelli (la stessa edizione riporta due date: 1572 o 1579)

Ho allora pensato di scrivere un libretto espressamente dedicato al procedimento intuìto dal Maestro Raffaele, e l'ho intitolato: *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadrata delli numeri*; ebbene, per trovare $\sqrt{n}$, ti suggerisco di porre: $n = q^2+r$ (con q intero e q^2 il massimo quadrato non maggiore di n) e di assumere per $\sqrt{n}$:

$$\sqrt{n} = q + \cfrac{r}{2q + \cfrac{r}{2q + \cfrac{r}{2q + \dots}}}$$

Questa scrittura sarà chiamata *frazione continua*: si tratta infatti di una frazione che, nel proprio denominatore, "contiene" un'altra frazione e così via: conti - nuamente! Ma quanti denominatori dovrai considerare per trovare la radice quadrata cercata? Tanti, tantissimi: insomma, più avanti riuscirai a spingerti con il calcolo, più il valore che otterrai sarà accurato.

Con pochi passaggi possiamo spiegare in termini generali questa bella ed utile formula. Poniamo:

$$\sqrt{q^2+r} = q + \frac{1}{\beta} \qquad \Rightarrow \qquad \beta = \frac{1}{\sqrt{q^2+r}-q} = \frac{\sqrt{q^2+r}+q}{r}$$

Ricordando la prima uguaglianza:

$$\beta = \frac{2q + \frac{1}{\beta}}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \sqrt{q^2+r} = q + \cfrac{r}{2q + \cfrac{1}{\beta}}$$

e sostituendo ripetutamente la: $\dfrac{1}{\beta} = \dfrac{r}{2q + \frac{1}{\beta}}$, otteniamo proprio la formula che poco fa avevamo proposto.

Potrai renderti conto senza difficoltà che uno sviluppo di questo genere è proprio quello che aveva calcolato Bombelli (basta scomporre il numero 13 in 3^2+4 ed applicare la formula che abbiamo visto). Forse però ti chiederai se eseguendo tante, tantissime (addirittura… infinite?) divisioni i risultati siano proprio tali da avvicinarsi sempre di più ad un numero: essi infatti potrebbero comportarsi diversamente, forse crescere sempre di più, oppure oscillare, magari in modo irregolare. Ebbene, ci saranno alcuni grandi matematici che si occuperanno di questo problema, questione alla quale daranno anche un apposito nome: *convergenza* della frazione continua. Non preoccuparti, comunque: la convergenza della frazione continua che abbiamo ora esaminato sarà assicurata dal *teorema di Sleszynski-Pringsheim* ([2]), il quale afferma che la nostra frazione continua converge se per ogni suo "livello" è: $|2q| \geq |r|+1$; nel nostro caso risulta: $6 \geq 4+1$. Tutto bene, dunque.

A questo punto, pensiamo alla "regoletta" ricavata per il rapporto R_n di due termini consecutivi della successione di Fibonacci, il termine n-esimo ed il termine $(n+1)$-esimo. Non è difficile intuire che il valore R verso il quale tendono tali rapporti, facendo crescere indefinitamente l'indice n, sarà:

$$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}$$

e dunque il nostro valore R potrà essere espresso da una frazione continua.

Terzo personaggio: un Arabo, milletrecento anni fa

Mi chiamo Mohammed Ibn Musa Al Khuwarizmi; sono un matematico di origine persiana. In modo particolare, mi occupo di quella parte della Matematica che chiamerete Algebra: pensa che proprio dal titolo del mio libro più importante, *Al-jabr wal mukabalah*, deriva la vostra parola "Algebra". Mi sono a lungo occupato della teoria delle equazioni, particolarmente di quelle di secondo grado, come questa:

$$x^2+bx = c$$

Per conoscere il valore della x dovrai calcolare innanzitutto b^2+4c; quindi estrarrai la radice quadrata di quanto avrai trovato; poi da tale radice sottrarrai b (quest'ultima cosa, ovviamente, se sarà possibile; cioè se $\sqrt{b^2+4c}$ non sarà minore di b) ed infine dimezzerai il risultato:

$$\frac{\sqrt{b^2+4c}-b}{2}$$

Proprio questo valore, sostituito alla *x*, renderà il primo membro uguale al secondo: ecco dunque trovata una soluzione dell'equazione!

Proviamo a cimentarci con un esempio:

$$x^2+x = 1$$

Grazie al procedimento sopra introdotto, andiamo a calcolare la *x*:

$$x = \frac{\sqrt{1^2+4\cdot 1}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Tutto è andato bene: $\sqrt{5}$ non è minore di 1 e dunque la sottrazione si può fare. Abbiamo ottenuto una soluzione!

Ti faccio notare che per risolvere la nostra equazione potremmo essere tentati da un metodo che si usa per affrontare le equazioni di primo grado: potremmo cioè cercare di ricavare direttamente la *x*; nel nostro caso, però, saremmo successivamente obbligati ad operare una sostituzione:

$$x(x+1) = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{1+x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}}$$

ma continuando a sostituire la frazione $\frac{1}{1+x}$ al posto di *x* questo procedimento… non avrebbe fine! Arriveremmo ad ottenere:

$$x = \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ldots}}}$$

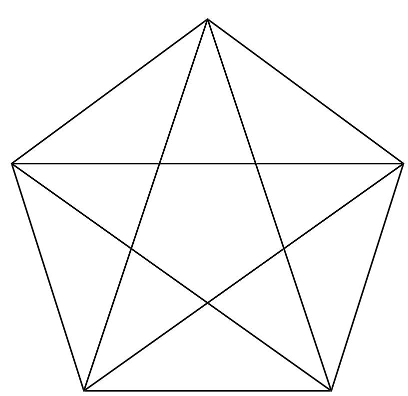
cioè una frazione continua. Non è molto comodo disporre di una soluzione in questa forma; per quanto abbiamo potuto constatare, comunque:

$$\frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\dots}}} \quad \text{è un altro modo di scrivere:} \quad \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Quarto personaggio: un Greco, ventiquattro secoli fa

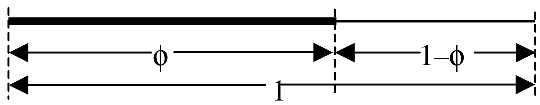
Il mio nome è Fidia, ateniese. Sono un grande scultore, ho dedicato l'intera mia vita al culto della bellezza, della perfezione formale: la mia colossale statua di Zeus in Olimpia, d'oro e d'avorio, era considerata una delle sette *meraviglie del mondo* ed alcune tra le mie opere, dai tempi della 83^a Olimpiade, hanno sfidato i secoli.

Un vero artista deve conoscere bene l'armonia delle proporzioni; dunque deve conoscere la Matematica: tra le figure geometriche, ad esempio, esiste un rettangolo così "armonico" nelle sue parti da meritare l' aggettivo di "aureo"; il rapporto tra le misure dei suoi due lati diversi è un numero, detto appunto "rapporto aureo": ogni rettangolo che appare nelle costruzioni greche che vengono considerate "belle" è costruito in base a questo numero. Spesso tale rapp orto è applicato nelle mie sculture (tant'è vero che quel magico "numero aureo" è indicato con " ϕ", la lettera "fi", proprio l'iniziale del mio nome!) ed in quelle del mio collega Policleto; così accade per gli immortali capolavori dell'architettura elleni ca, per il Partenone, gemma dell'Acropoli della mia città, o per il tempio di Poseidone a Paestum.



Vorrei ricordare che la considerazione del numero φ è antichissima: già i seguaci di Pitagora di Samo sapevano bene che le cinque diagonali di un pentagono regolare (che costituiscono un pentagono stellato) si tagliano in parti che stanno tra di loro nel rapporto aureo; ed il pentagono stellato era una figura ritenuta molto importante dai Pitagorici.

Ma qual è, dunque, questo "numero aureo" ϕ? La regola per trovarlo è semplice: consideriamo un segmento di lunghezza unitaria.



Ebbene, la "parte aurea" ϕ deve essere media proporzionale tra l'intero segmento (lungo, dunque, 1) e la parte rimanente (lunga $1-\phi$); pertanto:

$$1 : \phi = \phi : (1-\phi) \qquad \Rightarrow \qquad \phi^2 = 1-\phi \qquad \Rightarrow \qquad \phi^2+\phi = 1$$

Ora, sappiamo grazie alla formula di Mohammed Ibn Musa Al Khuwarizmi che il numero φ che risolve questa equazione è:

$$\phi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad \text{che si può scrivere anche:} \qquad \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$$

E dunque proprio io, Fidia, padre di alcune delle più alte meraviglie dell'Arte, ti invito ora a contemplare le sorprendenti meraviglie della Matematica: con la stessa scrittura, la frazione continua: $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}$, possiamo indicare il numero aureo ϕ, chiave della bellezza della Grecia classica, ed il numero al quale tendono i rapporti tra due termini consecutivi della successione di Fibonacci ([3]).

Davvero la Matematica è uno scrigno ricco di sorprese: una popolazione di coniglietti può aumentare strizzando idealmente l'occhio alle perfette proporzioni di un tempio greco: e tutto ciò grazie alle riflessioni algebriche di un matematico persiano nonché ad uno strano, infinito procedimento per il calcolo pratico delle radici quadrate messo a punto da due matematici bolognesi del Rinascimento!

E all'improvviso…

…la bambina sentì il proprio nome risuonare, pronunciato con affettuosa decisione dalla familiare voce dell'insegnante: ***"Alice!"***

Concludiamo con una riflessione

Che cos'è *la Matematica*? Chi sono *i matematici*? ([4])

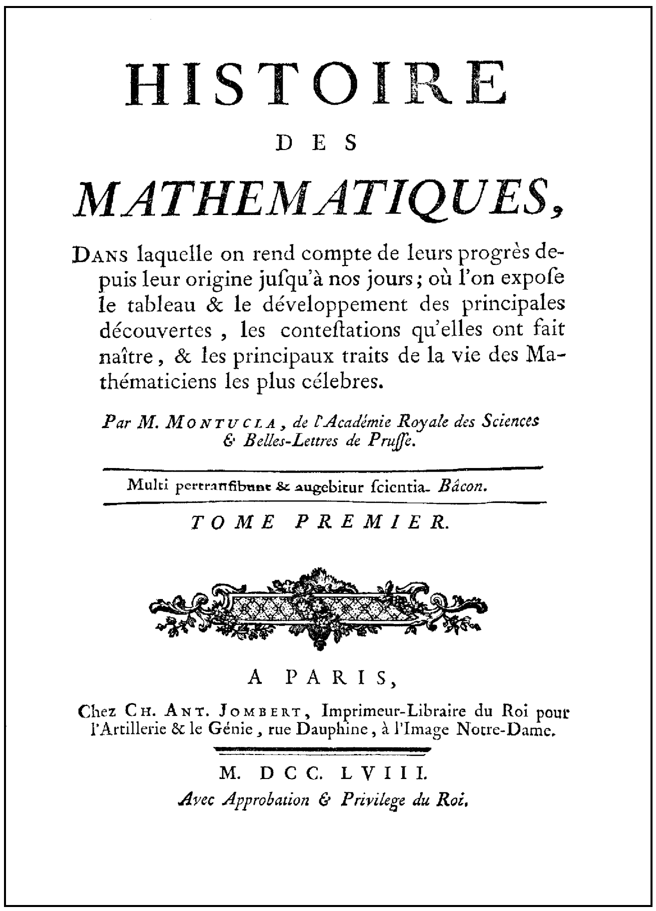
Apparentemente può sembrare molto semplice rispondere a queste domande: tutti abbiamo studiato un po' di Matematica, a scuola; e tutti abbiamo conosciuto qualche insegnante di Matematica, a partire, ovviamente, dai *nostri* insegnanti. È dunque spontaneo identificare nella Matematica quella parte, più o meno estesa, del nostro bagaglio scolastico-culturale che ha a che fare con i *numeri*, con i *calcoli*, con i *problemi*, con gli *esercizi*... Analogamente, per molti di noi, i matematici sono coloro i quali ci hanno insegnato (con successo pieno oppure, in qualche caso, soltanto parziale) quella Matematica.

Eppure, se ci rivolgiamo ad uno specialista quale è Jean Dieudonné, uno dei più profondi matematici del secolo scorso, ci rendiamo conto che quelle nostre risposte sono almeno discutibili. Nel saggio intitolato *L'arte dei numeri* (Dieudonné, 1989, pp. 7 e 9), Dieudonné afferma infatti che un matematico è "qualcuno che ha pubblicato almeno la dimostrazione di un teorema non banale".

Ovviamente questa affermazione non può essere considerata una *definizione* vera e propria: Dieudonné è il primo a riconoscere ciò, nel proprio scritto; molte cose, in essa, dovrebbero infatti essere chiarite: siamo certi di sapere che cos'è un "teorema", o che cosa significa "non banale"? Inoltre: in quale rivista, libro o giornale questo "teorema non banale" dovrebbe essere pubblicato?

Il suggerimento del matematico francese ha però un innegabile pregio: ci fa capire che la nostra iniziale identificazione tra *matematico* e *insegnante di Matematica* è, in linea di massima, insufficiente. Sarebbe come identificare un poeta con un *insegnante di Lettere*: naturalmente non è escluso che un poeta operi anche come insegnante di lettere; ma le due figure, in generale, non coincidono.

Ancora più complicato è tentare di fornire una definizione della *Matematica*. Lo stesso Dieudonné evita di indicare i confini di questa straordinaria creazione della mente umana e ricorda giustamente che "anche studiosi eminenti in altre scienze spesso hanno idee soltanto stravaganti sull'attività dei matematici". Saremmo allora tentati di affermare che la Matematica null'altro è che il prodotto dell'attività creativa dei matematici, ma così facendo temiamo di cadere in un terribile circolo vizioso ([5]): un pericolo dal quale ogni buon matematico dovrebbe guardarsi attentamente…



HISTOIRE

DES

MATHEMATIQUES,

DANS laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine juſqu'à nos jours; où l'on expoſe le tableau & le développement des principales découvertes, les conteſtations qu'elles ont fait naître, & les principaux traits de la vie des Mathématiciens les plus célebres.

Par M. MONTUCLA, de l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres de Pruſſe.

Multi pertranſibunt & augebitur ſcientia. *Bacon.*

TOME PREMIER.

A PARIS,

Chez CH. ANT. JOMBERT, Imprimeur-Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Génie, rue Dauphine, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. LVIII.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

La prima edizione di *Histoire des Mathematiques* (Paris, 1758) di Etienne Montucla

La Matematica, dunque, *non* è quella che abbiamo studiato, e talvolta anche imparato, sui banchi di scuola. O, meglio: non è *solo* quella. Diremo di più: spesso la considerazione della nostra passata esperienza scolastica ci porta addirittura a farci un'immagine scorretta della Matematica. Talvolta un malcapitato studente, magari annoiato da montagne di esercizî lunghi, complicati, ripetitivi, è indotto a pensare alla Matematica come ad un blocco granitico di regole, di definizioni, di procedimenti; ad un pesante agglomerato di tecniche forse utili (certamente, ahimè, tutt'altro che piacevoli!), una massa cupa, imponente e severa che esiste da secoli (da sempre?) e che resterà immutata per altrettanti secoli (per sempre?), esclusivamente destinata ad essere studiata e faticosamente imparata dagli scolari di ieri, di oggi e di domani... Fortunatamente non tutti gli studenti subiscono una simile sorte.

Per evitare il formarsi di concezioni distorte e deludenti come quella ora descritta, purtroppo diffuse (e non soltanto tra gli studenti!), può essere utile accostarsi alla storia della Matematica. Lo studente verrà così invitato a rendersi conto "di persona" che la Matematica è stata ed è una disciplina affascinante, in continua evoluzione, pensata, elaborata, scritta da uomini e da donne ([6]) in carne ed ossa e non ereditata da un passato inaccessibile, indecifrabile e oscuro. Una disciplina non sempre *facile*, certo: ma stimolante, spesso divertente (Lolli, 1998), sempre, intimamente, *bella*.

Note

(1) La scrittura ricorsiva della successione di Fibonacci non è l'unico modo di assegnare tale successione: il matematico francese Jacques Binet (1786-1856) dimostrò infatti che il termine n-esimo della successione di Fibonacci (n>0) è dato dalla formula $a_n = \frac{b^n - c^n}{b - c}$, dove b, c sono le radici dell'equazione $x^2 - x - 1 = 0$.

(2) Per quanto riguarda il teorema di Sleszynski-Pringsheim si veda: Lorentzen, Waadeland, 1992, pp. 30-31. Per un inquadramento storico degli argomenti trattati indichiamo: Loria, 1929-1933; D'Amore, Matteuzzi, 1976; Maracchia, 1979; Struik, 1981; Boyer, 1982; Kline, 1991; Bagni, 1996. Alcuni testi originali sono riportati in: Bottazzini, Freguglia, Toti Rigatelli, 1992.

(3) Per provare che la successione dei rapporti di termini successivi della successione di Fibonacci tende a ϕ non è indispensabile ricorrere alle frazioni continue; ad esempio, sarebbe sufficiente osservare che se la successione dei rapporti R_n ammette limite (fatto che viene

ammesso intuitivamente, ma che a rigore andrebbe dimostrato), essendo $R_{n+1} = \dfrac{1}{1+R_n}$, il limite a cui tendono R_n e R_{n+1} è lo stesso e, detto l il loro comune valore, risulta $l = \dfrac{1}{1+l}$, da cui $l^2+l = 1$; il valore positivo di l è dunque $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} = \phi$.

(4) Quest'ultimo paragrafo è ispirato all'introduzione di: Bagni, 2000.

(5) Osserviamo tuttavia che una simile concezione della Matematica, sebbene sia da considerare ancora poco chiara e sostanzialmente insufficiente, non deve essere del tutto bocciata: la comunità dei *matematici* è spesso l' unico referente per decidere se una ricerca può essere accettata nell' àmbito della *Matematica* propriamente detta.

(6) Molto sarebbe da osservare per quanto riguarda la presenza femminile nella storia (anche recente) della Matematica; a tale proposito, invitiamo alla lettura di: Lolli, 2000.

Una donna nella storia della Matematica: Maria Gaetana Agnesi (1718-1799)

Bibliografia

Bagni, G.T., 1996, *Storia della Matematica*, I-II, Pitagora, Bologna
Bagni, G.T., 2000, *Matematici*, Antilia, Treviso
Bottazzini, U.; Freguglia, P., Toti Rigatelli, L., 1992, *Fonti per la storia della Matematica*, Sansoni, Firenze
Boyer, C.B., 1982, *Storia della Matematica*, Mondadori, Milano (*A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968)
D' Amore, B., Matteuzzi, M., 1976, *Gli interessi matematici*, Zanichelli, Bologna
Dieudonné, J., 1989, *L' arte dei numeri*, Mondadori, Milano (*Pour l' honneur de l' esprit humain*, Hachette, Paris 1987)
Kline, M., 1991, *Storia del pensiero matematico*, I-II, Einaudi, Torino (*Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York, 1972)
Lolli, G., 1998, *Il riso di Talete*, Bollati Boringhieri, Torino
Lolli, G., 2000, *La crisalide e la farfalla*, Bollati Boringhieri, Torino
Lorentzen, L., Waadeland, H., 1992, *Continued Fractions with Applications*, North-Holland, Amsterdam
Loria, G., 1929-1933, *Storia delle Matematiche dall' alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino (rist. anastatica: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982)
Maracchia, S., 1979, *Da Cardano a Galois*, Feltrinelli, Milano
Struik, D.J., 1981, *Matematica: un profilo storico*, Il Mulino, Bologna (*A Concise History of Mathematics*, Dover, New York 1948)

Giorgio T. Bagni