Didactics and History of Mathematics (1996), Gagatsis, A. & Rogers, L. (Eds.), Erasmus ICP-95-G-2011/11, Thessaloniki, 353-360

Attualità di due protagonisti della storia della matematica: Jacques e Jean Bernoulli

Giorgio T. Bagni
Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica di Bologna

Summary. The works of Jacques (1654-1705) and Jean Bernoulli (1667-1748), two of the most important mathematicians lived between the XVII century and the XVIII century, are nowadays interesting also for the modern didactics of mathematics. In this paper, some thecniques and some examples from Jacques and Jean Bernoulli's works are presented and their didactical importance is underlined.

> "Tanto è facile trovare il differenziale di una qualche quantità, altrettanto, al contrario, è difficile assegnare l'integrale ad un qualsivoglia differenziale, al punto che, talvolta, non possiamo veramente neppure affermare se si possa ottenere o no l'integrale di una quantità proposta".
>
> Jean Bernoulli

L'introduzione dei principali concetti e dei procedimenti analitici da parte di Isaac Newton (1642-1727) e di Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) diede inizio ad un periodo di estrema vivacità scientifica e culturale; così M. Kline presenta l'ambiente matematico alla fine del XVII secolo:

"Gli enormi progressi compiuti nel Seicento nel campo dell'algebra, della geometria analitica e del calcolo infinitesimale; gli stretti legami della matematica con la scienza, che forniva problemi profondi e difficili; l'eccitazione provocata dagli stupefacenti successi di Newton nella meccanica celeste e il miglioramento delle comunicazioni fornito dalle accademie e dalle riviste scientifiche, erano tutti fattori che facevano presagire ulteriori importanti sviluppi e che contribuivano a creare un enorme entusiasmo intorno al futuro della matematica" [Kline, 1991, I, p. 465].

Tra coloro i quali tra il XVII ed il XVIII secolo furono impegnati negli studi scientifici, ricordiamo molti membri della famiglia Bernoulli che, originaria delle Fiandre, si stabilì a Basilea nel 1583 a causa delle persecuzioni spagnole ([1]): da Nicolaus (1623-1708) a Jean Gustave (1811-1863), la famiglia Bernoulli vide l'alternarsi di ben tredici studiosi, a lungo attivi nella ricerca matematica e fisica. In particolare, i fratelli Jacques (o Jakob, 1654-1705) e Jean (o Johann, 1667-1748), figli di Nicolaus Bernoulli, furono tra i più convinti discepoli e sostenitori di Leibniz [Bottazzini, 1990].

Jacques Bernoulli

Jacques Bernoulli fu professore di matematica presso l'Università di Basilea e si mantenne lungamente in corrispondenza epistolare con Leibniz, del quale conobbe e profondamente ammirò le opere (sembra che, nel 1687, proprio la lettura della fondamentale memoria leibniziana *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fracta, nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus*, apparsa sugli "Acta Eruditorum" nell'ottobre del 1864, abbia convinto Bernoulli ad intraprendere la via della ricerca matematica [Loria, 1929-1933, p. 601]). Così D.J. Struik cita alcune delle principali ricerche di Jacques Bernoulli:

"Tra i contributi di Jakob c'è l'uso di coordinate polari, lo studio della catenaria (già trattata da Huygens e da altri), la lemniscata (1694) e la spirale logaritmica. Nel 1690 egli trovò la cosiddetta isocrona, proposta da Leibniz nel 1687 come la curva lungo cui un corpo cade con velocità uniforme e che si rivelò essere una parabola semicubica. Jakob studiò inoltre figure isoperimetriche (1701) che lo portarono ad un problema di calcolo delle variazioni. La spirale logaritmica, che gode della proprietà di riprodursi attraverso diverse trasformazioni (la sua evoluta è ancora una spirale logaritmica così come la podaria e la caustica rispetto al polo) piaceva a tal punto a Jakob che egli volle che tale curva fosse incisa sulla lapide della sua tomba, accompagnata dalla scrittura «eadem mutata resurgo»" [Struik, 1981, p. 155].

([1]) Ricorda D.J. Struik: "Basilea, in Svizzera, dal 1263 città libera, fu a lungo un centro di ricerca. Ai tempi di Erasmo la sua Università era già un centro importante. Come nelle città olandesi, anche a Basilea fiorirono le arti ed i mestieri sotto il dominio di un'aristocrazia mercantile. A quest'ultima apparteneva la famiglia di mercanti dei Bernoulli, cha da Antwerp si erano trasferiti a Basilea dopo che dopo che la loro città era stata conquistata dagli Spagnoli" [Struik, 1981, p. 154].

In effetti, Jacques Bernoulli si dedicò attivamente all'applicazione del calcolo infinitesimale, alle equazioni differenziali e alle curve speciali (2). Si occupò delle serie numeriche; dimostrò ad esempio che la serie dei reciproci dei quadrati degli interi positivi è convergente, attraverso il procedimento seguente, interessante ed utile, ai giorni nostri, anche in àmbito didattico:

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^2}+\ldots<\frac{1}{1}+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots=$$
$$=\frac{1}{1}+\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+\ldots=1+1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\ldots=2$$

Di tale serie Jacques Bernoulli non riuscì però a determinare la somma (3).

Il grande matematico svizzero scrisse inoltre il trattato *Ars conjectandi* (pubblicato postumo nel 1713), la prima opera completa ed organica sul calcolo delle probabilità, con importanti elementi di calcolo combinatorio (4). La quarta parte del lavoro è dedicata alla legge dei grandi numeri (sull'argomento è stato ritrovato un ricco epistolario Bernoulli-Leibniz).

---

(2) Scrive Bottazzini: "Il calcolo differenziale era stato presentato da Leibniz come uno speciale algoritmo per lo studio delle curve e in questo campo fu applicato con successo dai fratelli Bernoulli; il nuovo calcolo si rivelò nelle loro mani uno strumento di straordinaria agilità e duttilità, che permetteva di risolvere facilmente antichi problemi che avevano messo alla prova l'abilità dei più grandi geometri e apriva la via per «un mondo sconosciuto» di curve e di equazioni differenziali" [Bottazzini, 1981].

(3) Interessante è confrontare la posizione bernoulliana sulla convergenza delle serie con quella di Euler espressa nelle *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in Analysi Finitorum ac Doctrina Serierum* [Euler, 1755-1787]: "È istruttivo dar conto non solo di alcuni dei contributi di Euler alla scienza, ma anche della debolezza di qualche sua conclusione... Se alcune delle conclusioni di Euler sono ancor oggi accettabili, ce ne sono altre verso cui abbiamo delle riserve... Non possiamo seguire Euler quando scrive che 1–3+5–7+... = 0, o quando dal fatto che $n+n^2+\ldots = 1/(1-n)$ e che $1+n^{-1}+n^{-2}+\ldots = 1/(n-1)$ egli conclude che $\ldots+n^{-2}+n^{-1}+1+n^{-1}+n^{-2}+\ldots = 0$. Certo bisogna stare attenti a non criticare troppo frettolosamente Euler per il suo modo di manipolare serie divergenti... A molti dei risultati del suo lavoro apparentemente indiscriminato sulle serie è stato dato un senso assolutamente rigoroso da parte dei matematici moderni" [Struik, 1981, pp. 160-161].

(4) "Jakob Bernoulli fu anche uno dei primi a studiare la teoria delle probabilità, argomento su cui egli scrisse l'*Ars conjectandi*... Nella prima parte di questo libro è ristampato il trattato di Huygens sui giochi d'azzardo, le altre riguardano combinazioni e permutazioni e culminano nel «teorema di Bernoulli» sulle distribuzioni binomiali. I «numeri di Bernoulli» fanno la loro comparsa in questo libro in una discussione sul triangolo di Pascal" [Struik, 1981, p. 155]. Il riferimento è a *De ratiociniis in ludo alæ* (1656) di C. Huygens.

Jean Bernoulli

Leibniziano convinto e rigoroso, Jean Bernoulli in più occasioni attaccò l'impostazione analitica di Newton, impegnandosi in polemiche non sempre giustificate ([5]). In qualità di matematico egli si occupò delle curve esponenziali e diede un forte impulso al calcolo integrale (che ricordiamo essere stato pesantemente subordinato al calcolo differenziale nelle impostazioni originali dell'analisi di Newton e di Leibniz).

Il seguente brano di Jean Bernoulli sembra essere tratto da un moderno manuale di analisi per le scuole secondarie superiori:

'Ora mostreremo in che modo si trovino gli integrali dei differenziali...

$$\begin{array}{lll}
dx & \text{è il differenziale di} & x \text{ ovvero di } x + \text{o} - \text{una costante} \\
xdx & \text{è il differenziale di} & \frac{1}{2}xx \text{ ovvero di } \frac{1}{2}xx + \text{o} - \text{una costante} \\
xxdx & \text{è il differenziale di} & \frac{1}{3}x^3 \text{ ovvero di } \frac{1}{3}x^3 + \text{o} - \text{una costante} \\
x^3dx & \text{è il differenziale di} & \frac{1}{4}x^4 \text{ ovvero di } \frac{1}{4}x^4 + \text{o} - \text{una costante}
\end{array}$$

Inoltre:

$$\begin{array}{llll}
adx & \text{è il differenziale di} & ax & \text{ecc.} \\
axdx & \text{è il differenziale di} & \frac{1}{2}axx & \text{ecc.} \\
axxdx & \text{è il differenziale di} & \frac{1}{3}ax^3 & \text{ecc.} \\
ax^3dx & \text{è il differenziale di} & \frac{1}{4}ax^4 & \text{ecc.}
\end{array}$$

Dalle quali si può formare la regola generale:

([5]) Scrive U. Bottazzini: 'Lo sviluppo del calcolo infinitesimale ha seguito diverse vie in Inghilterra e nel continente europeo: rigidamente vincolata alla tradizione newtoniana (e al suo infelice formalismo), la matematica inglese nel Settecento sarà incapace di cogliere la straordinaria quantità di risultati e di tecniche che la maggiore flessibilità e fecondità della tradizione leibniziana aveva assicurato ai matematici continentali" [Bottazzini, 1990].

$ax^p dx$ è il differenziale della quantità $\frac{a}{p+1}x^{p+1}$

Dunque se si deve ottenere la quantità integrale di una qualche quantità differenziale, prima di tutto si deve considerare se la quantità proposta non sia il prodotto di un qualche differenziale per una sua parte assoluta elevata ad una qualche potenza: il che è segno che il suo integrale può essere trovato con questa regola. Per esempio, se si deve trovare l'integrale di $\sqrt{a+y}dy$, osservo in primo luogo che dy è moltiplicato per una sua parte assoluta $a+y$ elevata alla potenza ½; poi cerco mediante questa regola il suo integrale, cioè:

$$\frac{1}{\frac{1}{2}+1}(a+y)^{\frac{1}{2}+1} \qquad \text{ossia:} \qquad \frac{2}{3}(a+y)\sqrt{a+y}$$

È da osservare che ci sono alcune quantità delle quali a prima vista sembra non si possano trovare gli integrali mediante questa regola, ma che si trovano facilmente dopo qualche cambiamento..." (da *Lectiones mathematicæ de methodo integralium*, 1742 [Bottazzini-Freguglia-Toti Rigatelli, 1992, p. 300]).

Jean Bernoulli si occupò inoltre del valore di espressioni del tipo:

$$x = \sqrt[n]{a+\sqrt[n]{a+\sqrt[n]{a+\sqrt[n]{a+\ldots}}}}$$

essendo $n \geq 2$; egli indicò per x la radice positiva dell'equazione:

$$x^n - x - a = 0$$

[Loria, 1929-1933, p. 627]. Ad esempio, consideriamo la quantità:

$$x = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}}$$

Elevando al quadrato entrambi i membri dell'uguaglianza, otteniamo:

$$\begin{cases} x^2 = 6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

e ricordando che era stato posto $x=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}}$ giungiamo a:

$$\begin{cases} x^2 = 6+x \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 6 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \vee x = -2 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 3$$

La velocità della convergenza di $x=\sqrt[n]{a+\sqrt[n]{a+\sqrt[n]{a+\sqrt[n]{a+\ldots}}}}$ può essere valutata come nell'esempio seguente, riferito a $x=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots}}}}$.

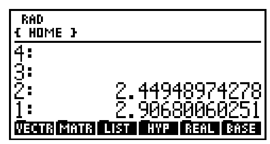
Consideriamo la successione numerica, con $n \in \mathbf{N}$:

$$\begin{cases} a_0 = \sqrt{6} \\ a_{n+1} = \sqrt{6+a_n} \end{cases}$$

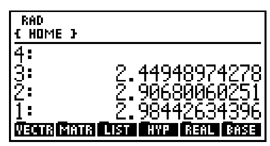
Alcuni suoi valori, calcolati impiegando una calcolatrice, sono:

$a_0 = \sqrt{6}$ che porta a:

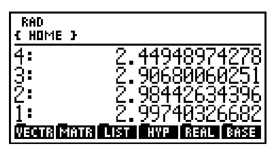
$a_1 = \sqrt{6+\sqrt{6}}$ che porta a:



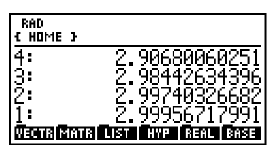
$a_2 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$ che porta a:

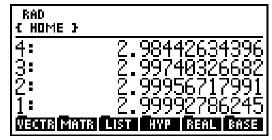


$a_3 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}$ che porta a:



$a_4 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}$ che porta a:



$a_5 = \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}}$ che porta a: 

Il limite della successione è, per quanto sopra detto, 3. L'esempio ora presentato consente, anche ai giorni nostri, di dare un'informale presentazione didattica, sintetica ed interessante, del limite di una successione.

Ricordiamo che Jean Bernoulli fu lo scopritore delle celebri *regole di L'Hôpital* sul calcolo dei limiti in forma indeterminata; pare che la scoperta sia stata ceduta da Bernoulli al marchese Guillaume de L'Hôpital (1661-1704) in cambio di una somma di denaro (L'Hôpital pubblicò a Parigi nel 1696 il volume *Analyse des infinement petits*, assai popolare, sebbene sia da considerare una compilazione di risultati di altri Autori).

Daniel Bernoulli (1700-1782), figlio di Jean, si occupò del calcolo delle probabilità, anche con applicazioni ([6]), e fu "uno dei pionieri nel campo delle equazioni differenziali alle derivate parziali" [Struik, 1981, p. 157]. Nel 1724 pubblicò *Exercitationes quaedam mathematicae* ([7]) con un importante studio sull'integrazione dell'equazione differenziale di Riccati [Bagni, 1995]. La dinamica dei fluidi fu uno dei campi di indagine preferiti da Daniel Bernoulli che pubblicò nel 1738 *Hydrodinamica* (dove è espresso il collegamento di una forza ad una funzione potenziale); importanti sue ricerche fisico-matematiche ebbero come soggetto le corde vibranti [Bottazzini, 1981, pp. 30-31] ([8]).

([6]) Tra gli studiosi di probabilità all'inizio del XVIII secolo ricordiamo Pierre Rémond de Montmort (1678-1719), autore di *Essay d'analyse sur le jeux d'hasard* (1714), e Abraham De Moivre (1667-1754), che nel 1711 pubblicò *De mensura sortis*; nel 1718 De Moivre pubblicò il più vasto lavoro, *Doctrine of Chanches or a Method of calculating the Probabilities of Event in Play*, opera pregevole di probabilità e di matematica attuariale [Bottazzini-Freguglia-Toti Rigatelli, 1992].

([7]) Loria definisce le *Exercitationes* "una miscellanea in parte polemica, giacché concerne una controversia sui giuochi d'azzardo sorta fra i due fondatori della scuola bernoulliana e Giovanni Rizzetti (matematico veneto morto nel 1754). Ma in buona parte (ed a ciò si deve la sua importanza) è di carattere dottrinale" [Loria, 1929-1933].

([8]) "I matematici cercarono di usare il calcolo infinitesimale per risolvere sempre nuovi problemi fisici e si trovarono presto costretti a trattare una nuova classe di problemi. Essi fecero più di quanto si erano prefissi di fare. I problemi più semplici conducevano a quadrature che potevano essere valutate mediante le funzioni elementari. Quelli un poco più difficili conducevano a quadrature che non potevano essere espresse in questo modo, come nel caso degli integrali ellittici. Entrambi questi tipi di problemi cadevano nel raggio d'azione del calcolo infinitesimale. Tuttavia, la soluzione di problemi ancor più complicati richiedeva l'uso di tecniche specialistiche; fu così che nacque la teoria delle equazioni differenziali" [Kline, 1991, I].

Bibliografia

G.T. Bagni, *Jacopo Riccati (1676-1754) e la storia delle equazioni differenziali*, in: History and Didactics of Mathematics (Διδακτικ και Ιστορ ια των Μαθηματικων), a cura di A. Gagatsis, Erasmus ICP-94-G-2011/11, pp. 207-218 e pp. 617-628, Thessaloniki 1995.

U. Bottazzini, *Il calcolo sublime. Storia dell'analisi matematica da Euler a Weierstrass*, Boringhieri, Torino 1981.

U. Bottazzini, *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino 1990.

U. Bottazzini-P. Freguglia-L. Toti Rigatelli, *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze 1992.

L. Euler, *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in Analysi Finitorum ac Doctrina Serierum*, 2 vv., Galeati, Pavia 1787 (I edizione: 1755).

M. Kline, *Storia del pensiero matematico. I. Dall'Antichità al Settecento. II. Dal Settecento a oggi*, Einaudi, Torino 1991.

G. Loria, *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino 1929-1933.

D.J. Struik, *Matematica: un profilo storico*, Il Mulino, Bologna 1981.