La nascita di un concetto matematico: Rafael Bombelli e gli immaginari

Giorgio T. Bagni

Riassunto Nel presente lavoro discuteremo un noto riferimento storico per introdurre un importante capitolo dei programmi di matematica. Nel quadro teorico basato su alcune riflessioni di Radford e tenendo presente l'approccio semiotico di Peirce, abbiamo proposto a un gruppo di studenti di 15–18 anni un esempio tratto dall'*Algebra* (1572) di Rafael Bombelli. Concludiamo che l'analisi storica può essere importante per introdurre alcuni contenuti matematici e per comprendere alcune caratteristiche della catena semiosica.

Abstract In this paper we shall discuss a well–known historical reference in order to introduce an important chapter of mathematical curricula. In the theoretical framework based upon some reflections by Radford, and taking into account Peirce's semiotic perspective, we proposed to a group of 15–18 years–old pupils an example from the treatise entitled *Algebra* (1572) by Rafael Bombelli. We conclude that the historical analysis can be important in order to approach some mathematical contents and to comprehend some features of the semiosic chain.

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine

Introduzione

Molto spesso, nella pratica didattica, facciamo esplicitamente o implicitamente riferimento a un termine diffusissimo: *capire*. C'è chi *capisce* la matematica e chi non la *capisce*, gli esercizi servono per *capire*, se non state attenti, ragazzi miei, non riuscirete mai a *capire*… Ma qual è il significato di questa parola magica, *capire*? Ogni insegnante (ogni studente, ogni matematico) dovrebbe capire bene che cosa davvero vuol dire *capire*!

Capire, in matematica (ma non solo in matematica), non significa riuscire a contemplare. Chi si trova, quotidianamente, a confrontarsi con i processi di insegnamento–apprendimento sa bene che la comprensione di un concetto ha una dimensione attiva da parte del discente che si rivela essenziale. Un allievo che si limiti ad ascoltare più o meno distrattamente una lezione, magari comprendendo i vari passaggi dei ragionamenti proposti, ma senza sentirsi davvero coinvolto in quanto sta facendo (o solo contemplando?) realizzerà una comprensione mediocre, inefficace.

Cercheremo allora di mettere a fuoco alcune caratteristiche di questa "comprensione" e, successivamente, di applicare le nostre considerazioni a un ben noto capitolo dei programmi di matematica della scuola secondaria. Come vedremo, questa ricerca ci porterà a realizzare un breve viaggio nell'affascinante storia della nostra disciplina.

Nella relazione all'Italian Afternoon del grande Convegno del centenario dell'ICMI, International Commission on Mathematical Instruction, tenutosi a Roma presso l'Accademia dei Lincei e pubblicata alcuni mesi or sono a cura di *Progetto Alice* (Bagni, 2008), ci siamo occupati a fondo della questione che abbiamo sinora tratteggiato. In particolare, abbiamo ricordato che la comprensione ha una struttura che si potrebbe definire per alcuni versi ciclica o ricorsiva. Già Schleiermacher, alla fine del Settecento, aveva indicato la presenza di un circolo apparente (il circolo ermeneutico), per il quale un particolare può essere compreso solo a partire dall'universale di cui è parte e viceversa. Il problema è stato ripreso nel secolo scorso da Heidegger, per il quale la comprensione non è più orientata sul solo modello della spiegazione teoretica dei testi, bensì sullo stesso rapporto che gli esseri umani hanno con il mondo. Le presupposizioni hanno il ruolo essenziale di "mettere in moto il circolo" (Heidegger, 2005; inoltre: Gadamer, 2000). Non approfondiremo gli importanti risvolti filosofici di tali posizioni (il lettore interessato può vedere, oltre al citato Bagni 2008, il volume: Bagni 2006–a).

Nel presente lavoro ci occuperemo invece di una questione didattica precisa: l'introduzione dei numeri immaginari. Nella scuola secondaria questo è un momento importante del curriculum e può essere causa di incoerenze. Come anticipato, la storia della matematica ci offrirà una preziosa possibilità per cercare di superare tali difficoltà. Nel XVI secolo il bolognese Rafael Bombelli (1526–1572) studiò infatti alcune equazioni di terzo grado che portano, nel corso del procedimento risolutivo, a operare con quantità non reali; il risultato infine ottenuto, tuttavia, è un numero reale (ovvero un complesso con la parte immaginaria nulla: Bombelli, 1966; inoltre: Loria, 1929–1933; Maracchia, 2005). Notiamo che sarebbe evidentemente diversa, ad esempio, la situazione di un'equazione di secondo grado come $x^2+1 = 0$, con il risultato stesso immaginario…

Ma prima di sviluppare alcune considerazioni didattiche introduciamo con qualche dettaglio l'importante aspetto storico.

L'*Algebra* di Bombelli

Per quanto riguarda il nostro studio, importante è la presenza, nell'*Algebra* di Bombelli, di equazioni di terzo grado che, se risolte con il procedimento di Cardano, del Ferro e Tartaglia, portano a radicali con quantità non reali (ci riferiremo a Bombelli, ma potremmo citare anche Cardano, «pur ricorrendo a una certa cautela verbale», aveva preso in considerazione situazioni di questo tipo, come nota Bourbaki, 1963, p. 91).

Iniziamo con il ricordare che per l'equazione $x^3 = px+q$, la soluzione con il metodo di Bombelli sarà:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Ebbene, la risoluzione dell'equazione (che troviamo nel trattato di Bombelli) modernamente espressa nella forma:

$$x^3 = 15x+4$$

coinvolge la radice quadrata di $(q/2)^2–(p/3)^3 = –121$ e si conclude con la somma di radicali doppi con radicando non reale:

$$x = \sqrt[3]{2+11i}+\sqrt[3]{2-11i}$$

Si prova, sviluppando i cubi dei binomi, che è possibile scrivere:

$$2+11i = (2+i)^3 \qquad \text{e} \qquad 2-11i = (2-i)^3$$

Dunque la soluzione (reale, ovvero complessa con parte immaginaria nulla) dell'equazione proposta è (Maracchia, 1979, p. 41):

$$x = (2+i) + (2-i) = 4$$

Questo procedimento non si svolge interamente nell'ambito dei numeri reali: il risultato ottenuto, tuttavia, è reale, come reali sono tutti i coefficienti dell'equazione data. Una verifica diretta della soluzione $x = 4$ nell'equazione porta all'identità $4^3 = 15\cdot4+4$ ed è dunque possibile utilizzando soltanto numeri reali.

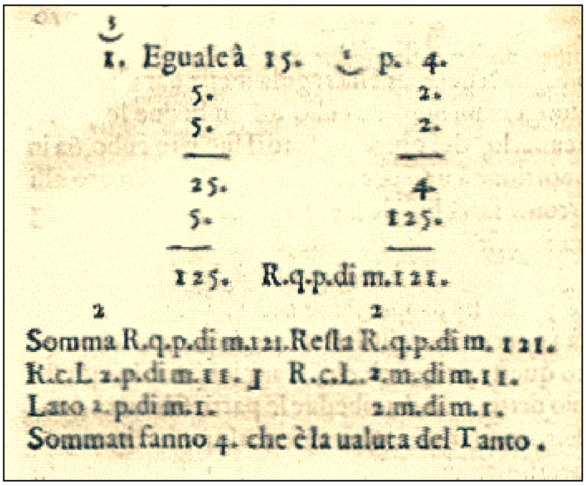
Nell'immagine seguente riportiamo, a destra, la scrittura originale della risoluzione dell'equazione sopra citata tratta dalla pagina 294 dell'*Algebra* di Bombelli:

$$x^3 = 15x+4$$
$$[x^3 = px+q]$$

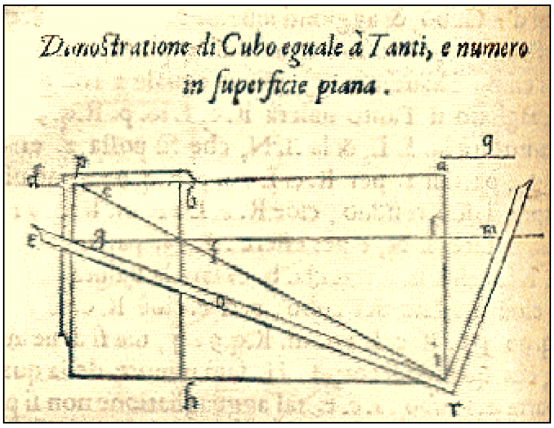
$$(4/2)^2-(15/3)^3 = -121$$
$$[(q/2)^2-(p/3)^3 = -121]$$

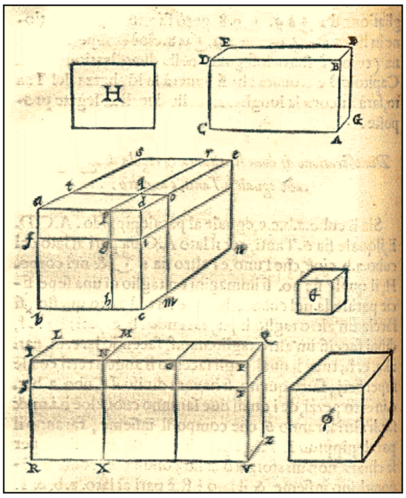
$$x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$$

$$x = (2+i) + (2-i) = 4$$


1. Eguale à 15. p. 4.
5. 2.
5. 2.
25. 4.
5. 125.
125. R.q.p.di m.121.
2 2
Somma R.q.p.di m.121. Resta R.q.p.di m. 121.
R.c.L. 2.p.di m.11. J R.c.L. 2.m.di m.11.
Lato 2. p.di m.1. 2.m.di m.1.
Sommati fanno 4. che è la ualuta del Tanto.

Riportiamo inoltre le "costruzioni in linee" (sia tridimensionale che bidimensionale) che lo stesso Bombelli fornisce alle pp. 296 e 298 del proprio trattato per confermare la validità del procedimento (per i dettagli si veda: Bombelli, 1966).





Didatticamente, la risoluzione di un’equazione di terzo grado come quella trattata da Bombelli può contribuire a far sì che gli allievi accettino la presenza dei numeri immaginari: tale posizione può essere accostata a una presupposizione (e ricordiamo qui il precedente accenno all’approccio teorico di Heidegger) motivata dall’efficacia del procedimento, la quale contribuisce a far accettare le “regole” enunciate dallo stesso Bombelli per il calcolo con *pdm* e *mdm* (che oggi scriviamo *i* e *–i*, si veda la tabella tratta da p. 169 dell’*Algebra*).

Più uia più di meno, fà più di meno.
Meno uia più di meno, fà meno di meno.
Più uia meno di meno, fà meno di meno.
Meno uia meno di meno, fà più di meno.
Più di meno uia più di meno, fà meno.
Più di meno uia men di meno, fà più.
Meno di meno uia più di meno, fà più.
Meno di meno uia men di meno fà meno.

I risultati di una ricerca didattica sperimentale sembrano indicare che un interessante percorso di apprendimento può basarsi sull’esempio storico al quale abbiamo fatto cenno: le interviste con gli studenti confermano il ruolo del contratto didattico, ad esempio per l’importanza del risultato (Bagni, 2000). Assume un ruolo rilevante la posizione secondo la quale la considerazione dell’unità immaginaria come “numero” può non essere causa di difficoltà particolari; tale posizione appare utile in quanto consente di trovare una radice di un'equazione di terzo grado: proprio questa sua efficacia, insomma, verrebbe a garantire la sua plausibilità.

Nei seguenti due paragrafi esporremo brevemente i risultati di tale ricerca didattica e svilupperemo alcune considerazioni semiotiche.

Riflessioni didattiche

La risoluzione di un'equazione di terzo grado come quella ricordata può contribuire a far sì che gli allievi accettino la presenza dei numeri immaginari? Come anticipato, una recente ricerca è stata dedicata alla questione e si è svolta in due fasi (per i dettagli si può vedere: Bagni, 2000):

- nella prima fase è stato esaminato il comportamento di 97 studenti di III (16–17 anni) e di IV liceo scientifico (17–18 anni). In tutte le classi, al momento del test, agli allievi erano state proposti i procedimenti risolutivi di equazioni di secondo grado e di equazioni trinomie riconducibili a equazioni di secondo grado mediante opportune posizioni (del tipo $x^n = t$); ma *non* erano stati introdotti i numeri immaginari.

  A questi studenti sono state sottoposte due schede, A e B:

  Nella *scheda A* era brevemente descritta la risoluzione di:

  $$x^2+1 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{-1}$$

  Soltanto il 2% del campione considerato ha affermato di accettare la risoluzione (il 92% ha affermato di non accettarla; incerto il 6%).

  Immediatamente dopo, agli allievi è stata consegnata la *scheda B*, in cui era descritta la risoluzione di:

  $$x^3-15x-4 = 0 \;\Rightarrow\; x = \sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} \;\Rightarrow$$
  $$\Rightarrow\; x = (2+\sqrt{-1}) + (2-\sqrt{-1}) = 4$$

  Essa è stata accettata dal 54% degli allievi (il 35% ha affermato di non accettarla; incerto l'11%).

  Notiamo sin d'ora che la considerazione delle quantità immaginarie nei passaggi del procedimento risolutivo di un'equazione (*non* nel risultato) è spesso accettata dagli allievi. La considerazione riservata al risultato è diversa da quella riservata ai passaggi intermedi del procedimento: il contratto didattico, ad esempio, assegna notevole importanza alla determinazione dell'esatto risultato finale, e tale aspetto sembra far sì che nella stessa espressione del risultato (la scrittura della soluzione dell'equazione) venga a essere assai pesante l'influenza delle "regole" precedentemente fissate (nella situazione in esame, la tradizionale proibizione di estrarre la radice quadrata di un numero negativo). Nei passaggi intermedi, invece, l'azione di regole e proibizioni appare meno coercitiva e dunque una parte degli allievi si sente autorizzata a considerare non del tutto illecita la presenza di espressioni numeriche insolite e "rischiose", dopo aver controllato, naturalmente, la correttezza del risultato finale.

- La seconda fase della ricerca si è avvalsa dei risultati di un test proposto a 73 studenti di III (allievi di 16–17 anni) e di IV Liceo scientifico (allievi di 17–18 anni). Per quanto riguarda il programma svolto, essi erano nelle stesse condizioni in cui si trovavano gli studenti coinvolti nella ricerca precedentemente citata.

  A ciascun allievo sono state proposte le schede utilizzate nella prima fase della ricerca, ma *in ordine inverso*: prima la scheda B e poi la scheda A. Le risposte degli allievi sono state così suddivise:

  Prima scheda esaminata (B, relativa al terzo grado)

Tipologia di risposte	Allievi	Percentuale
"Accettabile"	30	41%
"Non accettabile"	18	25%
Incerti	25	34%

  Seconda scheda esaminata (A, relativa al secondo grado)

Tipologia di risposte	Allievi	Percentuale
"Accettabile"	13	18%
"Non accettabile"	48	66%
Incerti	12	16%

Cerchiamo ora di interpretare i risultati ottenuti. Osserviamo innanzitutto che i dati relativi alla scheda B sono analoghi a quelli ottenuti con riferimento alla stessa scheda B sottoposta come secondo momento nella ricerca precedente (in questa nuova fase la tendenza appare però meno netta: numerosi, ad esempio, sono gli incerti). Questo ci porta a notare che l'esplicita considerazione di un'equazione di secondo grado ($x^2+1 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$) prima di un'equazione di terzo grado non ha influenzato in modo sensibile le idee degli allievi a proposito del possibile impiego di $\sqrt{-1}$: del resto negli anni scolastici precedenti gli allievi si erano spesso trovati di fronte a situazioni analoghe; e in tali casi (dunque in presenza di radici quadrate con radicando negativo) la risoluzione dell'equazione veniva di norma interrotta.

Dai risultati della scheda A appare che una parte di allievi (il 18% del totale) ha accettato la presenza di $\sqrt{-1}$ nell'equazione di secondo grado (esaminata *dopo* quella di terzo grado), mentre soltanto il 2% del campione aveva accettato tale presenza nella precedente esperienza. In particolare, interessante può essere il risultato seguente:

su 30 allievi che hanno risposto *accettabile* nella scheda B:

nella scheda A: 13 (43% su 30) hanno risposto *accettabile*

14 (47% su 30) hanno risposto *non accettabile*

3 (10% su 30) hanno dato risposte incerte (o non hanno risposto)

I risultati del test ora effettuato sembrano dunque indicare che un interessante percorso di apprendimento potrebbe aver avuto luogo per alcuni allievi, sebbene la percentuale di tali studenti sia ancora piuttosto bassa: in qualche caso l'accettazione della presenza di $\sqrt{-1}$ nell'equazione di terzo grado (scheda B, proposta per prima) potrebbe aver contribuito a costituire un atteggiamento mentale (per alcuni versi assimilabile a una presupposizione) tale da indurre l'allievo stesso a ritenere accettabile la presenza di $\sqrt{-1}$ anche nell'equazione di terzo grado (scheda A, considerata successivamente).

Alcuni studenti sono stati invitati a giustificare quanto scritto nel test; in particolare, sono stati intervistati (singolarmente) i 14 studenti che hanno affermato di accettare la risoluzione riportata nella scheda B ma non quella nella (successiva) scheda A. A essi è stata posta la seguente domanda: "perché accetti la presenza di $\sqrt{-1}$ nella scheda B e non accetti la presenza di $\sqrt{-1}$ nella scheda A?" Riassumiamo il contenuto delle risposte di questi 14 studenti (11 frequentanti la classe III e 3 la IV):

- 10 allievi (71% su 14) hanno notato, in vari modi, che il risultato dell'equazione di terzo grado (scheda B) è reale (nel corso del procedimento la $\sqrt{-1}$ "si semplifica"), mentre quello dell'equazione di secondo grado (scheda A) non è un numero reale;
- 2 allievi hanno affermato di aver considerato gli esempi separatamente e di aver deciso le risposte da dare senza confrontare i casi;

- 2 allievi non hanno fornito giustificazioni.

Quanto emerso dalle interviste conferma che alle considerazioni degli studenti si affiancano e talvolta si sovrappongono gli effetti determinati dalle clausole del contratto didattico (ad esempio la primaria importanza spesso attribuita al risultato).

Riassumiamo la situazione: l'allievo è chiamato a passare dell'ambiente dei numeri reali a quello dei complessi, caratterizzato dalla presenza di $\sqrt{-1}$ come "numero". A questo punto assume un ruolo rilevante la posizione seguente:

La considerazione di $\sqrt{-1}$ come "numero"
può non essere causa di difficoltà particolari
(consentendo la risoluzione dell'equazione)

Tale constatazione (per quanto ancora poco chiara e comunque parziale: ovviamente per un apprendimento efficace e completo dei numeri complessi non basta riconoscere $\sqrt{-1}$ come un'entità matematica "tale da non causare problemi" in alcuni procedimenti algebrici!) appare adeguatamente motivata. È significativo che la prima considerazione di $\sqrt{-1}$ come "numero" avvenga in un passaggio del procedimento risolutivo, nel caso di un'equazione di terzo grado *a coefficienti reali e con riferimento a una radice reale*: accettando $\sqrt{-1}$ come "numero" (un numero che durante la risoluzione "si semplifica", come osservato da diversi studenti) non si presenta alcuna difficoltà nel ricavo della radice, una radice certamente corretta, in quanto verificabile per sostituzione nell'equazione assegnata (e "costruibile in linee", nota Bombelli alle pagine 296 e 298 della propria *Algebra*).

La constatazione precedente appare utile in quanto consente di trovare una radice di un'equazione di terzo grado proposta: proprio questa sua *efficacia* viene a essere, per alcuni versi, una garanzia della sua plausibilità. Possiamo dunque considerarla una chiave interpretativa nuova, una sorta di presupposizione, come sopra notato. Essa entra però in contrasto con una consolidata pratica didattica: per questo alcuni allievi, come abbiamo visto, si limitano ad accettare la presenza di $\sqrt{-1}$ nel caso dell'equazione di terzo grado, quando cioè "si semplifica", mentre rifiutano di accettare $\sqrt{-1}$ come "numero" vero e proprio nel caso dell'equazione di secondo grado.

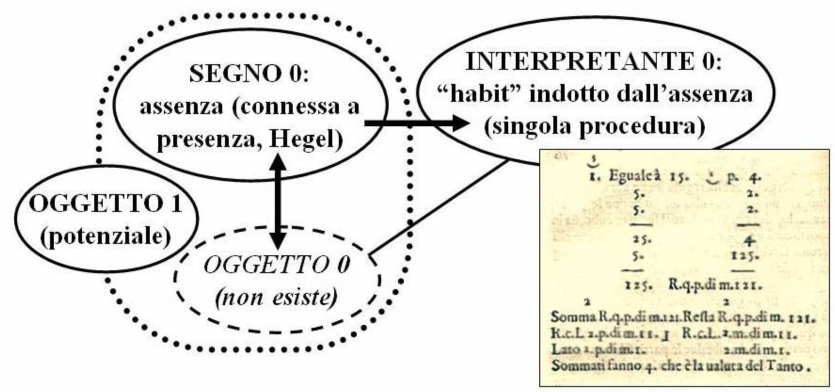
In un certo senso possiamo dire che, nel caso in esame, la presupposizione (facendo riferimento con tale termine a una disposizione mentale almeno "possibilista" nei confronti delle radici quadrate dei numeri negativi) non è sufficiente a garantire, da sola, il successo della strategia sulla quale potrebbe basarsi il processo di insegnamento–apprendimento. Né ciò, a nostro avviso, può essere ritenuto il "compito" proprio di una presupposizione: essa infatti deve principalmente agevolare l'ingresso dello studente nel circolo ermeneutico (Heidegger, 2005). Altri processi, ad esempio collegati con l'attività degli studenti e dell'insegnante, favoriranno o determineranno un apprendimento più completo e maturo.

Riflessioni semiotiche

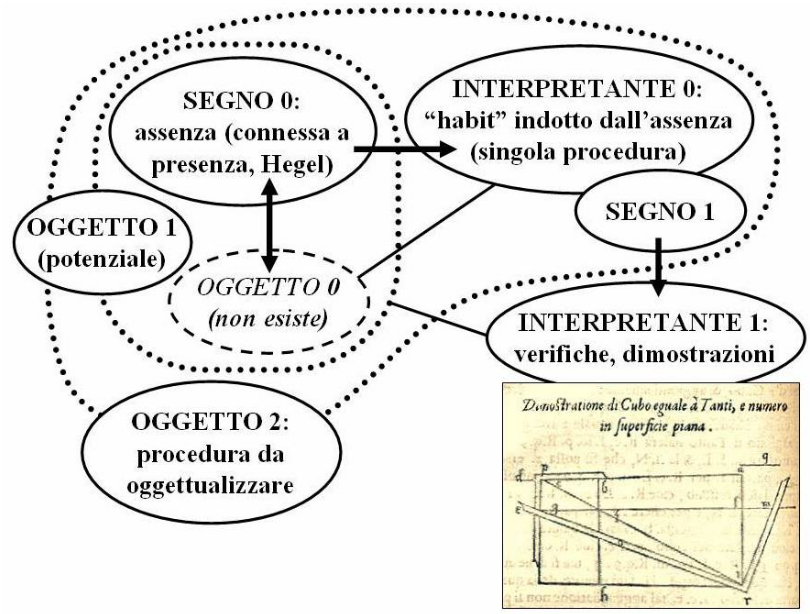
L'approccio precedentemente descritto può essere utilmente analizzato anche dal punto di vista semiotico. Secondo Charles S. Peirce, il cosiddetto oggetto dinamico è infatti in progressiva evoluzione nel processo di semiosi illimitata (Peirce, 1931–1958; Bagni, 2007), cioè nello sviluppo della triade oggetto–segno–interpretante. Dato che, per Peirce, "tutto è segno", un interpretante (la reazione suscitata dal segno in un interprete), in generale, viene considerato a sua volta alla stregua di un nuovo segno e suscita così un altro interpretante.

Ma esiste, nella matematica e nella sua didattica, un "oggetto" ovvero un "primo segno" da cui si sviluppa una tale catena semiosica? Per rispondere faremo riferimento a una sorta di dialettica (in senso hegeliano) tra l'assenza di un oggetto matematico (ovvero di una procedura) e la sua presenza, inizialmente da intendersi in senso potenziale. Questa "assenza", come vedremo, può essere considerata alla stregua di un segno: si potrebbe dunque ipotizzare che proprio la constatazione di un'assenza sia il punto da cui prende le mosse il processo di semiosi illimitata (come peraltro suggerito dallo stesso Peirce, 1931–1958, § 5.480).

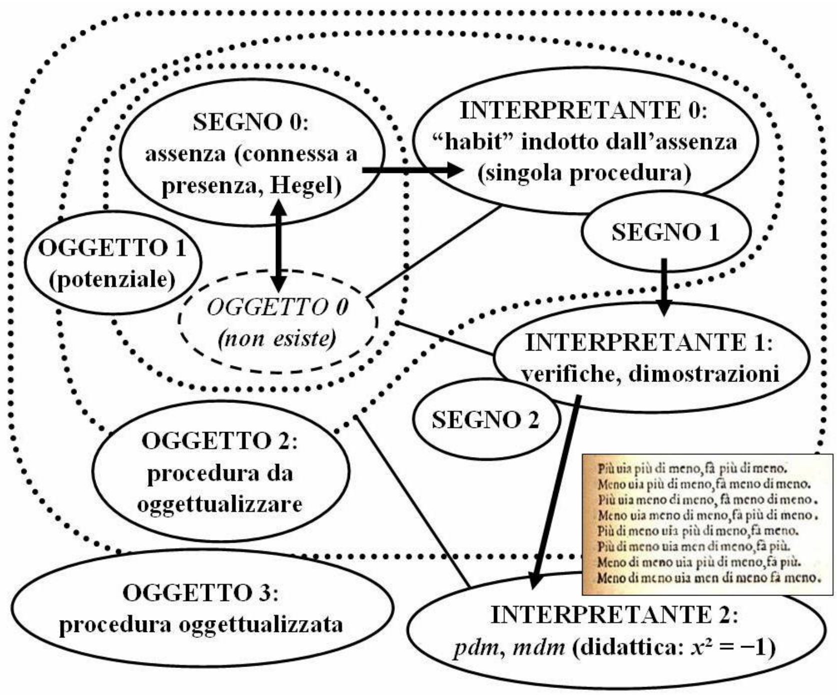
Potremmo così descrivere lo sviluppo iniziale della catena, tornando all'esempio tratto da Bombelli: una sorta di "oggetto potenziale" si collega alla necessità di mettere a punto una procedura mediante la quale risolvere un'equazione di terzo grado:



Qui è l’efficacia della procedura ad essere un elemento fondamentale: non c’è ancora un oggetto al quale riferirsi. Ma la possibilità di giustificare (ad esempio con le “costruzioni in linee” di Bombelli) quanto svolto inizia a fornire concretezza alla procedura che diventa una “procedura da oggettualizzare” (Giusti, 1999).



Quindi si giunge ad una prima oggettualizzazione (nel senso precisato in Radford, 2003):



Conclusioni

Le regole di calcolo di Bombelli per *pdm* e *mdm* indicano quindi un atteggiamento nuovo: grazie ad esse *pdm* e *mdm* iniziano a diventare "oggetti" matematici autonomi, si svincolano dall'esempio introduttivo e possono trovare applicabilità, in prospettiva, in situazioni anche molto diverse (considerazioni storicamente interessanti sono discusse in: Radford & Empey, 2007).

Dal punto di vista didattico questa fase si può caratterizzare mediante la chiara emergenza e il consolidamento di uno *schema d'azione* o d'uso delle regole e quindi dell'oggetto matematico (una procedura oggettualizzata, sempre seguendo Giusti, 1999, la quale può intendersi come artefatto ovvero come strumento: Rabardel, 1995; inoltre: Bagni, 2006–a, 2006–b).

Ulteriori ricerche saranno dedicate all'applicazione del modello descritto in ambito didattico. Ma concludiamo il presente lavoro rilevando la formidabile ricchezza del *capire* in matematica (e, naturalmente, non soltanto in essa). Il quotidiano invito ai nostri allievi a sforzarsi di *capire* è dunque ben più profondo e significativo di un semplice stimolo per rinvigorire un'attenzione magari appannata o stanca. Quel *capire* racchiude mille sfaccettature epistemologiche, filosofiche e storiche, aspetti fondamentali che ci possono portare alle radici, al cuore della matematica stessa.

Bibliografia

Bagni, G.T., 2000, Introducing complex numbers: an experiment. In J. Fauvel & J. van Maanen (a cura di), *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (pp. 264–265). Dordrecht: Kluwer

Bagni, G.T., 2006–a, *Linguaggio, storia e didattica della matematica*. Bologna: Pitagora

Bagni, G.T., 2006–b, Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory. *Educational Studies in Mathematics*, 62, 3, 259–280

Bagni, G.T., 2007, *Rappresentare la matematica. Simboli, parole, artefatti e figure.* Roma: Aracne

Bagni, G.T., 2008, Matematica e interpretazione. In *Atti dell'Italian Afternoon del Convegno "ICMI 2008", Roma, Accademia dei Lincei, 6 marzo 2008. Progetto Alice*, 25, 53–64

Bombelli, R., 1966, *L'Algebra*. U. Forti & E. Bortolotti (a cura di). Milano: Feltrinelli

Bourbaki, N., 1963, *Elementi di storia della matematica*. Milano: Feltrinelli, (1960, *Eléments d'histoire des mathematiques*. Paris: Hermann)

Gadamer, H.G., 2000, *Verità e metodo*. G. Vattimo (a cura di). Milano: Bompiani (1960, *Wahrheit und Methode: Grundzüge einer philosophischen Hermeneutik*. Tübingen: Mohr)

Giusti, E.. 1999, *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*. Torino: Bollati Boringhieri

Heidegger, M., 2005, *Essere e tempo*, nuova edizione a cura di F. Volpi sulla traduzione di P. Chiodi. Milano: Longanesi (1927, *Sein und Zeit*. Halle an der Saale: Niemeyer)

Loria, G., 1929–1933, *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino (riedizione: Hoepli, Milano 1950; ristampa anastatica: Cisalpino–Goliardica, Milano 1982)

Maracchia, S., 1979, *Da Cardano a Galois*. Milano: Feltrinelli

Maracchia, S., 2005, *Storia dell'algebra*. Napoli: Liguori

Peirce, C.S., 1931–1958, *Collected Papers*. I–VIII. Cambridge: Harvard University Press

Rabardel, P., 1995, *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Colin

Radford, L. & Empey, H., 2007, Culture, knowledge and the Self: Mathematics and the formation of new social sensibilities in the Renaissance and Medieval Islam. *Revista Brasileira de História da Matemática*. Festschrift Ubiratan D'Ambrosio, Especial 1, 231-254

Radford, L., 2003, On the epistemological limits of language. Mathematical knowledge and social practice in the Renaissance. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 2, 123–150

Giorgio T. Bagni