Learning and Assessment in Mathematics and Science,
Gagatsis, A.; Constantinou, C.P. & Kyriakides, L. (Eds.) (2000),
Department of Education, University of Cyprus, Nicosia, 223-240

Dalla storia alla didattica dell'Algebra: il gruppo moltiplicativo di Bombelli

GIORGIO T. BAGNI

"Accetti dunque il Lettore con animo libero da ogni passione l'opera mia, e cerchi farsene intendente, che vedrà di quanto giovamento gli sarà, avisandolo però che se egli capace non sarà della parte minore della Aritmetica, non si ponghi a questa impresa di volere apprendere l'Algebra, perché getterebbe il tempo".

Rafael Bombelli (1572-1579)

Introduzione

Il bolognese Rafael Bombelli è uno dei protagonisti della storia dell'algebra (Bortolotti, 1925). Il suo capolavoro, *Algebra,* probabilmente completato prima del 1551 (Bombelli, 1966, p. XXXI), fu pubblicato in due edizioni identiche nel 1572 e nel 1579 (si tratta in effetti di due successive distribuzioni della stessa opera stampata: Loria, 1929-1933; Bombelli, 1966; Bagni, 1996, I).

Per presentare adeguatamente alcuni aspetti dell'opera di Bombelli è necessario ricordare la contesa sulla risoluzione delle equazioni algebriche di terzo e di quarto grado ([1]). Essa è fatta risalire a due studiosi italiani, Gerolamo Cardano, che scrisse *Ars Magna* (1545) e Nicolò Fontana, detto Tartaglia (1500-1557), autore di *Quesiti et invenzioni diverse* (1546) (Carruccio, 1972), sebbene il primo a trovare una tecnica risolutiva per tali equazioni fu nel 1515 il bolognese Scipione del Ferro (1465-1526) ([2]), che morì senza pubblicare la scoperta (Frati, 1910; Maracchia, 1979, p. 18; Bottazzini, 1990, p. 3) ([3]).

([1]) "Se l'algebra e l'aritmetica restarono pressoché ferme tra il 1200 e la fine del Medioevo, un improvviso risveglio si registra nel XVI secolo" (Bagni, 1996).

([2]) Del Ferro è citato per cinque volte da Bombelli nel manoscritto dell'*Algebra* (ritrovato da E. Bortolotti, cod. B.1569, Biblioteca dell'Archiginnasio, Bologna).

([3]) La controversia per la priorità fu lunga e sterile. Spesso le aspre contese che videro opposti matematici di valore per questioni di priorità sono prive di senso: molti risultati devono infatti essere considerati alla stregua di "scoperte collettive".

Nota ed interessante è la poesia in cui Tartaglia volle riassumere il proprio metodo per la risoluzione di un'equazione di terzo grado (il cenno interpretativo è in notazione moderna):

'Quando che 'l cubo con le cose appresso Se agguaglia à qualche numero discreto Trovan dui altri differenti in esso.	 $x^3+px = q \qquad p > 0 \wedge q > 0$
Da poi terrai questo per consueto Che 'l lor produtto sempre sia uguale Al terzo cubo delle cose neto,	$q = u-v$ $uv = (p/3)^3$
El residuo poi suo generale Delli lor lati cubi ben sottratti Varrà la tua cosa principale" ([4]).	 $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$

Pertanto è sufficiente determinare u e v per ricavare la radice x, e ciò può essere ottenuto attraverso le note tecniche relative ad equazioni di secondo grado (Smith, 1959; Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992, pp. 178-179). Ma sarà la fondamentale semplificazione dei radicali $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$ che, studiata da Bombelli, porterà a risultati particolarmente significativi per la storia dell'algebra (Franci & Toti Rigatelli, 1979, p. 62; Maracchia, 1979, p. 41).

Scrive infatti G. Loria introducendo l'opera di Bombelli: 'Nelle ultime pagine del suo I libro egli fa compiere all'algebra un mirabile sbalzo in avanti, assurgendo al livello di creatore del calcolo con numeri complessi. A tale scopo egli introduce le locuzioni *più di meno* e *meno di meno*, per indicare le unità $+i$ e $-i$, che abbrevia nelle scritture *pdm* e *mdm*; in conseguenza con la scrittura *R c* 2 *pdm* 2 egli rappresentò l'espressione che noi indichiamo con la scrittura $\sqrt[3]{2+2i}$. Per operare mediante i nuovi enti aritmetici stabilisce un certo numero di regole fondamentali, le quali non differiscono da quelle che oggi noi esprimiamo" (Loria, 1929-1933, pp. 316-317).

([4]) Così prosegue la poesia di Tartaglia:

'In el secondo de codesti atti
Quando che 'l cubo restasse lui solo
Tu osserverai quast'altri contratti,

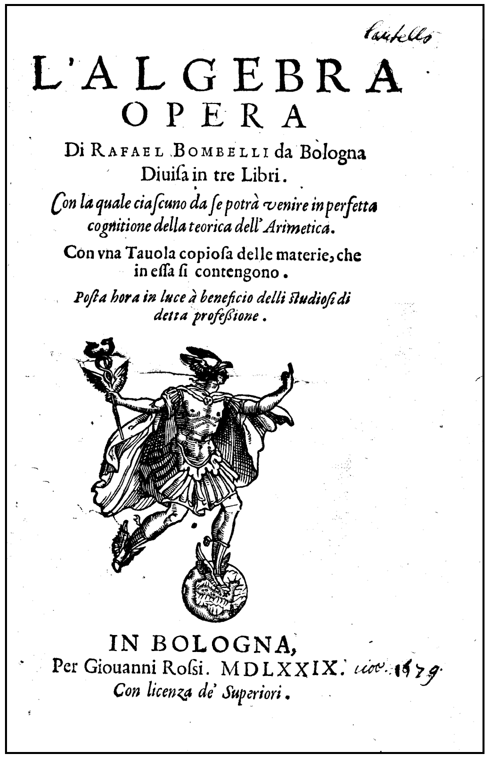
Del numero farai due part'à volo
Che l'una in l'altra si produca schietto
El terzo cubo delle cose in stolo

Dalla qual poi, per commun precetto
Torrai li lati cubi insieme gionti
Et cotal somma sarà il tuo concetto.

El terzo poi de questi nostri conti
Se solve col secondo se ben guardi
Che per natura son quasi congionti.

Questi trovai, et non con passi tardi
Nel mille cinquecente, quatro et trenta
Con fondamenti ben saldi e gagliardi

Nella città dal mare intorno centa".
(Maracchia, 1979, pp. 24-25).


L'ALGEBRA
OPERA
Di RAFAEL BOMBELLI da Bologna
Diuisa in tre Libri.
Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.
Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.
Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.
IN BOLOGNA,
Per Giouanni Rossi. MDLXXIX.
Con licenza de' Superiori.

Il *gruppo moltiplicativo di Bombelli*

Riportiamo le “regole fondamentali” sopra menzionate da Loria nella formulazione originale di Rafael Bombelli:

> “Più via più di meno, fa più di meno.
> Meno via più di meno, fa meno di meno.
> Più via meno di meno, fa meno di meno.
> Meno via meno di meno, fa più di meno.
> Più di meno via più di meno, fa meno.
> Più di meno via men di meno, fa più.
> Meno di meno via più di meno, fa più.
> Meno di meno via men di meno, fa meno”

(Bombelli, 1572-1579, p. 169; Bombelli, 1966, pp. 133-134; citato in: Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992, p. 182).

Tali regole sono così espresse, con la notazione in uso ai giorni nostri:

$$(+1)\cdot(+i) = +i$$
$$(-1)\cdot(+i) = -i$$
$$(+1)\cdot(-i) = -i$$

$(-1)\cdot(-i) = +i$
$(+i)\cdot(+i) = -1$
$(+i)\cdot(-i) = +1$
$(-i)\cdot(+i) = +1$
$(-i)\cdot(-i) = -1$

e possono essere riassunte nella tavola seguente (detta *tabella di Cayley*: Najmark & Stern, 1984, p. 10):

x	+1	-1	+*i*	-*i*
+1	+1	-1	+*i*	-*i*
-1	-1	+1	-*i*	+*i*
+*i*	+*i*	-*i*	-1	+1
-*i*	-*i*	+*i*	+1	-1

Esse corrispondono alle moderne regole moltiplicative di calcolo per l'unità immaginaria. Osserviamo che le "regole fondamentali" bombelliane ora ricordate portano direttamente alla considerazione del gruppo moltiplicativo (commutativo) ad elementi complessi: $(\{+1; -1; +i; -i\}; \cdot)$. (Si tratta del gruppo delle radici quarte dell'unità, uno dei classici esempi di gruppo abeliano finito: Keiser, 1956, p. 1540; Machì, 1974, p. 15; Najmark, & Stern, 1984, p. 10). **Esso potrebbe dunque a ragione essere chiamato *gruppo moltiplicativo di Bombelli*.**

Si noti che Bombelli si era implicitamente occupato, alcune pagine prima, del sottogruppo di ordine due $(\{+1; -1\}; \cdot)$ del gruppo ora introdotto, enunciando le ben note regole di calcolo:

"Più via più fa più.
Meno via meno fa più.
Più via meno fa meno.
Meno via più fa meno"

(Bombelli, 1572-1579, p. 70; Bombelli, 1966, p. 62).

Tali regole sono così espresse, con la notazione in uso ai giorni nostri:

$(+1)\cdot(+1) = +1$
$(-1)\cdot(+1) = -1$
$(+1)\cdot(-1) = -1$
$(-1)\cdot(-1) = +1$

e possono essere riassunte nella tabella di Cayley:

x	+1	-1
+1	+1	-1
-1	-1	+1

Esse corrispondono evidentemente alle moderne "regole dei segni" e portano, unitamente alle regole moltiplicative per l'unità immaginaria, a completare la tabella di Cayley del *gruppo di Bombelli*, sopra riportata ([5]).

L'opera di Bombelli tra intuizione e consapevolezza

L'*Algebra* di Bombelli è dunque un'opera straordinariamente innovativa, nella storia della matematica. Ma quale fu l'obiettivo valore e l'effettiva portata dell'introduzione dei numeri complessi? Quale incidenza ebbero tali numeri, a partire dal XVI secolo, nello sviluppo della matematica?

Non è semplice rispondere a tali domande. Certamente in Bombelli non troviamo una moderna trattazione del corpo complesso; il matematico bolognese si limitò a segnalare la presenza di enti matematici utili per la risoluzione di un problema ben definito: la risoluzione di alcune equazioni algebriche (egli osserva esplicitamente che nella risoluzione delle equazioni di terzo grado a coefficienti reali ogni radice complessa è sempre accompagnata dalla sua coniugata: Bombelli, 1966, p. XLIX).

Dobbiamo inoltre rilevare che i numeri complessi, in seguito alla (pur vasta) diffusione dell'opera di Bombelli, non furono immediatamente accettati dalla comunità matematica come quantità numeriche vere e proprie (Sfard, 1991); Bourbaki parla di un'iniziale "riluttanza" dei matematici tra il XVI e il XVII secolo (Bourbaki, 1963, p. 68) ed anche D.J. Struik menziona un lungo periodo di adattamento (Struik, 1981, p. 120; D'Amore & Oliva, 1993, pp. 235-236).

Lo stesso Bombelli non nasconde le proprie perplessità a proposito delle strane entità matematiche introdotte, che pure sembravano essere utili per la trattazione del "caso irriducibile": poche righe prima di elencare le regole per la moltiplicazione dell'unità immaginaria, egli osserva francamente:

([5]) Com'è noto, il gruppo di Bombelli $(\{+1; -1; +i; -i\}; \cdot)$ ora esaminato è ciclico e ha per generatori sia i che $-i$. Tuttavia di tale proprietà non troviamo alcuna (implicita) indicazione nell'*Algebra*: ovvero Bombelli elenca le regole di calcolo per l'unità immaginaria in un ordine che non sembra riflettere quello che potrebbe portare all'intuizione della ciclicità del gruppo. Analoghe considerazioni si possono fare riguardo al sottogruppo $(\{+1; -1\}; \cdot)$, generato da -1 (Bombelli, 1572-1579, pp. 70 e 169; Bombelli, 1966, pp. 62 e 133-134).

"Ho trovato un'altra sorte di R.c. legate molto differenti dall'altre, la qual nasce dal Capitolo di cubo eguale a tanti e numero... *la quale parerà a molti più tosto sofistica che reale, e tale opinione ho tenuto anch'io*, sin che ho trovato la sua dimostratione in linee (come si dimostrerà nella dimostratione del detto Capitolo in superficie piana)" (Bombelli, 1572-1579, p. 169; Bombelli, 1966, p. 133, il corsivo è nostro) ([6]).

Ma tutto ciò non ci consente di liquidare la posizione bombelliana come un espediente tecnico per completare le tecniche messe a punto da del Ferro, Cardano e Tartaglia (D'Amore & Oliva, 1993, p. 228; Bourbaki, 1963, p. 91).

L'introduzione *formale* dell'unità immaginaria che troviamo nell'*Algebra* deve essere considerata non solo efficace, ma anche particolarmente moderna: Bombelli agisce da matematico quando accetta di considerare le "quantità" *più di meno* e *meno di meno* alla stregua di numeri. Egli sa di non poter considerare tali "quantità" come reali, ma non rinuncia ad utilizzarle in chiave astratta e si mostra consapevole di ciò quando fissa, esplicitamente, le regole per la loro moltiplicazione. Bourbaki nota che "Bombelli considera i numeri complessi come 'combinazioni lineari' a coefficienti positivi di quattro elementi di base... in particolare egli pone come assioma che 'più' e 'più de meno' non si addizionino; prima apparizione, questa, dell'indipendenza lineare" (Bourbaki, 1963, pp. 91-92; rif. a: Bombelli, 1572-1579, pp. 169 e 190).

Dunque Bourbaki ricorda che, alcune pagine dopo la prima introduzione di *più di meno* e di *meno di meno*, il matematico bolognese fa riferimento anche ad altre operazioni con le nuove entità. In particolare, Bombelli afferma l'impossibilità di addizionare numeri reali ed immaginari nel passo seguente:

"Più con + di – non si può sommare, se non dire più + di – come se si dicesse sommisi +5 con + di –8, fa 5 + di –8 et il medesimo del – di –" (Bombelli, 1572-1579, p. 190; Bombelli, 1966 p. 147).

Possiamo dunque affermare con E. Bortolotti che Bombelli fissa la propria aritmetica su di un vero e proprio sistema di proposizioni primitive, dando così prova di straordinaria lucidità e modernità (Bombelli, 1966, p. L).

([6]) L'Autore si riferisce alla: "Dimostratione di Cubo eguale a Tanti e numero in superficie piana" che "costituisce una dimostrazione generale di esistenza per le radici reali dell'equazione cubica, che non esclude il caso irriducibile" (Bombelli, 1572-1579, pp. 298-299; Bombelli, 1966, pp. 228-229). Bortolotti nota che "il Bombelli dapprima (come si vede nel manoscritto) ritenne di poter senz'altro applicare alle radici quadrate di numeri negativi le leggi di calcolo proprie delle radici aritmetiche di numeri positivi, e rappresentò i numeri immaginari sotto forma di radicali... Ma poi si accorse che questi erano enti di natura speciale, alla cui rappresentazione occorrevano simboli appropriati e pel cui calcolo occorreva stabilire speciale algoritmo" (Bombelli, 1966, p. XLVIII).

Analoghe considerazioni di modernità possono essere svolte con riferimento al *gruppo di Bombelli*: sarebbe errato (e peraltro non sostenibile) attribuire al matematico bolognese la consapevole introduzione di una struttura importante e delicata come quella di gruppo tre secoli prima della definizione di Dedekind.

Ma è altrettanto evidente che Bombelli si rese conto di proprietà che, almeno per quanto riguarda il caso in esame, devono essere considerate non distanti dal concetto di gruppo: la stessa completa elencazione dei risultati di tutte (e soltanto) le moltiplicazioni (*via*) che legano gli elementi *più*, *meno*, *più di meno* e *meno di meno* indica un'iniziale netta attenzione per un ben definito insieme di oggetti matematici (di numeri?) e per un ben definito ambito operazionale.

Dalla storia alla didattica della matematica

Con un importante lavoro (1994), E. Dubinsky, J. Dautermann, U. Leron e R. Zazkis hanno aperto "una discussione riguardante la natura della conoscenza nell'Algebra astratta, in particolare nella teoria dei gruppi, e come un individuo può sviluppare la comprensione di vari argomenti in tale campo" (Dubinsky, & Al., 1994, p. 267; per quanto riguarda l'insegnamento basato sul software ISETL, presentato in Dubinsky & Al., 1994, si veda ad esempio: Dubinsky & Leron, 1994). Consideriamo ora il concetto di gruppo (il lavoro citato considera molti concetti algebrici: Dubinsky & Al., 1994, p. 292). Gli Autori osservano che "la conoscenza di un individuo del concetto di gruppo dovrebbe includere la comprensione di varie proprietà matematiche e la costruzione indipendente di esempi particolari, tra i quali gruppi costituiti da elementi non esplicitamente indicati e da un'operazione binaria tale da soddisfare gli assiomi" (Dubinsky & Al., 1994, p. 268; Leron & Dubinsky, 1995).

In un recente articolo (1996), B. Burn sottolinea fortemente che la nozione di gruppo presentata in Dubinsky & Al. (1994) è introdotta mediante definizioni formali. In particolare, un gruppo è "un insieme con un'operazione binaria che soddisfa quattro assiomi [...] Gli autori espongono un punto di vista basato sulla teoria degli insiemi" (Burn, 1996, p. 375). Quindi Burn nota che "un'analisi basata sulla teoria degli insiemi è impostata mediante la sensibilità matematica del ventesimo secolo, applicata però ad argomenti matematici cronologicamente precedenti" (Burn, 1996, p. 375); pertanto egli suggerisce un'introduzione pre-assiomatica alla teoria dei gruppi (Burn, 1996, p. 375; Jordan & Jordan, 1994).

Dunque, secondo Burn, il concetto di gruppo può essere introdotto *prima* di fornire gli assiomi egli sottolinea l'importanza della considerazione delle simmetrie: Burn, 1996, p. 377; Burn, 1985; per quanto riguarda i concetti fondamentali della teoria dei gruppi, egli cita: Freudenthal, 1973).

In un altro recente lavoro (1997), E. Dubinsky & Al. rilevano che "la capacità di vedere il generale nel particolare è uno dei compiti più misteriosi e difficili per gli allievi" (Dubinsky & Al., 1997, p. 252; Mason & Pimm, 1984); a tale proposito, gli Autori ricordano le difficoltà incontrate dagli studenti con riferimento alle permutazioni ed alle simmetrie (Asiala & Al., 1996; essi citano inoltre: Breidenbach & Al., 1991; Zazkis & Dubinsky, 1996; per quanto riguarda la visualizzazione, si veda: Zazkis & Al., 1996).

Un'importante questione è dunque la seguente: è possibile (ed utile) introdurre il concetto di gruppo mediante un'introduzione pre-assiomatica?

Non vogliamo dare una risposta completa a tale questione: vogliamo soltanto contribuire alla conoscenza dello sviluppo della comprensione del concetto di gruppo, con riferimento particolare ad un esempio storico. Ad esempio, la considerazione del *gruppo di Bombelli* può aiutare gli allievi nella comprensione del concetto di gruppo? In particolare: la considerazione delle "regole fondamentali" bombelliane può portare gli studenti ad una comprensione consapevole di *tutte* le proprietà sulle quali si basa il concetto di gruppo? (sulla consapevolezza: Tsamir & Tirosh, 1997; Piaget, 1980).

L'apprendimento di un argomento basato sulla considerazione di esempi storici non dovrebbe essere limitato all'ambito storico-aneddotico; è necessaria una sua evoluzione, una sua estensione a sfere differenti (Feldman & Toulmin, 1976). Esaminiamo dunque il comportamento degli allievi: abbiamo proposto due test ad alcuni studenti della scuola secondaria superiore. Nel primo, abbiamo soltanto citato le "regole fondamentali" di Bombelli; nel secondo, abbiamo dato le "regole" ed abbiamo fornito la *tabella di Cayley*. Vogliamo dunque esaminare se le quattro proprietà che costituiscono la definizione di gruppo vengono comprese dagli allievi (con riferimento a Burn, introdotte dai termini "chiuso", "associativo", "identità", "inverso": Burn, 1996, p. 372).

Abbiamo proposto il test a tre classi III *Liceo Scientifico* (allievi di 16-17 anni), 74 allievi, e a tre classi IV *Liceo scientifico* (17-18 anni), 72 allievi (in totale: 146 allievi), a Treviso (Bagni, 1998). Al momento del test gli allievi conoscevano la definizione di *i*, ma non conoscevano il concetto di gruppo.

Abbiamo diviso (casualmente) ogni classe in due parti, A e B; quindi abbiamo sottoposto agli allievi le seguenti schede. Nella scheda A (fornita agli allievi della parte A, per un totale di 73 allievi) ci siamo limitati a citare le "regole fondamentali" di Bombelli (in linguaggio moderno); nella scheda B (fornita agli allievi della parte B, per un totale di 73 allievi), abbiamo citato le "regole fondamentali" di Bombelli ed abbiamo fornito la *tabella di Cayley*. Mediante tale test vogliamo evidenziare se la semplice considerazione di un esempio storico (senza un punto di vista di teoria degli insiemi) è utile ad introdurre il concetto di gruppo; l'eventuale differenza tra i risultati ottenuti nei due casi, ovvero senza e con la considerazione della *tabella di Cayley*.

Per quanto riguarda le proprietà, è possibile attendersi che la chiusura, l'associatività e la presenza dell'elemento neutro nell'insieme G = {+1; –1; +i; –i} siano accettate da molti allievi: la chiusura appare chiaramente dalle "regole fondamentali" di Bombelli e dalla *tabella di Cayley*; le altre proprietà sono familiari all'allievo. La proprietà secondo la quale per ogni $x \in$ G, esiste un $x' \in$ G tale che $x \cdot x' = x' \cdot x = 1$ può essere più delicata da essere riconosciuta.

Scheda A. Nel proprio capolavoro, *Algebra*, R. Bombelli di Bologna (1526-1572) ha enunciato le regole:

$(+1)\cdot(+1) = +1 \quad (-1)\cdot(+1) = -1 \quad (+1)\cdot(-1) = -1 \quad (-1)\cdot(-1) = +1$
$(+1)\cdot(+i) = +i \quad (-1)\cdot(+i) = -i \quad (+1)\cdot(-i) = -i \quad (-1)\cdot(-i) = +i$
$(+i)\cdot(+i) = -1 \quad (+i)\cdot(-i) = +1 \quad (-i)\cdot(+i) = +1 \quad (-i)\cdot(-i) = -1$

(qui le abbiamo riportate in simboli moderni).

Considera ora l'insieme G = {+1; –1; +i; –i}. Le seguenti affermazioni sono vere o sono false?

(1) Il prodotto di due elementi di G è sempre un elemento di G.
(2) La moltiplicazione in G è associativa.
(3) Esiste un elemento $e \in$ G tale che, per ogni $x \in$ G, $e \cdot x = x \cdot e = x$.
(4) Per ogni $x \in$ G, esiste un elemento $x' \in$ G tale che $x \cdot x' = x' \cdot x = e$.

Scheda B. Nel proprio capolavoro, *Algebra*, R. Bombelli di Bologna (1526-1572) ha enunciato le regole:

$(+1)\cdot(+1) = +1 \quad (-1)\cdot(+1) = -1 \quad (+1)\cdot(-1) = -1 \quad (-1)\cdot(-1) = +1$
$(+1)\cdot(+i) = +i \quad (-1)\cdot(+i) = -i \quad (+1)\cdot(-i) = -i \quad (-1)\cdot(-i) = +i$
$(+i)\cdot(+i) = -1 \quad (+i)\cdot(-i) = +1 \quad (-i)\cdot(+i) = +1 \quad (-i)\cdot(-i) = -1$

(riportate in simboli moderni). Dunque possiamo scrivere la tabella seguente:

x	+1	-1	+i	-i
+1	+1	-1	+i	-i
-1	-1	+1	-i	+i
+i	+i	-i	-1	+1
-i	-i	+i	+1	-1

Considera ora l'insieme G = {+1; –1; +i; –i}. Le seguenti affermazioni sono vere o sono false?

(1) Il prodotto di due elementi di G è sempre un elemento di G.
(2) La moltiplicazione in G è associativa.
(3) Esiste un elemento $e \in$ G tale che, per ogni $x \in$ G, $e \cdot x = x \cdot e = x$.
(4) Per ogni $x \in$ G, esiste un elemento $x' \in$ G tale che $x \cdot x' = x' \cdot x = e$.

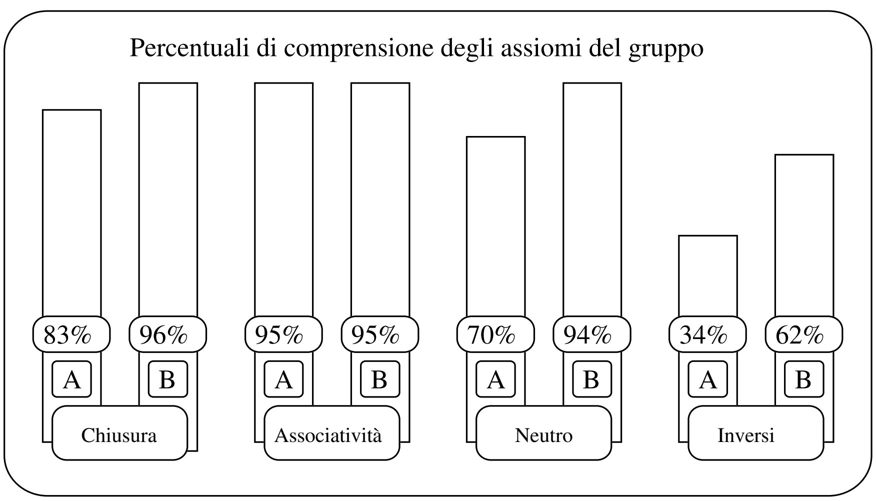
Tempo: 10 minuti (abbiamo voluto che gli allievi esaminino il problema 'a colpo d'occhio'). I risultati del test sono i seguenti:

Scheda A	vero		falso		nessuna risposta	
(1)	61	83%	5	7%	7	10%
(2)	69	95%	0	0%	4	5%
(3)	51	70%	6	8%	16	22%
(4)	25	34%	18	25%	30	41%

Scheda B	vero		falso		nessuna risposta	
(1)	70	96%	1	1%	2	3%
(2)	69	95%	1	1%	3	4%
(3)	68	94%	1	1%	4	5%
(4)	45	62%	9	12%	19	26%

Dunque le proprietà 1, 2, 3 (chiusura, associatività, presenza dell'elemento neutro) sono ben comprese dagli allievi; per quanto riguarda le proprietà 1 e 2 ci sono piccole differenze tra la scheda A e la B: sembra che la considerazione della *tabella di Cayley* abbia leggermente agevolato gli allievi. Per quanto riguarda la proprietà 4 (presenza degli inversi) la situazione appare diversa (7).

Riassumiamo i risultati (si tratta di una rappresentazione qualitativa: le differenze tra le percentuali nel test A e nel test B sono spesso modeste):



(7) È noto che un sottomonoide moltiplicativo *finito* G del gruppo moltiplicativo **C*** dei numeri complessi non nulli è un sottogruppo (Jacobson, 1974, pp. 33; la sufficienza del test di chiusura, in questo caso, è sottolineata anche in: Burn, 1996, p. 373). Dunque, per quanto concerne il test, sarebbe incoerente affermare la verità delle proprietà 1, 2, 3 e la falsità della proprietà 4. Tuttavia la proposizione ricordata non può essere nota agli studenti della secondaria (Dubinsky & Al., 1997, p. 251).

Abbiamo intervistato individualmente gli allievi (scheda A: 48 allievi; scheda B: 28 allievi) che non hanno considerato "vera" l'affermazione 4. Quasi tutti questi allievi hanno semplicemente affermato di non essersi resi conto della presenza degli inversi soltanto dall'esame delle regole di Bombelli o della *tabella di Cayley*.

Dunque soltanto per alcuni allievi la considerazione dell'esempio storico ha determinato le reazioni sperate (o supposte): per questi casi, la procedura didattica utilizzata ha portato agli effetti ipotizzati. Anche per quanto riguarda questo caso, concludiamo che la considerazione di un esempio storico può essere utile per l'introduzione di un importante concetto matematico, ma le reazioni sperate si sono verificate soltanto per alcuni allievi.

Un'introduzione pre-assiomatica alla teoria dei gruppi può essere didatticamente utile (Jordan & Jordan, 1994), ma non sempre garantisce un pieno apprendimento. Come sopra osservato, il problema è aperto: è possibile obiettare che la semplice proposta delle "regole fondamentali" di Bombelli non è sufficiente per determinare un completo apprendimento del concetto di gruppo. Sottolineiamo infine che la ricerca presentata è qualitativa: sarebbe ad esempio necessario identificare chiaramente i criteri di campionamento e le intuizioni degli allievi nella fase precedente il test (come osservato in: Burn, 1996, p. 371).

In conclusione, citiamo ancora Dubinsky & Al. (1997), i quali giustamente affermano che "un punto di vista storico è utile per la ricerca didattica in teoria dei gruppi. La storia fa certamente parte della nostra metodologia, ma non possiamo limitarci a considerare soltanto chi provò che cosa e quando, ma anche i meccanismi che portarono al progresso della Matematica" (Dubinsky & Al., 1997, p. 252).

Bibliografia

Anglin, W.S. (1994), *Mathematics. A Concise History and Philosophy*, Springer Verlag, Berlin.

Asiala, M.; Brown, A.; DeVries, D.; Dubinsky, E.; Mathews, D.; & Thomas, K. (1996), A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education, *Research in Collegiate Mathematics Education*, 2, 1-32.

Bagni, G.T. (1996), *Storia della Matematica. I. Dall'Antichità al Rinascimento. II. Dal Rinascimento ad oggi*, Pitagora, Bologna.

Bagni, G.T. (1998), The role of the History of Mathematics in Mathematics Education: reflections and examples, Schwank, I. (Ed.), *Proceedings of CERME-1*, 2, Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik, Osnabrueck (preprint).

Bombelli, R. (1572-1579), *L'Algebra*, Rossi, Bologna.

Bombelli, R. (1966), *L'Algebra*, Forti, U. & Bortolotti, E. (a cura di), Feltrinelli, Milano.

Bortolotti, E. (1925), L'Algebra nella scuola matematica bolognese del secolo XVI: *Periodico di matematiche*, IV.

Bottazzini, U. (1990), *Il flauto di Hilbert*, UTET, Torino.

Bottazzini, U.; Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L. (1992), *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.

Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano (*Eléments d'histoire des mathematiques*, Hermann, Paris 1960).

Boyer, C.B. (1982), *Storia della matematica*, Mondadori, Milano (*A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968).

Breidenbach, D.; Dubinsky, E.; Hawks, J. & Nichols, D. (1992), Development of the process conception of function, *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247-285.

Burn, B. (1996), What are the fundamental concepts of group theory?, *Educational Studies in Mathematics*, 31, 371 -377.

Burn, R.P. (1985), *Groups: a Path to Geometry*, Cambridge.

Burton, M.B. (1988), A linguistic basis for students' difficulties with Algebra, *For the learning of mathematics*, 8.

Carruccio, E. (1972), *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, Pitagora, Bologna.

D'Amore, B. & Matteuzzi, M. (1976), *Gli interessi matematici*, Marsilio, Venezia.

D'Amore, B. & Oliva, P. (1993), *Numeri*, Angeli, Milano.

Dubinsky, E. & Leron, U. (1994), *Learning Abstract Algebra with ISETL*, Springer, New York.

Dubinsky, E.; Dautermann, J.; Leron, U. & Zazkis, R. (1994), On learning fundamental concept of group theory, *Educational Studies in Mathematics*, 27, 3, 267-305.

Dubinsky, E.; Dautermann, J.; Leron, U. & Zazkis, R. (1997), A reaction to Burn's "What are the fundamental concepts of group theory?", *Educational Studies in Mathematics*, 34, 249-253.

Feldman, C.F. & Toulmin, S. (1976), Logic and the theory of mind, Cole, J. K. (a cura di), *Nebraska symposium on motivation 1975*, University of Nebraska Press, Lincoln, London.

Franci, R. & Toti Rigatelli, L. (1979), *Storia della teoria delle equazioni algebriche*, Mursia, Milano.

Frati, L. (1910), Scipione dal Ferro: *Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche*, XII.

Jacobson, N. (1974), *Basic Algebra I*, Freeman, San Francisco.

Jordan, C. & Jordan, D. (1994), *Groups*, Arnold, London.

Keiser, C.J. (1956), The Group Concept: Newman, J.R. (a cura di), *The world of mathematics*, III, Simon and Schuster, New York, 1538-1557.

Kline, M. (1982), *La matematica nella cultura occidentale*, Feltrinelli, Milano (*Mathematics in western culture*, Oxford University Press, New York 1953).

Kline, M. (1985), *Matematica: la perdita della certezza*, Mondadori, Milano (*Mathematics: the loss of certainity*, Oxford University Press, New York 1980).

Kline, M. (1991), *Storia del pensiero matematico*, I-II, Einaudi, Torino (*Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York 1972).

Leron, U. & Dubinsky, E. (1995), An abstract algebra story, *American Mathematical Monthly*, 102, 3, 227-242.

Loria, G. (1929-1933), *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino (riedizione: Hoepli, Milano 1950; ristampa: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982).

Machì, A. (1974), *Introduzione alla teoria dei gruppi*, Feltrinelli, Milano.

Maracchia, S. (1979), *Da Cardano a Galois*, Feltrinelli, Milano.

Mason, J. & Pimm, D. (1984), Generic examples: seeing the general in the particular, *Educational Studies in Mathematics*, 15, 277-289.

Najmark, M.A. & Stern, A.I. (1984), *Teoria delle rappresentazioni dei gruppi*, Editori Riuniti, Roma.

Piaget, J. (1980), *Experiments in contradictions*, Chicago, The University of Chicago Press.

Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins: *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Sfard, A. (1992), The development of Algebra. Confronting historical and psychological perspectives, *Algebra working group*, ICME 7, Quebec.

Smith, D.E. (1959), *A source book in Mathematics*, Dover, New York (McGraw-Hill, 1929).

Struik, D.J. (1981), *Matematica: un profilo storico*, Il Mulino, Bologna (*A Concise History of Mathematics*, Dover, New York 1948).

Tsamir, P. & Tirosh, D. (1997), Metacognizione e coerenza: il caso dell'infinito, *La matematica e la sua didattica*, 2, 122-131.

Zazkis, R. & Dubinsky, E. (1996), Dihedral groups: a tale of two interpretations, *Research in Collegiate Mathematics Education*, 2, 61-82.

Zazkis, R.; Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996), Coordinating visual and analytic strategies: a study of students' understanding of the group D_4, *Journal for research in Mathematics Education*, 27, 4, 435-457.