Bollettino dei Docenti di Matematica 42 (2001), 9-20

Infinito e infinitesimo potenziale e attuale: una sfida per la Scuola Secondaria Superiore

GIORGIO T. BAGNI

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DI ROMA "LA SAPIENZA"

Il sogno di tutti: conoscere una lingua straniera (strana) e purtuttavia non comprenderla: cogliere in essa la differenza, senza che questa stessa differenza sia recuperata mai dalla superficiale socialità del linguaggio, comunicazione o volgarità; conoscere, riflesse positivamente in una lingua nuova, le impossibilità della nostra; apprendere la sistematicità di quello che non si può concepire; disfare il nostro «reale» sotto l'effetto di altre suddivisioni, d'altre sintassi (…). Sappiamo che i concetti principali della filosofia aristotelica sono stati in certo qual modo costretti dalle principali articolazioni della lingua greca. Quanto sarebbe invece benefico potersi trasferire in una visione di quelle irriducibili differenze che una lingua molto remota può suggerirci per barlumi.

Roland Barthes
(*L'impero dei segni*, Einaudi, Torino 1984, p. 9)

Osserva R. Duval che «gli oggetti matematici non sono direttamente accessibili alla percezione (…) come sono gli oggetti comunemente detti "reali" o "fisici"; (…) le diverse rappresentazioni semiotiche di un oggetto matematico sono assolutamente necessarie» (Duval, 1993, p. 37).

Una riflessione sul complesso ruolo delle modalità della rappresentazione, nella comunicazione del pensiero matematico e nella didattica sarebbe impresa troppo vasta per una presentazione introduttiva: riteniamo perciò opportuno limitare il nostro esame ad uno dei settori che particolarmente hanno risentito delle reciproche influenze tra il linguaggio ed i concetti matematici ideati ed espressi: il Calcolo infinitesimale.

La presente nota riprende ed amplia alcuni temi presentati in una conferenza tenuta dall'Autore a Bellinzona il 27 ottobre 2000 nell'ambito del Convegno "Matematica 2000". Le traduzioni riportate sono dell'Autore.

I concetti di limite e di infinitesimo hanno avuto ruoli fondamentali nello sviluppo dell'Analisi e dell'intera Matematica; il presente lavoro è dedicato all'evoluzione dei registri rappresentativi nei quali tali concetti furono e sono espressi.

Anticipiamo sin d'ora che un elemento fondamentale del nostro studio è il collegamento tra l'uso e l'evoluzione dei registri rappresentativi e la presenza di ostacoli epistemologici (1). La problematica degli ostacoli epistemologici «pone al centro dell'approccio didattico le rotture necessarie all'apprendimento, richiedendo che si apprenda in contrasto con le precedenti conoscenze» (Artigue, 1998); inoltre, l'analisi storica gioca un ruolo essenziale: lo studio della storia della nostra disciplina ci consente infatti d'identificare gli ostacoli epistemologici suscettibili di spiegare molte difficoltà incontrate dagli studenti. Proprio dall'esame dell'aspetto storico inizieremo quindi la nostra trattazione.

L'evoluzione del concetto di limite e delle sue rappresentazioni

Il primo Autore ricordato nella storia dei procedimenti infinitesimali è Anassagora di Clazomene (500?-428 a.C.), autore del celebre frammento:

«Rispetto al piccolo non vi è un ultimo grado di piccolezza, ma vi è sempre un più piccolo, essendo impossibile che ciò che è, cessi di essere per divisione» (cit. in: Geymonat, 1970, p. 96).

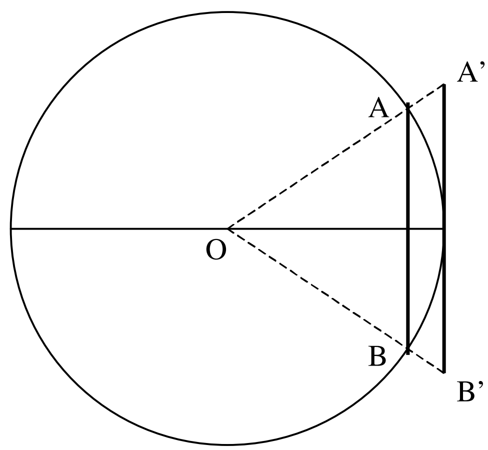
Esso è riferibile ad una successione infinitesima: Anassagora descrive infatti una quantità che può essere indefinitamente ridotta, senza mai annullarsi (un analogo frammento riguarda l'indefinitamente grande: Dupont, 1981).

---

(1) Ricordiamo che A. Sierpinska raggruppa gli ostacoli in cinque grandi tipi (ci rifacciamo ad: Artigue, 1998, che analizza: Sierpinska, 1985): il primo, "Horror infiniti", comprende il rifiuto dello statuto di operazione matematica per il passaggio al limite, l'automatica estensione dei metodi algebrici per la manipolazione di grandezze finite alle grandezze infinite, l'estensione delle proprietà dei termini di una serie convergente al suo limite, oltre all'ostacolo consistente nell'associare il passaggio al limite ad un movimento fisico, ad un concreto avvicinamento; gli altri tipi riguardano rispettivamente ostacoli legati al concetto di funzione, quelli legati ad un concetto geometrico della nozione di limite, gli ostacoli logici e quelli legati alla simbologia. Anche in B. Cornu (Cornu, 1991) ed in altri Autori troviamo riferimenti ad ostacoli collegati alle concezioni metafisiche sull'infinito e sul suo statuto in Matematica. D. Tall considera tre sottosistemi, ciascuno dei quali tratta gli oggetti in modo differente ed ha proprie forme di verifica (Tall, 1996, esaminato in: Artigue, 1998): si passa da quello delle esperienze legate all'azione (che fornisce una base intuitiva al Calcolo ed è spesso legato ad ambienti di simulazione) a quello caratterizzato da rappresentazioni numeriche, simboliche e visuali (il Calcolo elementare) per giungere infine a quello del funzionamento formale, con oggetti manipolati sulla base di definizioni e non di descrizioni e con verifiche formali (l'"Analisi matematica" propriamente detta).

Ad un metodo classico della Matematica greca è stato dato il nome di *esaustione*. La dimostrazione per esaustione, uno dei capolavori della Matematica ellenica, non può tuttavia essere considerata un vero e proprio limite in senso moderno: il risultato da dimostrare (attraverso una *reductio ad absurdum*) deve essere precedentemente intuito, intuizione che i matematici greci ottenevano mediante tecniche euristiche (Rufini, 1926; Archimede, 1974; Bagni, 1996, I).

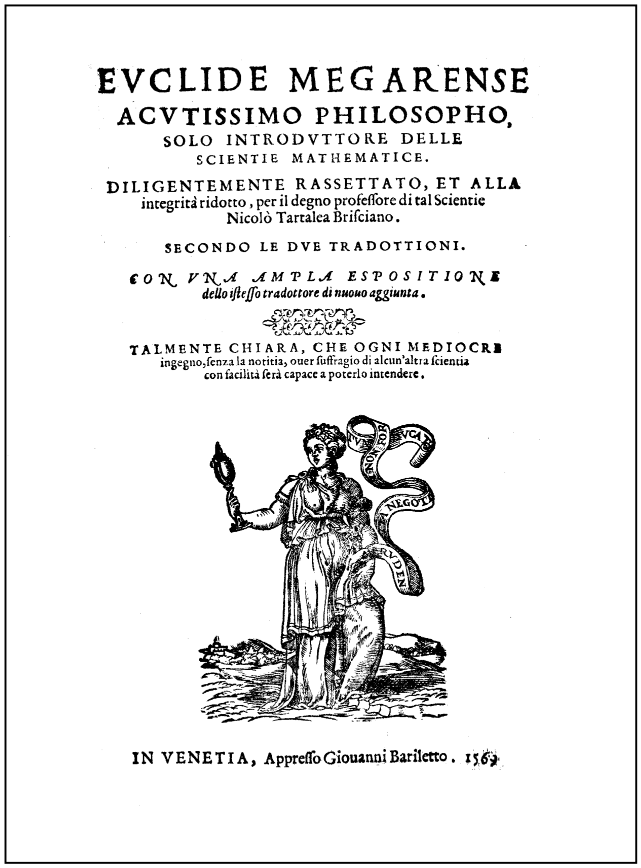
Per quanto riguarda i registri rappresentativi impiegati, il metodo di esaustione si presenta in termini molto interessanti: il principio di esaustione viene inizialmente espresso nel *registro verbale* (come Euclide stesso fece nella Proposizione 1 del X libro degli *Elementi*). Il *registro visuale*, inoltre, è particolarmente utile per esprimere le dimostrazioni per esaustione: la dimostrazione della proposizione 2 del XII libro, ad esempio, secondo la quale due cerchi stanno tra di loro come i quadrati dei rispettivi diametri, è strettamente basata sulla figura seguente, che visualizza la costruzione di un poligono inscritto (di lato AB) e di un poligono circoscritto (di lato A'B') al cerchio di centro O:



Proposizione 2 del XII libro degli *Elementi*. I cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri (Euclide, 1970, p. 931).

La dimostrazione euclidea per assurdo (probabilmente ripresa da Eudosso: Boyer, 1982, p. 108), può essere così schematizzata: dopo aver dimostrato che il rapporto di due poligoni simili inscritti in cerchi è uguale al rapporto dei quadrati dei diametri dei cerchi circoscritti (proposizione 1 del XII libro), si prova, applicando la proprietà di esaustione, che il rapporto dei cerchi non può essere maggiore né minore del rapporto dei poligoni regolari inscritti. Dunque il rapporto dei cerchi è uguale al rapporto dei poligoni regolari inscritti e quindi al rapporto dei quadrati dei diametri (Euclide, 1970, pp. 931-938).

Siano c e C i due cerchi assegnati, rispettivamente di diametri d e D e di aree a e A. Dobbiamo provare che: $\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$. Per quanto sopra detto, dobbiamo escludere entrambe le possibilità $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$ e $\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$.



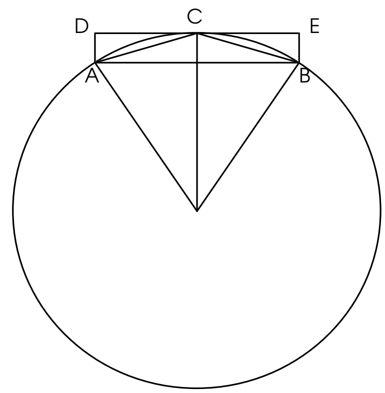
EVCLIDE MEGARENSE
ACVTISSIMO PHILOSOPHO,
SOLO INTRODVTTORE DELLE
SCIENTIE MATHEMATICE.
DILIGENTEMENTE RASSETTATO, ET ALLA
integrità ridotto, per il degno profeſſore di tal Scientie
Nicolò Tartalea Briſciano.
SECONDO LE DVE TRADOTTIONI.
CON VNA AMPLA ESPOSITIONE
dello iſteſſo tradottore di nuouo aggiunta.
TALMENTE CHIARA, CHE OGNI MEDIOCRE
ingegno, ſenza la notitia, ouer ſuffragio di alcun'altra ſcientia
con facilità ſerà capace a poterlo intendere.

IN VENETIA, Appreſſo Giouanni Bariletto. 1569.

L'edizione del 1569 degli *Elementi* commentati da Tartaglia

Ammettiamo che $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$. Deve esistere una $a'<a$ tale che: $\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2}$.

Consideriamo ora la grandezza $a-a'$ ed i poligoni regolari di n lati di area p_n e P_n rispettivamente inscritti in c ed in C. Si osservi che le aree delle parti di piano interne ai cerchi ma esterne ai poligoni inscritti si ridurrebbero a meno della metà se raddoppiassimo il numero dei lati di tali poligoni.



Infatti, passando dal segmento circolare di base AB alla coppia di segmenti circolari congruenti di base AC e CB abbiamo "tolto" dal segmento circolare inizialmente considerato il triangolo isoscele ABC; la parte tolta è dunque maggiore della metà del segmento circolare di base AB, essendo il triangolo ABC la metà del rettangolo ABED, il quale a sua volta è maggiore del segmento circolare di base AB considerato.

Dunque, per la "proprietà di esaustione", è possibile ridurre tali aree fino a scrivere, con riferimento alla grandezza $a-a'$ sopra introdotta:

$$a-p_n < a-a' \quad \Rightarrow \quad p_n > a'$$

In base al ricordato lemma, secondo il quale il rapporto di due poligoni simili inscritti in cerchi è uguale al rapporto dei quadrati dei diametri dei cerchi circoscritti (proposizione 1 del XII libro degli *Elementi*), possiamo allora scrivere: $\frac{p_n}{P_n} = \frac{d^2}{D^2}$ da cui, ricordando che $\frac{a'}{A} = \frac{d^2}{D^2}$, segue: $\frac{p_n}{P_n} = \frac{a'}{A}$.

Se, come abbiamo sopra provato, $p_n > a'$, risulta infine: $P_n > A$. Ma ciò è assurdo, non potendo essere l'area di un poligono inscritto in un cerchio maggiore dell'area del cerchio stesso. Pertanto è escluso che sia: $\frac{a}{A} > \frac{d^2}{D^2}$.

In modo analogo giungiamo ad escludere anche la possibilità: $\frac{a}{A} < \frac{d^2}{D^2}$. Non ci resta che concludere con la tesi: $\frac{a}{A} = \frac{d^2}{D^2}$.

Per quanto riguarda il registro rappresentativo simbolico, riportiamo un esempio di schema per l'applicazione moderna del metodo di esaustione (che riprendiamo da: Carruccio, 1972, pp. 167-168):

Siano G e G' grandezze omogenee; vogliamo dimostrare che G = G'. Siano A, B, A', B' grandezze variabili omogenee con G e G'. Per ogni A, B, A', B':

A = A' A < G < B B = B' A' < G' < B'

Supponiamo di poter trovare A, A', B, B' tali che la differenza B −A = B'−A' sia qualsiasi. Dunque per ogni ε omogenea con A, A', B, B', possiamo trovare A, A', B, B' tali che: B −A = B'−A' < ε. Proveremo che G = G'.

Supponiamo che G < G'. Potremmo allora scrivere G' −G = δ, essendo δ una grandezza omogenea con G, G'. Sappiamo che: A < G < G' < B, pertanto: B −A > G'−G = δ, ma ciò è impossibile, essendo: B−A < ε (ε è qualsiasi).

Analogamente proviamo l'impossibilità di G > G'; dunque: G = G'.

Mediante questo schema è davvero possibile esprimere il nostro antico procedimento infinitesimale in un registro rappresentativo simbolico (e nel senso dell'infinitesimo attuale)? La risposta potrebbe essere positiva, sebbene sia necessario precisare l'espressione "procedimento infinitesimale". Nonostante, infatti, il metodo di esaustione sia riferibile ad una situazione infinitesimale, ricordiamo che non è possibile equiparare tale procedimento ad un *limite* in senso moderno (Kline, 1972, pp. 99-100).

Abbandoniamo le dimostrazioni per esaustione ed occupiamoci di un altro affascinante oggetto matematico, il cui ruolo è di notevole importanza nella storia dei procedimenti infinitesimali (Arrigo, 1997). La nozione di serie è antica: già Aristotele di Stagira (384-322 a.C.) osservava implicitamente che la somma di una serie (in senso potenziale: Bostock, 1972-73) può essere finita. Nella *Quadratura della parabola* Archimede di Siracusa (287-212 a.C.) considera la serie geometrica di ragione ¼ nell'importante proposizione seguente:

Proposizione 23. Se alcune grandezze si pongono ordinatamente nel rapporto quadruplo [cioè se ciascuna è quadrupla della seguente], tutte le grandezze [sommate insieme] più ancora la terza parte della più piccola saranno i quattro terzi della maggiore (Archimede, 1974, p. 511).

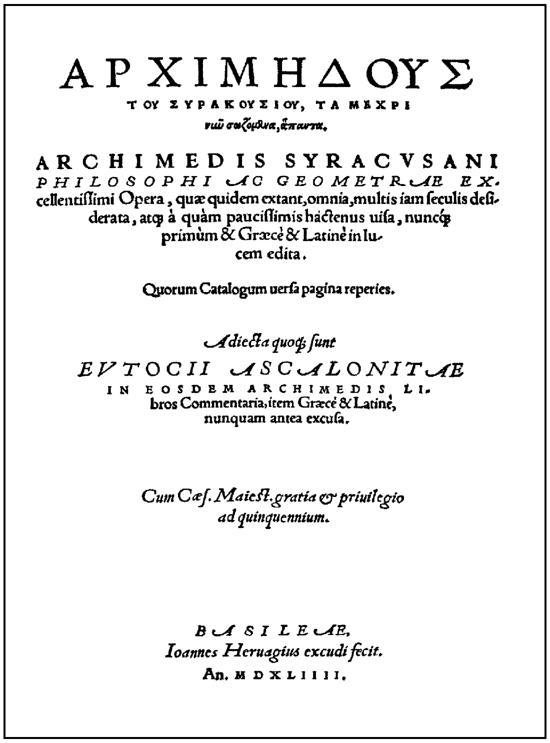
Se consideriamo unitaria la prima delle grandezze, scriviamo:

$$1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

$$\left(1+\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{4}{3}$$

$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{16}=\frac{4}{3}$$

$$\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{64}=\frac{4}{3} \qquad \text{etc.}$$



ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
ΤΟΥ ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΥ, ΤΑ ΜΕΧΡΙ
νῦν σωζόμενα, ἅπαντα.

ARCHIMEDIS SYRACVSANI
PHILOSOPHI AC GEOMETRAE EX-
cellentissimi Opera, quæ quidem extant, omnia, multis iam seculis desi-
derata, atque à quàm paucissimis hactenus uisa, nuncque
primùm & Græcè & Latinè in lu-
cem edita.

Quorum Catalogum uersa pagina reperies.

Adiecta quoque sunt
EVTOCII ASCALONITAE
IN EOSDEM ARCHIMEDIS LI-
bros Commentaria, item Græcè & Latinè,
nunquam antea excusa.

Cum Cæs. Maiest. gratia & priuilegio
ad quinquennium.

BASILEAE,
Ioannes Heruagius excudi fecit.
An. M D X L I I I I.

L'edizione delle opere di Archimede commentate da Eutocio d'Ascalona
(Basilea 1544)

Il risultato citato riguarda la somma dei primi termini di una serie geometrica di ragione 4; ma se consideriamo l'intera serie (gli infiniti termini):

$$\sum_{i=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^i = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots$$

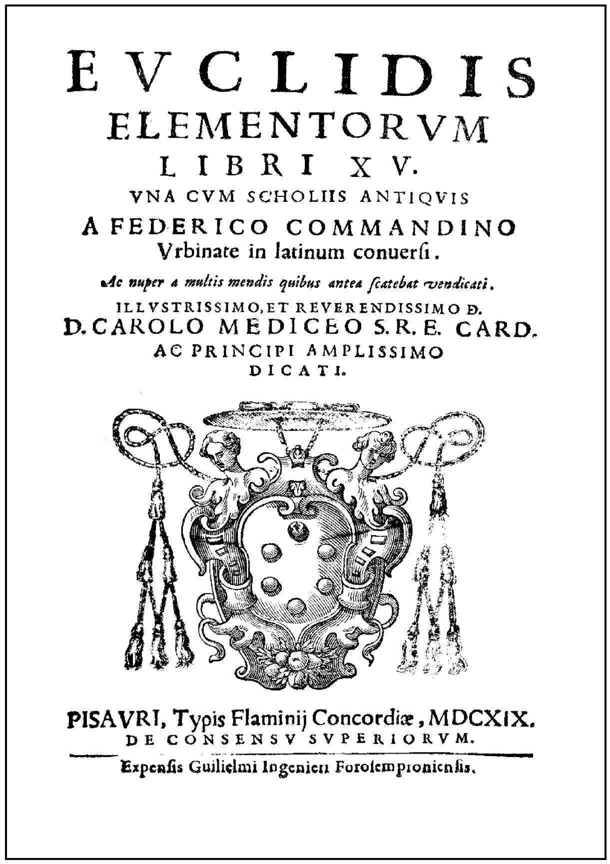
la proposizione afferma che il resto ottenuto considerando solo i primi n termini è la terza parte del termine n-esimo (ovvero dell'ultimo termine scritto). Prendendo in considerazione dunque solo il primo termine, risulta:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots=\frac{1}{3}$$

e la somma degli infiniti termini viene così ad essere:

$$1+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots\right)=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

(Nella proposizione 35 del libro IX degli *Elementi*, Euclide esprime un analogo risultato in forma più generale: «Se si danno quanti si voglia numeri in proporzione continuata fra loro, e dal secondo e dall'ultimo di essi si sottraggono numeri uguali al primo, si avrà che la differenza fra il secondo ed il primo numero sta al primo come la differenza fra l'ultimo ed il primo sta alla somma di tutti i numeri che precedono l'ultimo»: Euclide, 1970, p. 558).



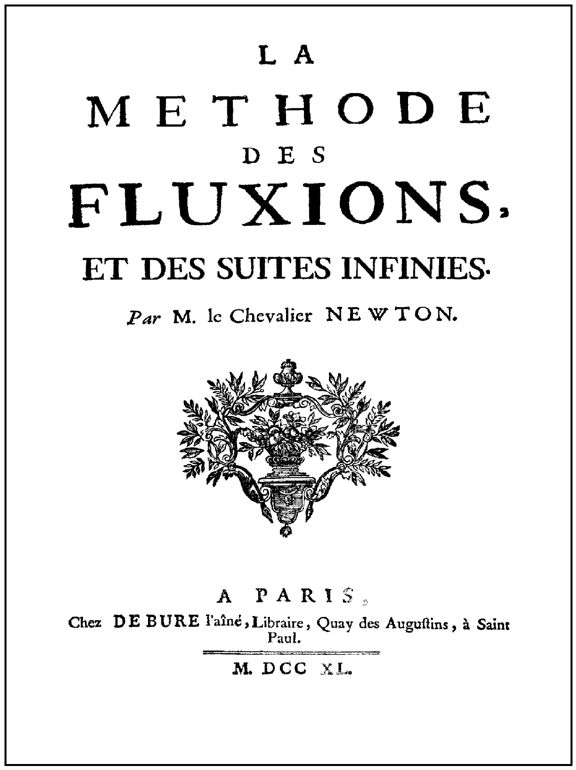
EVCLIDIS
ELEMENTORVM
LIBRI XV.
VNA CVM SCHOLIIS ANTIQVIS
A FEDERICO COMMANDINO
Vrbinate in latinum conuersi.
Ac nuper a multis mendis quibus antea scatebat vendicati.
ILLVSTRISSIMO, ET REVERENDISSIMO D.
D. CAROLO MEDICEO S.R.E. CARD.
AC PRINCIPI AMPLISSIMO
DICATI.

PISAVRI, Typis Flaminij Concordiæ, MDCXIX.
DE CONSENSV SVPERIORVM.
Expensis Guilielmi Ingenieu Forolempioniensis.

Il frontespizio degli *Elementi* con il commento di Federico Commandino (1619)

Una simile argomentazione porta ad un risultato che sarà ripreso secoli più tardi: la formula generale per la somma di una serie geometrica compare in un'opera di François Viète (1540-1603), *Varia responsa* (1593), ed era nota a Pierre de Fermat (1601-1665); fu pubblicata anche da Andreas Tacquet (1612-1660) in *Arithmeticae theoria et praxis accurate demonstrata* e da John Wallis (1616-1703) in *Arithmetica infinitorum*, opere risalenti al 1655. Tacquet notava, per quanto riguarda la somma di una «progressione infinita»:

«Tu che mi leggi vedrai con quanta facilità si giunga a quanto ti avevo promesso: cioè il passaggio da una progressione finita alla progressione infinita. Vi è ragione di stupirsi che gli aritmetici che conoscevano il teorema relativo alle progressioni finite abbiano ignorato quello concernente le progressioni infinite, che da esso si deduce immediatamente» (cit. in: Loria, 1929-1933, p. 517).



LA
METHODE
DES
FLUXIONS,
ET DES SUITES INFINIES.
Par M. le Chevalier NEWTON.

A PARIS,
Chez DE BURE l'aîné, Libraire, Quay des Augustins, à Saint Paul.

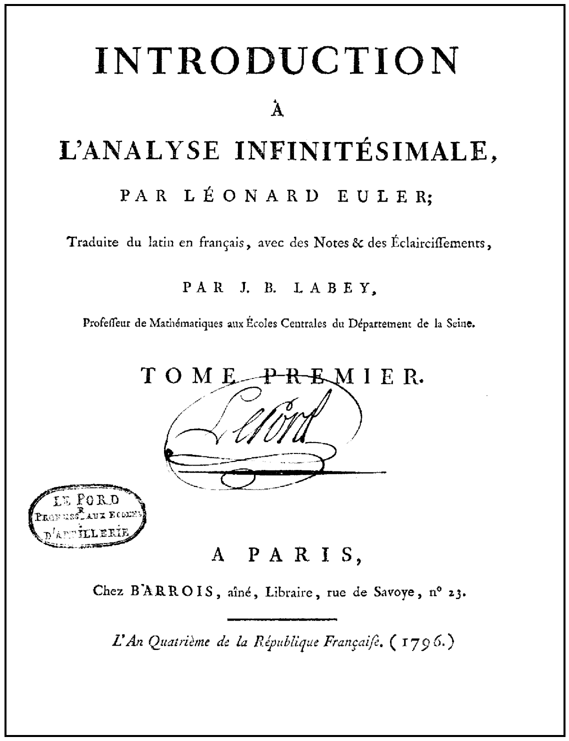
M. DCC XL.

La prima edizione francese del *Metodo delle flussioni* newtoniano (Paris, 1740)

Rileviamo però che queste considerazioni (ed i procedimenti analoghi sviluppati quasi contemporaneamente) *non* erano precedute da una dimostrazione di convergenza. Anzi, la nozione di convergenza non sembra essere presente nelle opere dei matematici del XVII secolo; G. Vitali (1875-1932) osservava:

«È naturale che una nozione precisa di convergenza delle serie non potesse aversi prima che fosse determinata la nozione di limite» (Vitali, 1979, p. 404).

Se da un lato questa affermazione appare storicamente condivisibile, non possiamo tuttavia non rilevare che, dal punto di vista cronologico, una qualche intuizione del concetto di limite non può essere considerata lontana dalle ricerche analitiche seicentesche (per un inquadramento della Matematica di quel periodo: Castelnuovo, 1938; Bourbaki, 1963; Boyer, 1969; Bottazzini, 1990).


INTRODUCTION

À

L'ANALYSE INFINITÉSIMALE,

PAR LÉONARD EULER;

Traduite du latin en français, avec des Notes & des Éclairciſſements,

PAR J. B. LABEY,

Profeſſeur de Mathématiques aux Écoles Centrales du Département de la Seine.

TOME PREMIER.

A PARIS,

Chez BARROIS, aîné, Libraire, rue de Savoye, n° 23.

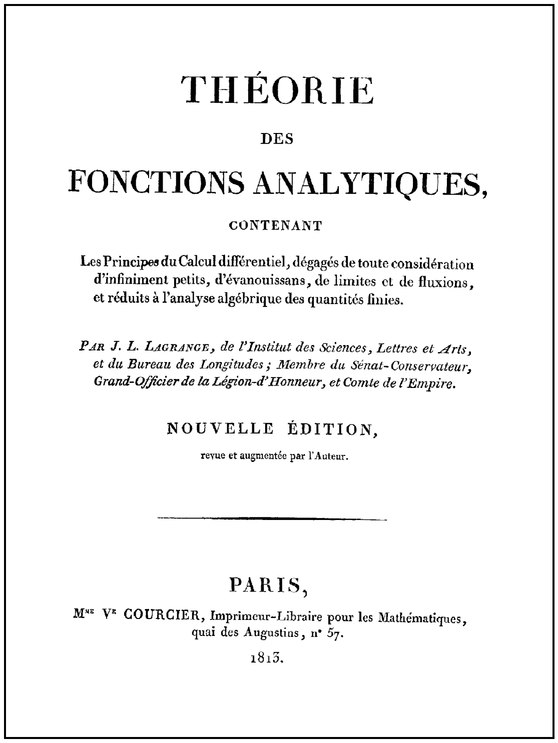
L'An Quatrième de la République Françaiſe. (1796.)

La prima edizione francese (Paris, 1796) dell'*Introductio* euleriana

Nell'*Arithmetica infinitorum* (1655) di John Wallis e nell'*Elementum tertium* della *Geometriae speciosae elementa* (1659) di Pietro Mengoli, infatti, troviamo chiari riferimenti alla nozione di limite di una successione. Analoghe considerazioni possono essere riferite ad altre importanti opere del periodo in esame, come la *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (1667) di James Gregory (1638-1675) o il capolavoro di Isaac Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687).

Possiamo dunque notare che la difficoltà con la quale vennero prese in esame, storicamente, le questioni di convergenza non sono da mettere in relazione con la mancanza della considerazione della nozione di limite; ma *per molto tempo il limite non è stato correttamente considerato come il concetto centrale sul quale basare i procedimenti infinitesimali* (Bagni, 1999a e 1999b). Tale osservazione va anche riferita ai massimi analisti del Seicento e del Settecento, come Newton, Leibniz (Bos, 1975), Euler, Lagrange.

È l'inizio dell'Ottocento che porta ad una svolta nell'impostazione (non solo formale) dei procedimenti infinitesimali e dunque alla nascita di un'Analisi matematica più robustamente fondata.



THÉORIE

DES

FONCTIONS ANALYTIQUES,

CONTENANT

Les Principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.

Par J. L. Lagrange, de l'Institut des Sciences, Lettres et Arts, et du Bureau des Longitudes; Membre du Sénat-Conservateur, Grand-Officier de la Légion-d'Honneur, et Comte de l'Empire.

NOUVELLE ÉDITION,

revue et augmentée par l'Auteur.

PARIS,

Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1813.

L'edizione parigina del 1815 della *Théorie des fonctions analytiques* di Lagrange

L'importanza delle opere analitiche di Augustin Louis Cauchy (1789-1857) è infatti duplice: sostanziale e formale. In esse troviamo definizioni e dimostrazioni che erano finalmente considerate, con riferimento alla sensibilità matematica del XIX secolo, rigorose. Riportiamo alcune parole dello stesso Cauchy:

«Quanto ai metodi, ho cercato di dar loro tutto il rigore che si esige in geometria, in modo da non ricorrere mai a dei ragionamenti tratti dalla generalità dell'algebra. Ragionamenti di questo tipo, benché ammessi abbastanza comunemente, soprattutto nel passaggio dalle serie convergenti alle serie divergenti e dalle quantità reali alle espressioni immaginarie, non possono essere considerati, mi sembra, che come delle induzioni adatte a far talvolta presentire la verità, ma che poco s'accordano con l'esattezza tanto vantata delle scienze matematiche» (trad. in: Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992, p. 326).

Cauchy voleva svincolare l'analisi dai procedimenti poco rigorosi (o scorretti) derivanti dall'applicazione teoricamente non fondata di metodi di comodo ed avvertiva la necessità di fondare tutti i concetti su definizioni precise. Le definizioni di limite e di infinitesimo sono alla p. 4 del *Cours d'analyse* (1821):

«Allorché i valori successivamente assunti da una stessa variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fissato, in modo da finire per differirne di tanto poco quanto si vorrà, quest'ultimo è chiamato il *limite* di tutti gli altri. Così (...) un numero irrazionale è il limite delle diverse frazioni che ne forniscono valori sempre più approssimati. In geometria, la superficie di un cerchio è il limite verso il quale convergono le superfici dei poligoni iscritti, mentre il numero dei loro lati cresce sempre di più, ecc. Allorché i successivi valori numerici [ovvero i valori assoluti] di una stessa variabile decrescono indefinitamente in modo da divenire minori di ogni numero dato, questa variabile diviene ciò che si chiama *infinitesimo* o una quantità *infinitesima*. Una variabile di questa specie ha zero come limite» (trad. in: Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992, pp. 327-328).

Siamo di fronte a definizioni assolutamente rigorose? No, se esaminate con la sensibilità matematica dei nostri giorni. Ma il confronto con la letteratura matematica precedente evidenzia un'inversione di tendenza: l'impostazione di Cauchy, esaminata criticamente, riflette l'impostazione della moderna analisi, nella quale il limite viene considerato come il concetto fondamentale (Boyer, 1982).

Importante è sottolineare che le definizioni di Cauchy possono essere espresse facilmente nel registro rappresentativo verbale; sarebbe invece assai difficoltoso esprimerle, nella loro formulazione originale, in forma simbolica. Possiamo concludere che il concetto di limite che troviamo a partire dal XVII secolo da Wallis, Mengoli e, infine, da Cauchy, è principalmente espresso nel registro verbale. Esso è riferito ad una concezione potenziale dell'infinitesimo.

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) diede la moderna definizione di limite e di funzione continua: egli affermò che la funzione $x \to f(x)$ è continua in $x = c$ se per ogni reale $\varepsilon>0$ si può trovare un δ in modo che per ogni x tale che $|x-c| < \delta$ si abbia $|f(x)-f(c)| < \varepsilon$. L'opera di Weierstrass contribuì, anche dal punto di vista formale, all'evoluzione dell'infinitesimo potenziale verso l'infinitesimo attuale (Arrigo & D'Amore, 1992, D'Amore 1996; evoluzione che proseguirà idealmente, nel XX secolo, con l'analisi non-standard: Robinson, 1974).

Per quanto riguarda i registri rappresentativi, l'impostazione di Weierstrass permette l'uso efficace del registro simbolico; le moderne espressioni per il limite e la continuità sono equivalenti alle definizioni di Weierstrass di limite *l* e di funzione continua.

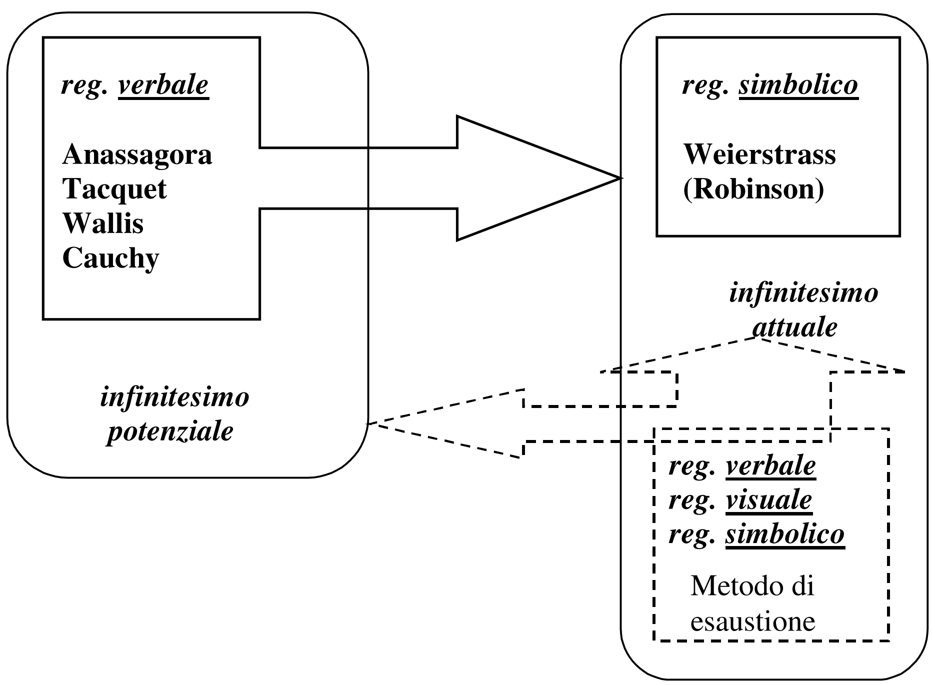
Riassumiamo le fasi dell'evoluzione sopra presentata:

La concezione dell'infinito (e dell'infinitesimo), fino al XVIII *secolo, è potenziale. Nonostante gli sforzi di alcuni (ad esempio Euler), il concetto di limite non sarà precisato fino al* XIX *secolo.*

Il metodo di esaustione può essere espresso nei registri verbale, visuale, simbolico. Può inoltre essere interpretato nel senso dell'infinitesimo attuale. Ma il metodo di esaustione non equivale propriamente ad un limite.

Il moderno concetto di limite, introdotto fino dal XVII *secolo da Wallis, Mengoli e, finalmente, da Cauchy, è espresso nel registro rappresentativo verbale ed è riferito all'infinitesimo potenziale.*

La definizione di limite di Weierstrass ("dell'ε-δ") può essere espressa nel registro simbolico e può essere interpretata nel senso dell'infinitesimo attuale.

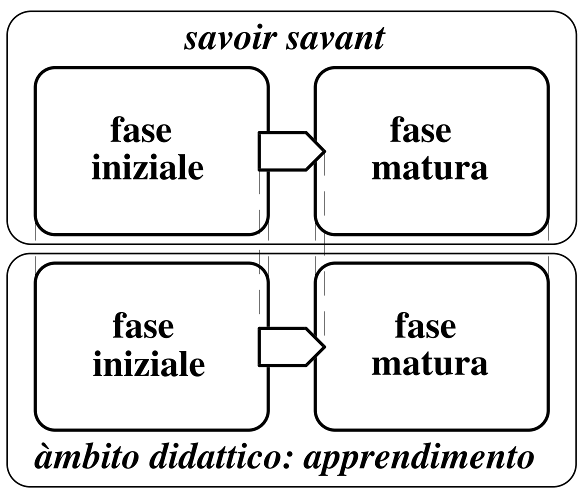


Dunque l'evoluzione storica dei concetti infinitesimali (ed in particolare del basilare concetto di limite) si è svolta e si svolge parallelamente all'evoluzione del linguaggio e delle modalità di rappresentazione: ciò è stato ed è causa di reciproche influenze che una corretta analisi storica non può ignorare (e delle quali la moderna ricerca in Didattica della Matematica deve tenere conto) (2).

La storia della Matematica nell'epistemologia dell'apprendimento

Utilizzando la terminologia di Chevallard (1985), la storia della Matematica può utilmente essere impiegata nella *transposition didactique* dal *savoir savant* alla forma di sapere effettivamente utilizzato nel processo di insegnamento-apprendimento (Furinghetti & Somaglia, 1997; D'Amore, 1999). Per quanto riguarda il *savoir savant*, ipotizziamo una visualizzazione dello sviluppo storico di un concetto: esso può essere considerato come una sequenza di (almeno) due fasi, una prima in cui il concetto è percepito intuitivamente (e strumentalmente), ed una seconda fase matura, strutturale; molti secoli possono dividere tali fasi.

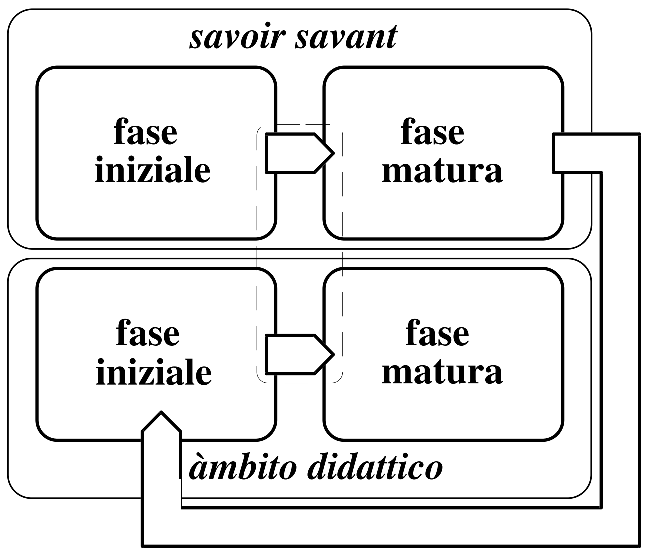
Dal punto di vista didattico, può essere rilevata una situazione analoga (Sfard, 1991): naturalmente, in una prima fase, gli allievi si accostano intuitivamente ad un concetto matematico, senza avere di esso una comprensione completa e sviluppata. Solo in un secondo momento l'apprendimento si fa più pieno e maturo. Possiamo quindi abbinare allo schema precedente, riguardante il *savoir savant*, un "parallelo" schema in ambito didattico.



(2) Ricordiamo inoltre che l'uso dei nuovi strumenti tecnologici induce negli allievi comportamenti di validazione legati al confronto di più punti di vista piuttosto che alla ricerca di dimostrazioni decisive (Artigue, 1998). Ciò favorisce un'articolazione di registri semiotici che, se non controllata, potrebbe porre dei problemi di concezione della razionalità matematica (Trouche, 1996; Artigue & Al., 1997; Cantoral, 1998).

C'è un'evidente analogia tra le due situazioni o ra illustrate: il passaggio in ambito didattico dalla fase iniziale alla fase matura può rivelare, nella mente degli allievi, dubbi e reazioni che possiamo trovare nel corrispondente passaggio nella formazione del *savoir savant* (si veda: Piaget & Garcia, 1983; anche se quanto ivi affermato va ben oltre quanto riportato nel presente nostro lavoro).

Naturalmente il processo di insegnamento-apprendimento ha luogo oggi, dunque dopo il completo sviluppo del *savoir savant*, sia per quanto riguarda la fase iniziale che la fase matura; pertanto la stessa *transposition didactique*, che inizialmente può e deve rendere possibile una prima conoscenza intuitiva, può basarsi anche sui risultati raggiunti nella fase matura dello sviluppo del *savoir savant* (3):

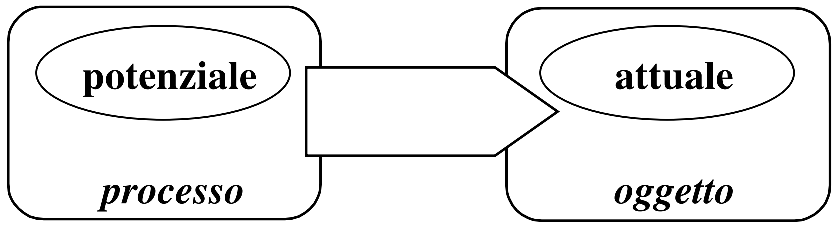


La differenza tra le concezioni potenziale e attuale dell'infinito e dell'infinitesimo va certamente considerata in senso ampio, in quanto riflette scelte filosofiche che vanno ben al di là delle pur importanti implicazioni didattiche.

---

(3) Il processo di insegnamento-apprendimento e la *transposition didactique* devono tenere conto che le reazioni degli allievi sono spesso simili a quelle dei grandi matematici della storia della nostra disciplina (si veda ad esempio la ricerca sperimentale riportata in: Bagni, 1999b). Una chiara e corretta considerazione di questa corrispondenza può essere importante per l' insegnante; tuttavia la possibilità di sfruttare appieno tale fenomeno richiede un'adeguata preparazione epistemologica dei docenti.

Rileviamo tuttavia che la concezione potenziale dell'infinito e dell'infinitesimo sia facilmente riconducibile alla descrizione di un *processo*, mentre la concezione attuale sia da riferire più propriamente ad un *oggetto*. E la stessa diversa esprimibilità nei vari registri rappresentativi risente della differente difficoltà concettuale delle due impostazioni.



Osserviamo a questo proposito che la diversa valenza intuitiva delle due concezioni appare evidente: non sono richieste capacità particolari per immaginare di aggiungere un elemento ad un insieme (ad esempio di inserire una nuova pallina in un sacchetto contenente altre palline) o di muovere un passo in avanti su di una strada; né tali capacità sono richieste per immaginare l'indefinita ripetizione di tale atto: a quale semplice modello, invece, si può fare riferimento per dare corpo all'infinito inteso in senso attuale? (Osserviamo che la valenza della metafora è di primaria importanza nella moderna didattica della matematica: Lakoff & Nuñez, 2000).

Concludiamo rinnovando una sfida…

«La riflessione sull'evoluzione dei rapporti all'analisi, a partire dagli approcci intuitivi e sperimentali che sembrano inizialmente inevitabili, sulle strutturazioni e sulle ricostruzioni necessarie, in modo epistemologicamente coerente ed ecologicamente percorribile, nel quadro delle differenti culture, dei differenti vincoli istituzionali, sia che si tratti dell'analisi liceale che di quella universitaria: questa sembra essere oggi la sfida cruciale per la ricerca (…). In questo campo abbiamo senza alcun dubbio perso la *naïveté* che caratterizzava le prime ricerche di ingegneria didattica, ma non siamo che all'inizio del cammino» (Artigue, 1998).

Riferimenti bibliografici

Archimede (1974), *Opere*, Frajese, A. (a cura di), UTET, Torino.
Arrigo, G. & D'Amore, B. (1992), *Infiniti*, Angeli, Milano.
Arrigo, G. (1997), Cavalcata fra le serie infinite, *Bollettino docenti di Matematica*, 34, 41-49.

Artigue, M.; Defouad, B.; Dupérier, M.; Juge, G. & Lagrange, J.B. (1997), *L'intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée*, Rapport de recherche, Equipe DIDIREM, IREM Paris 7.
Artigue, M. (1998), L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 18.2, 231-262.
Bagni, G.T. (1996), *Storia della Matematica*, I-II, Pitagora, Bologna.
Bagni, G.T. (1998), L'infinitesimo, *L'educazione matematica*, XIX, V, 3, 2, 110-121.
Bagni, G.T. (1999a), Visualization and Didactics of Mathematics, *Scientia Paedagogica Experimentalis*, XXXV, 1, 161-180.
Bagni, G.T. (1999b), Le serie numeriche dalla Storia alla Didattica della Matematica, Gagatsis, A. (Ed.), *A multidimensional approach to Learning in Mathematics and Sciences*, Intercollege Press, Nicosia, Cyprus, 183-194.
Bos, H.J.M. (1975), Differentials, high-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus, *Archive for History of Exact Sciences*, 14, 1-90.
Bostock, D. (1972-1973), Aristotle, Zeno and the potential infinite, *Proceedings of the Aristotelian Society*, 73.
Bottazzini, U. (1990), *Il flauto di Hilbert. Storia della Matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino.
Bottazzini, U.; Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L. (1992), *Fonti per la storia della Matematica*, Sansoni, Firenze.
Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della Matematica*, Feltrinelli, Milano (*Eléments d'histoire des mathematiques*, Hermann, Paris 1960).
Boyer, C. (1969), The History of the Calculus, Hallerberg et. Al. (1969), *Historical Topics for the Mathematics Classroom*, National Council of Teachers of Mathematics, Washington.
Boyer, C. (1982), *Storia della Matematica*, Mondadori, Milano (*A History of Mathematics*, John Wiley & Sons, New York 1968).
Cantoral, R. (1998). Teaching and learning in a technological environment: the case of undergraduate mathematics. *CRM-Notes*, Centre de Recerca Matematica del Institut D'Estudis Catalans, Barcelona.
Carruccio, E. (1972), *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, Pitagora, Bologna.
Castelnuovo, G. (1938), *Le origini del calcolo infinitesimale*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica: Feltrinelli, Milano 1962).
Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Penseé Sauvage.
Cornu, B. (1991), Limits, D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer Academic Publishers, 153-166.
D'Amore, B. (1996), L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi, *La Matematica e la sua didattica*, 3, 1996, 322-335.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della Matematica*, Pitagora, Bologna.
Dupont, P. (1981), *Appunti di storia dell'Analisi infinitesimale, I-II,* Cortina, Torino.
Duval, R. (1993), Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg.
Euclide (1970), *Elementi*, Frajese, A. & Maccioni L. (a cura di), UTET, Torino.
Furinghetti, F. & Somaglia, A. (1997), Storia della Matematica in classe. *L'educazione matematica*, XVIII, V, 2, 1.
Geymonat, L. (1970), *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, Milano.
Kline, M. (1972), *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York.
Lakoff, G. & Nuñez, R. (2000), *Where Mathematics come from? How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York.
Loria, G. (1929-1933), *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino (ristampa anastatica: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982).
Piaget, J. & Garcia, R. (1983), *Psychogenèse et histoire des sciences*, Flammarion, Paris.
Robinson, A. (1974), *Non-standard analysis*, North-Holland, London.
Rufini, E. (1926), *Il «Metodo» di Archimede e le origini del calcolo infinitesimale nell'antichità*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica: Feltrinelli, Milano 1961).
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
Sierpinska, A. (1985), Obstacle épistémologiques relatifs à la notion de limite, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6, 1, 5-68.
Tall, D. (1996), Function and Calculus, A.J. Bishop & Al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, 289-325, Kluwer Academic Publishers.
Trouche, L. (1996), *Etude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*, Thèse de Doctorat, Université de Montpellier 2.
Vitali, G. (1979), Limiti, serie, frazioni continue, prodotti infiniti, Berzolari, L.; Vivanti, G. & Gigli, D. (Eds.), *Enciclopedia delle matematiche elementari*, I-2, Hoepli, Milano.