*Progetto Alice* (2005) 16, 5–26

# L'induzione, "esempi dall'aritmetica e dall'algebra" Una lezione di Luigi Bàrbera nel centenario della scomparsa

**Giorgio T. Bagni**
**Marta Menghini**

**Riassunto** Nel presente lavoro sono esaminati alcuni esempi proposti dal filosofo Luigi Bàrbera (1829-1904) nel trattato *Lezioni di logica inventiva* (Pisa, 1866). Dal punto di vista didattico, tali esempi possono essere commentati criticamente per sottolineare l'importanza della ricerca euristica e della dimostrazione, sia in matematica che nella pratica didattica.

**Abstract** In this paper some examples proposed by the philosopher Luigi Bàrbera (1829-1904) in the treatise *Lezioni di logica inventiva* (Pisa, 1866) are examined. From the educational point of view, these examples can be discussed in order to underline the importance of the heuristic research and of the proof, both in mathematics and in classroom practice.

**Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine**
**Dipartimento di Matematica, Università di Roma "La Sapienza"**

## La dimostrazione: una sfida per la didattica

La letteratura è ricca di studi sulla dimostrazione e sul suo ruolo nella didattica della matematica: se infatti la dimostrazione tradizionalmente accettata in matematica per l'ottenimento di "risultati affidabili" (Hadamard, 1945) è quella formale, basata su definizioni rigorose e su deduzioni sviluppate nell'ambito del calcolo logico (Tall, 1995b), molti altri tipi di inferenza e di giustificazione possono essere utilmente considerati.

Dal punto di vista didattico, la stessa dimostrazione tradizionale richiede inoltre particolare cura da parte dell'insegnante, in quanto "gli studenti devono familiarizzare con i criteri del ragionamento matematico: in altre parole, si deve insegnar loro la dimostrazione" (Hanna, 1997, p. 250). Tuttavia ricondurre interamente la portata didattica della dimostrazione alla deduzione sarebbe riduttivo: esiste infatti "un vasto campo di capacità che interferiscono con il dimostrare, e […] ciascuna di queste capacità richiede un processo evolutivo che è compito della scuola suscitare" (Bruno Longo, 1992, p. 15).

D. Tall (1995a e 1995b) considera, ad un primo livello, la *enactive proof*, basata su azioni fisiche con il supporto di elementi verbali e visuali; anche nella *visual proof* componenti fisiche e verbali possono essere presenti con un ruolo rilevante; un'importante componente è la necessità di interpretare il caso particolare disegnato in senso generale in modo da potere così considerare la dimostrazione come riferita ad una molteplicità di situazioni e non ad un singolo caso (si ha allora la *generic visual proof*: secondo Tall la classica dimostrazione euclidea sarebbe la traduzione verbale della generic visual proof: Tall, 1995b). La *visual proof* può talvolta presentare aspetti di debolezza e richiedere una propria formalizzazione; ma lo stesso Tall sottolinea che questo "passaggio al livello formale richiede un enorme sforzo cognitivo" (Tall, 1995b). Da questa sintetica rassegna[1] si evince che la tradizionale fase della dimostrazione formale viene ad essere talvolta l'atto conclusivo di un'articolata successione di argomentazioni che mettono in gioco capacità diverse da parte dell'allievo e coinvolgono diversi registri rappresentativi.

Nel presente lavoro alcuni "esempi" proposti da Luigi Bàrbera, filosofo del quale ricorre (2004) il centenario della scomparsa, forniranno l'occasione per alcune riflessioni sulle forme di inferenza con riferimento alla pratica didattica.

---

[1] Peraltro soltanto riassuntiva e non del tutto completa: Tall paragona ad esempio la *visual proof* alla *manipulative* proof con riferimento alla dimostrazione di alcune identità algebriche elementari (Tall, 1995b).

## L'inferenza induttiva

Luigi Bàrbera (Minervino Murge, 12 ottobre 1829 - 17 gennaio 1904) insegnò Filosofia Teoretica a Napoli e a Roma e Filosofia Morale a Pisa e a Bologna. Scrisse alcune opere di argomento scientifico e matematico che però non incontrarono il favore dei matematici contemporanei. [2] Nel presente lavoro ci occuperemo di *Lezioni di logica inventiva* (Nistri, Pisa, 1866), opera suddivisa in una Parte prima, "Teorica del giudizio" (pp. 1-191), ed in una corposa Parte seconda, "Del metodo induttivo delle scienze naturali" (pp. 194-566).

Prima di presentare gli "esempi dall'aritmetica e dall'algebra" proposti da Bàrbera nella Lezione XXVI dell'opera (pp. 363-373), è importante fissare alcune considerazioni terminologiche. Con il termine "induzione" si indica un procedimento che dall'osservazione di casi particolari consente di risalire ad una legge universale: tale processo viene fatto risalire ad Aristotele (*Metafisica*, XIII)[3] ed ebbe assertori come Galileo Galilei e Francis Bacon.[4]

Nel 1878 Charles Sanders Peirce (1834-1914) illustra i tre tipi di inferenza proponendo il celebre esempio dei fagioli (Peirce, 1984, pp. 201-221): disponiamo di un sacco con l'etichetta "Fagioli bianchi". Ciò significa che tale sacco contiene soltanto fagioli bianchi (*regola*). Pertanto se estraessimo una manciata di fagioli dal sacco (*caso*), constateremmo che essi sarebbero tutti bianchi (*risultato*). Questa è la struttura che chiamiamo *deduzione*.

*Regola* Tutti i fagioli contenuti in questo sacco sono bianchi

*Caso* Questi fagioli provengono da questo sacco

↓

*Risultato* Questi fagioli sono bianchi

---

[2] Tra le opere di soggetto matematico di Luigi Bàrbera ricordiamo: *Teorica del calcolo delle funzioni* del 1876; *Nuovo metodo dei massimi e dei minimi* del 1877; *Introduzione allo studio del calcolo* del 1880; *I semplici contemporanei: critica al calcolo infinitesimale* del 1883; *Teorica dell'integrabilità delle funzioni* del 1890; *Teorica delle equazioni differenziali duple* del 1895, *Critica al newtonismo ovvero delle cause dei moti planetari* del 1900.

[3] Per Aristotele l'inferenza può essere deduttiva, induttiva e quella chiamata απαγωγη, talvolta tradotta come "riduzione". Ad essa fa riferimento Peirce col termine "abduzione" (Eco, 1990).

[4] Le osservazioni critiche di David Hume sulla legittimità del passaggio dal particolare all'universale furono riviste dall'empirismo di Stuart Mill (ed è significativo che Bàrbera faccia esplicito riferimento al trattato *System of Logic* di Mill, ad esempio a p. 564, dove è citato "tra i migliori libri di logica ch'io mi conosco"; ampie e frequenti sono inoltre, in *Lezioni di logica inventiva*, le citazioni di brani di Galileo).

Non abbiamo, in questo caso un vero e proprio aumento di conoscenza, ma ci limitiamo a tener conto delle conseguenze della situazione determinata dalla regola e dal caso.

Illustriamo ora il caso dell'*induzione*: inizialmente non conosciamo il contenuto del sacco (non c'è alcuna etichetta); per scoprirlo estraiamo una manciata del contenuto (*caso*) e ci rendiamo conto che si tratta di fagioli bianchi (*risultato*). Questo ci fa supporre che il sacco contenga soltanto fagioli bianchi (*regola*). Abbiamo dunque ottenuto la regola generalizzando il caso sperimentale, ma non possiamo essere certi della sua validità. Per aumentare l'affidabilità di quanto supposto possiamo ripetere l'operazione: ogni volta che estraiamo una nuova manciata di fagioli bianchi, aumenta il grado di affidabilità della nostra supposizione, ma a rigore non potremmo essere sicuri della sua validità finché non avremo controllato tutti i fagioli presenti nel sacco. La struttura logica dell'induzione è così schematizzabile:

*Caso* Questi fagioli provengono da questo sacco

*Risultato* Questi fagioli sono bianchi

↓

*Regola* Tutti i fagioli contenuti in questo sacco sono bianchi (*forse*)

Esaminiamo infine, per completezza, il caso dell'*abduzione*: vediamo una manciata di fagioli bianchi (non ne conosciamo però la provenienza) su di un tavolo (*risultato*) e, accanto, un sacco con l'etichetta "Fagioli bianchi" (*regola*). Supponiamo allora che i fagioli sul tavolo provengano proprio da quel sacco, ossia che costituiscano un *caso* di questa regola. Ovviamente la formulazione di una tale ipotesi non ci garantisce alcuna certezza in proposito. La struttura logica è la seguente:

*Risultato* Questi fagioli sono bianchi

*Regola* Tutti i fagioli contenuti in questo sacco sono bianchi

↓

*Caso* Questi fagioli provengono da questo sacco (*forse*)

L'abduzione è rischiosa in quanto il risultato (i fagioli bianchi sul tavolo) potrebbe essere un caso della regola che conosciamo ma potrebbe anche essere un caso di *altre* regole (ad esempio i fagioli potrebbero essere stati collocati sul tavolo da qualcuno per qualche altro motivo, ma non provenire dal sacco).

Come vedremo, Bàrbera proporrà alcuni esempi di inferenza induttiva. Ma è importante sottolineare che il termine *induzione*, in questo caso, ha ben poco a che fare con il *principio di induzione matematica* sulla quale si basa l'*induzione completa*: esso, utilizzato da secoli in varie forme (l'implicita presenza di dimostrazioni per induzione può essere segnalata addirittura in Euclide: Vacca, 1933, p. 182; esempi significativi di tali dimostrazioni per induzione si trovano nei lavori di Maurolico, dei Bernoulli e di Fermat, nella forma equivalente detta *della discesa infinita*), nel 1861 fu posto tra i fondamenti dell'aritmetica da Robert Grassmann (1815-1901); nel 1889 Giuseppe Peano (1858-1932) lo inserì come terzo assioma del proprio sistema (la logica matematica ha chiarito che esso è in realtà un sistema di assiomi, dunque "contiene", di fatto, una serie di assiomi: Bell, Machover, 1977). Può così esprimersi:

> "Se *s* è una classe contenente lo zero e, per ogni *a*, se *a* appartiene a *s*, il successivo di *a* appartiene a *s*; allora ogni numero naturale è in *s*" (si veda l'originale espressione simbolica in: Peano, 1908).

Con il termine *dimostrazione per induzione* (o *per induzione completa*), intendiamo oggi una particolare tecnica dimostrativa basata sul principio ora ricordato;[5] molte ricerche hanno evidenziato che si tratta di un argomento didatticamente delicato.[6]

---

[5] Se con il simbolo $P(n)$ indichiamo una proposizione che vogliamo provare, sottolineando in tale modo che si tratta di un'affermazione dipendente dall'indice naturale $n$, la dimostrazione per induzione di $P(n)$ è costituita da due fasi distinte, entrambe indispensabili (Ferrari, 1988): si verifica direttamente la verità di $P(0)$; si ammette quindi la verità di $P(n-1)$ e, sulla base di ciò, si dimostra che $P$ è vera anche per l'indice $n$; ovvero: si prova che la validità di $P$ per un indice (qualsiasi) comporta la validità per il successivo. Se è possibile completare la verifica di entrambi tali punti, la proposizione $P(n)$ può dirsi dimostrata per *tutti* gli indici naturali $n$: la prima fase, infatti, ci consente di affermare che la proposizione $P(n)$ è vera per $n = 0$; sulla base di ciò, la seconda fase ci assicura che $P(n)$ è vera anche per $n = 1$ (ovvero per il successivo di 0); appurato ciò, possiamo affermare che $P(n)$ è vera anche per $n = 2$ e così di seguito.

[6] "Il passo di induzione richiede una dimostrazione per conto suo (in quanto implicazione temporaneamente autonoma). L'idea che si debba dimostrare un'implicazione $p \to q$ per la quale il problema della verità obiettiva di ciascuna delle due componenti $p$ e $q$ è del tutto irrilevante (nell'ambito del passo di induzione) sembra essere inaccettabile intuitivamente. La situazione è complicata dal fatto che l'antecedente $p$ include il teorema da dimostrare. Allora lo studente, essendo abituato ad aspettarsi un valore di verità per l'antecedente, è sconcertato dal fatto che l'accettazione dell'antecedente dipende proprio dal teorema che si deve dimostrare. Secondo la teoria di Piaget, uno dei principali aspetti dello stadio delle operazioni formali è che l'adolescente diviene capace di manipolare logicamente delle strutture proposizionali nelle quali le implicazioni giocano un ruolo fondamentale. Ma sembra che le cose siano più

Segnaliamo che l'applicazione in matematica dell'induzione "incompleta" (cioè quella basata soltanto sulla generalizzazione di uno o più casi particolari) può essere causa di errori. Ad esempio, per i naturali $n$, con $0<n<20$, almeno uno dei numeri $6n\pm1$ è primo; ma la generalizzazione di questa iniziale regolarità sarebbe errata: infatti per $n = 20$ entrambi i numeri $6\cdot20\pm1$ sono composti ($119 = 7\cdot17$ e $121 = 11\cdot11$).

L'induzione alla quale fa riferimento Bàrbera in *Lezioni di logica inventiva* è "incompleta". Così l'Autore introduce gli esempi di cui ci occuperemo:

> "E però avendo noi esposto quella parte del metodo induttivo che insegna l'arte di acquistare esatta e certa cognizione de' fenomeni, dobbiamo al presente passare a trattar di quell'altra parte assai più importante, e nello stesso tempo più difficile, che addita le vie legittime di scovrire le leggi e le cause che immutabilmente reggono quell'infinita varietà e successione che si osservano nei fenomeni" (Bàrbera, 1866, p. 354).

Inoltre:

> "La proposizione particolare originata dall'osservazione e dall'esperimento si è trasformata in una proposizione universale mediante una semplice sostituzione, fatta dalla mente, di concetti ai fatti percepiti per mezzo de' sensi. […] Se nel trasformare la proposizione particolare nella universale noi non erriamo nella scelta de' concetti, la seconda riesce di necessità vera, cioè vero tipo della verità di tutte le infinite proposizioni particolari che se ne possono cavare" (p. 357).

Bàrbera suggerisce dunque di esaminare innanzitutto un caso particolare dal quale risalire alla formula generale ("convertire la cognizione particolare in una che sia universale": p. 361). Trovata tale formula, "bisogna farne la prova, la quale consiste nell'esaminare un certo numero di casi particolari" (p. 363).

## "Esempi dall'aritmetica e dall'algebra"

Per illustrare il passaggio dal particolare all'universale, l'Autore propone alcuni esempi per i quali osserva preliminarmente:

---

complicate di quanto prevede la teoria piagetiana. Sembra che molti adolescenti tendano ancora a conferire valori assoluti di verità a ciascuna delle affermazioni da connettere mediante l'implicazione, anche quando tali valori di verità sono irrilevanti per le condizioni formali date" (Fischbein, Engel, 1989, p. 45). Segnaliamo inoltre: Brumfield, 1974 ed Ernest, 1984.

“Questi esempii li sceglierò dall’aritmetica e dall’algebra, affinché la maggior semplicità de’ numeri, che pur son fatti particolari, e la nessuna conoscenza che io suppongo in voi delle formole generali che ne caveremo, e che rappresentano un’infinità di casi particolari di certe combinazioni di numeri, aiutino più efficacemente la vostra intelligenza a formarsi una giusta idea del mentale processo che vo’ a mostrarvi” (p. 362).

***Esempio A.*** Qual è la somma dei primi $n$ interi positivi? (pp. 363-364).

Bàrbera propone innanzitutto il caso particolare:

$$1+2+3+4+5+6 = 21$$

È quindi necessario “considerare che cosa è il 21 rispetto ai termini della serie. […] Si vede che il 21 è il prodotto della metà dell’ultimo termine, o la metà de’ termini della serie, per l’ultimo accresciuto di 1” (p. 364). Cioè:

$$1+2+3+4+5+6 = 3\cdot 7 = (6/2)\cdot 7$$

E l’Autore conclude:

“Veduto ciò, invece di 6 si ponga $m$, e si avrà la formola generale della somma della serie di numeri naturali espressa da $(m/2)(m+1)$” (p. 364).

Il controllo finale può avvenire mediante alcune verifiche (“Ne volete la prova? Farete come nel caso precedente”, p. 364).[7]

***Esempio B.*** Qual è la somma dei quadrati dei primi $n$ interi positivi? (pp. 366-369).

Il caso particolare inizialmente considerato è:

$$1+2^2+3^2+4^2+5^2 = 55 = 5\cdot 11$$

in cui, come nell’esempio precedente, 55 è stato scomposto in fattori primi:
Seguiamo l’Autore:

“Ora il primo fattore, cioè 5, è la radice dell’ultimo termine della serie data; il qual termine generalizzato diventa $m$. Il secondo fattore, cioè 11, è il doppio dell’ultimo termine più il primo, che è l’uno: e però in termini generali viene espresso da $2m+1$: quindi la formola generale che si cava da 55 è $m(2m+1)$” (p. 366).

[7] L’esempio descritto è il secondo di quelli proposti da Bàrbera: il primo riguarda la formula $(m+1)^2-m^2 = 2m+1$. Un terzo esempio, che ometteremo, riguarda lo sviluppo della $n$-esima potenza di un binomio.

La formula così trovata non è però corretta: “fa mestieri farne la prova”, osserva Bàrbera, e considerando il caso $1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2$ “la formola si risolve in $6\cdot 13 = 78$; il che prova che quella non è la vera formola, giacché $1+2^2\ldots 6^2 = 91$” (p. 366).

L’Autore considera nuovamente la scomposizione in fattori primi (“invece di scegliere un nuovo metodo, esaminiamo se, scomponendo il 91 ne’ suoi fattori, come abbiamo fatto prima, conseguiamo nuovi elementi capaci di essere generalizzati con miglior successo”: p. 367):

$$1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 = 91 = 7\cdot 13$$

La possibilità suggerita è $(2m+1)(m+1)$, ma

> “senza farne la prova si vede che non può essere, giacché non può rappresentare il 55, che è espresso da $m(m+1)$” (p. 367).

Questa conclusione, proposta direttamente e “senza fare la prova”, appare basata sulla presenza, in entrambe le formule esaminate, di $(2m+1)$: il fatto che il secondo fattore in esse sia diverso (rispettivamente $m$ e $m+1$) rende impossibile che i due prodotti possano essere accettati “come formola generale” (e sarebbe interessante evidenziare il ruolo eventualmente attribuito all’unicità della scomposizione in fattori primi nell’argomentazione). Inoltre Bàrbera osserva che

> “nelle due precedenti formole, benché false, ci è un primo indizio che siamo per scoprire la vera; e questo indizio è il trovarsi un fattore comune in quelle due formole, che è $(2m+1)$” (p. 367).

Per proseguire la ricerca, l’Autore considera il nuovo caso particolare:

$$1+2^2+3^2+4^2 = 30 = 2\cdot 3\cdot 5$$

la cui scomposizione “si risolve in tre fattori”. Seguiamo la discussione originale:

> “Il 5 è, come innanzi, l’ultimo termine più uno, e quindi corrisponde ad $(m+1)$: il due è la metà dell’ultimo, e però $m/2$; e questo è un nuovo elemento che ne’ primi due tentativi non era apparso. Resta il 3: a qual termine corrisponde?” (pp. 367-368).

Bàrbera nota che questo fattore 3 può essere interpretato come “l’ultimo [termine] diminuito di uno”; ma

> "bisogna notare che questo fattore non l'abbiamo trovato componendo il 55 e il 91, onde non bisogna così di subito introdurlo nella nuova senza aver prima bene esaminato se per avventura non sia riducibile a quel fattore che è comune alle due prime. Nel caso presente, questo fattore comune dovrebbe essere 9, che è il doppio di 4, più uno" (p. 368).

Dunque l'Autore suggerisce di esprimere il fattore 3 come 9/3:

$$1+2^2+3^2+4^2 = 30 = 2\cdot(9/3)\cdot 5$$

e di porre "$m/2$ in vece di 2; $(2m+1)/3$ invece di 9/3; ed $(m+1)$ in luogo di 5" (p. 368). La formula generale sarebbe dunque:

$$1+\ldots+m^2 = (m/6)(2m+1)(m+1)$$

Una sua verifica richiede alcune prove, e "continuando a dare ad $m$ altri valori, e pigliando le somme corrispondenti delle serie dei quadrati, sarete fatti certi che la nuova formola soddisfa a tutti i casi particolari: essa dunque è veramente generale" (p. 368).

***Esempio C.*** Qual è la somma dei cubi dei primi $n$ interi positivi? (pp. 369-373).

*Prima risoluzione* (***C-1***). Questo esempio viene inizialmente affrontato secondo un procedimento simile a quello utilizzato per gli esempi precedenti. Bàrbera nota che:

$$1+2^3 = 9 = 3\cdot 3$$

e ciò può suggerire la "formola generale" $(m+1)^2$. Tuttavia è sufficiente un controllo del caso $1+2^3+3^3 = 36$ per escludere tale possibilità.

> "Che cosa bisogna fare, cominciar da capo? Ci esporremmo di nuovo al pericolo d'errare: vediamo piuttosto di modificar la prima formola in modo che rappresenti anche il 36" (p. 369).

Per fare ciò l'Autore nota che "$(m+1)^2$ rappresenta la somma dei cubi de' primi due termini, ma non quella di tre; dunque essa non è assolutamente falsa, ma incompleta" (pp. 369-370). Pertanto egli suppone che sia possibile integrarla mediante un fattore $x$ e pone:

$$1+\ldots+m^3 = 9 = (m+1)^2\cdot x$$

Per $m = 2$ si ottiene $x = 1$ e per $m = 3$ si ottiene $x = 9/4$. Dunque:

"La quantità $x$, come vedete, è variabile, e tale dev'essere per servire allo scopo per cui l'abbiamo introdotta. A quale de' termini della serie corrisponde?" (p. 370).

La risposta è: "all'ultimo elevato al quadrato, e diviso per 4" e dunque la conclusione è:

$$1+\ldots+m^3 = 9 = (m^2/4)(m+1)^2$$

Le verifiche per i casi $m = 4$, $m = 5$ e ("per non moltiplicare senza necessità gli esempii") $m = 10$ portano a concludere che "questa formola è veramente generale" (p. 371).

*Seconda risoluzione* (***C-2***). Bàrbera riprende l'esempio precedente per proporne una diversa impostazione che così presenta:

"Per trovare la formola generale noi faremo: 1° la somma de' cubi de' primi due numeri; poi di tre; indi di quattro, e così di seguito, poniamo, fino a nove. 2° Risolveremo queste somme nei loro fattori più semplici. 3° Disporremo questi fattori gli uni sotto gli altri in una colonna verticale, affinché col semplicemente guardarli si vegga se vi sia uniformità tra loro" (pp. 371-372).

A p. 372 si trova la tabella seguente:

| Serie de' cubi | | Somme | Fattori semplici |
|---|---|---|---|
| 1 | $+2^3 =$ | 9 = | 1 · 1 · 3 · 3 |
| 1. | $+3^3 =$ | 36 = | 2 · 2 · 3 · 3 |
| 1.. | $+4^3 =$ | 100 = | 2 · 2 · 5 · 5 |
| 1... | $+5^3 =$ | 225 = | 3 · 3 · 5 · 5 |
| 1..... | $+6^3 =$ | 441 = | 3 · 3 · 7 · 7 |
| 1....... | $+7^3 =$ | 784 = | 4 · 4 · 7 · 7 |
| 1........ | $+8^3 =$ | 1296 = | 4 · 4 · 9 · 9 |
| 1......... | $+9^3 =$ | 2025 = | 5 · 5 · 9 · 9 |

Questo è il commento di Bàrbera:

"Come potete convincervi col semplicemente guardar coll'occhio la terza colonna, i fattori semplici sono sempre quattro, ad eccezione di quelli che rappresentano la somma de' cubi de' primi due numeri. […] Dei quattro fattori di ciascuna somma, i primi due e gli ultimi due sono sempre uguali" (pp. 372-373).

L'Autore osserva quindi che quando il maggiore dei fattori è uguale all'ultimo termine della serie $1+\ldots+m^3$, dunque a $m$ (ciò accade per $m$ dispari), il minore è uguale a $(m+1)/2$; negli altri casi (dunque per $m$ pari) il maggiore dei fattori è $m+1$ ed il minore è $m/2$. In entrambi i casi, dunque, il prodotto dei quattro "fattori semplici" è $(m^2/4)(m+1)^2$ e ciò conferma la correttezza del risultato precedentemente trovato.

## Commento agli "esempi" considerati

Gli esempi proposti si rivelano interessanti, innanzitutto per l'uso che in essi viene fatto del termine "induzione". Bàrbera osserva:

> "Tra le diverse sentenze sul principio dell'induzione la più strana e la più remota dalla verità è senza dubbio quella di coloro che pretendono la induzione allora essere perfetta e certa quando i casi particolari da cui si origina la proposizione universale sono completamente enumerati; dimanieraché se la enumerazione de' particolari è incompleta la conclusione non è certa, ma solamente probabile" (p. 375).

Chiaramente questa osservazione fa riferimento ad una proposizione riguardante un numero finito di casi; e tale situazione appare piuttosto rara nell'ambito della matematica o delle "scienze sperimentali" fisiche e naturali alle quali Bàrbera esplicitamente si riferisce (segnaliamo ad esempio le pp. 382-383 e le lezioni XXVIII e seguenti, pp. 384-564). Tuttavia l'uso di esempi matematici (ovviamente riferiti ad un'infinità numerabile di casi) è significativo e merita un commento adeguato.

Per evitare possibili pericolosi malintesi, ribadiamo che i procedimenti proposti da Bàrbera *non* sono dimostrazioni per induzione. Anzi, più in generale, *non sono dimostrazioni*. Ciò non significa però che non siano didatticamente degni di nota: C. Marchini, esaminando alcune dimostrazioni tratte da libri di testo per la scuola secondaria, riscontra talvolta la presenza di "quel metodo induttivo, dal particolare al generale, tanto severamente bollato da Popper" (Marchini, 1992, p. 100; il riferimento è a: Popper, 1970). La stessa *generic visual proof* analizzata da D. Tall (e citata nell'introduzione del presente lavoro con riferimento a: Tall, 1995b) richiede che il caso particolare, espresso mediante una rappresentazione grafica, sia inteso in senso generale. Osserva Francesco Speranza (1932-1998):

“Siamo stati educati nell’ideale aristotelico-euclideo nel quale la matematica viene presentata secondo lo schema *enunciati-dimostrazioni*. Siamo arrivati a far coincidere con questo stile la *sostanza* della razionalità matematica (tant’è che finanche gli assiomi finiscono in sottofondo, fino a essere di fatto ignorati dagli studenti). […] In quanto alla pratica matematica, le dimostrazioni sono solo una parte del lavoro (anche per i matematici ‘puri’): essa è preceduta da una fase di intuizioni, di congetture, di tentativi che via via si perfezionano” (Speranza, 1992, p. 135).

Il *primo esempio* sopra considerato (A) è strutturato secondo lo schema seguente (dove faremo riferimento ad alcuni termini usati nell’Introduzione):

osservazione (*caso*): $1+2+3+4+5+6 = 21$

interpretazione dell’osservazione: $1+2+3+4+5+6 = 3\cdot 7 = (6/2)\cdot 7$
(*risultato*: in questo caso per trovare la somma dei primi $m$ interi positivi moltiplico la metà di $m$ per il successivo di $m$)
↓
generalizzazione (*regola*): $1+\ldots+m = (m/2)(m+1)$

verifica della formula in alcuni casi particolari

Tale esempio può essere interpretato come un’inferenza induttiva, se con il termine induzione indichiamo “il procedimento logico che consiste nell’inferire da osservazioni ed esperienze particolari i principi generali in esse impliciti” (Rizzi, in stampa).

È didatticamente interessante esaminare il procedimento indicato da Bàrbera per ottenere la generalizzazione: il risultato (21) ottenuto nel caso particolare ($m = 6$) viene inizialmente scomposto in fattori primi, $21 = 3\cdot 7$. Quindi i fattori individuati vengono collegati al valore di $m$ considerato mediante relazioni lineari.

Sarebbe difficile sostenere che si tratta di un procedimento generalizzabile: esso si basa su non poche assunzioni implicite, la cui validità potrebbe addirittura basarsi sulla conoscenza della formula da ricavare:

- innanzitutto, l’esistenza di una formula generale che fornisca la somma dei primi $m$ interi positivi (assunzione certamente plausibile, ma non del tutto banale!);
- il fatto che la scomposizione in fattori primi del risultato (in un caso particolare) sia significativa per ottenere tale formula;
- il fatto che tali fattori siano funzioni lineari di $m$…

Tuttavia ciò non impedisce di considerare significativo il procedimento di ricerca seguito da Bàrbera: le supposizioni precedenti danno la possibilità di trovare una formula e ciò (in termini euristici: resta aperto, come notato, il problema di un'eventuale dimostrazione) appare interessante.

Il *secondo esempio* considerato (B) si differenzia dal primo in quanto prevede la correzione, sulla base di osservazioni, di alcune formule:

osservazione: $1+2^2+3^2+4^2+5^2 = 55$ (*prima fase*)

interpretazione dell'osservazione:
$1+2^2+3^2+4^2+5^2 = 5\cdot 11 = 5\cdot(2\cdot 5+1)$

↓

(prima) generalizzazione:
$1+\ldots+m^2 = m(2m+1)$

confutazione della formula nel caso particolare $m = 6$:
$1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 = 91 \neq 6\cdot 13$

→

(*seconda fase*) osservazione: $1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 = 91$

interpretazione dell'osservazione:
$1+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2 = 7\cdot 13 = (6+1)(2\cdot 6+1)$

↓

(seconda) generalizzazione:
$1+\ldots+m^2 = (m+1)(2m+1)$

confutazione della formula sulla base di quanto ottenuto nel caso precedente ("senza fare la prova")

→

(*terza fase*) osservazione: $1+2^2+3^2+4^2 = 30$

interpretazione dell'osservazione:
$1+2^2+3^2+4^2 = 2\cdot 3\cdot 5 = (4/2)[(2\cdot 4+1)/3](4+1)$

↓

(terza) generalizzazione:
$1+\ldots+m^2 = (m/6)(2m+1)(m+1)$

verifica della formula in alcuni casi particolari

In questo caso è dunque interessante osservare la presenza di tre successivi tentativi di generalizzazione: la fase di verifica, nei primi due casi, non consente di ritenere accettabile la formula trovata.

Notiamo inoltre che la verifica compiuta nella prima fase è diversa da quella della seconda: mentre la prima verifica è condotta esaminando il caso particolare $m = 6$ (e proprio tale caso particolare sarà considerato per la fase successiva), la seconda avviene “senza fare la prova”, dunque confrontando direttamente le due formule trovate fino a quel momento.

Le considerazioni critiche sopra espresse con riferimento all’esempio A possono essere riproposte anche per questo esempio B. Aggiungiamo però un’osservazione: dopo le due prime fasi, l’Autore nota che nelle due formule esaminate (e confutate) “ci è un primo indizio che siamo per scoprire la vera”, cioè “il trovarsi un fattore comune in quelle due formole, che è $(2m+1)$” (p. 367). Non è però specificato il motivo per il quale la presenza del fattore comune $(2m+1)$ nelle due formule inizialmente esaminate sia da considerare significativa.

L’ultima osservazione può essere utile per introdurre il *terzo esempio* (C), in particolare la *risoluzione C-1*.

Bàrbera inizia con un procedimento simile ai precedenti:

$$\text{osservazione:}\quad 1+2^3 = 9$$

$$\text{interpretazione dell'osservazione:}\quad 1+2^3 = (2+1)^2$$

$$\downarrow$$

$$\text{(prima) generalizzazione:}\quad 1+\ldots+m^3 = (m+1)^2$$

$$\text{confutazione della formula nel caso particolare } m = 3\text{:}\quad 1+2^3+3^3 = 36 \neq (3+1)^2$$

A questo punto l’Autore suggerisce però una significativa variazione alla strategia applicata negli esempi precedenti. Egli suppone che la formula generale sia ottenibile correggendo opportunamente la prima espressione trovata, $(m+1)^2$, cioè moltiplicandola per un opportuno fattore variabile $x(m)$ (“che cosa bisogna fare, cominciar da capo? Ci esporremmo di nuovo al pericolo d’errare: vediamo piuttosto di modificar la prima formola”, p. 369). Tale supposizione, che peraltro non viene giustificata, porta dunque ad ammettere che la formula cercata sia del tipo:

$$1+\ldots+m^3 = (m+1)^2\cdot x$$

Quindi Bàrbera si dedica alla ricerca della quantità (variabile) $x$ in funzione di $m$ e ricava:

per $m = 2$ $\quad 1+2^3 = (2+1)^2x \quad x = 4/4 \quad x = 2^2/4$

per $m = 3$ $\quad 1+2^3+3^3 = (3+1)^2x \quad x = 9/4 \quad x = 3^2/4$

L'esame di questi due casi suggerisce la generalizzazione $x = m^2/4$ e dunque la formula generale:

$$1+\ldots+m^3 = (m+1)^2(m^2/4)$$

che potrà essere verificata per altri casi particolari ($m = 4$, $m = 5$, $m = 10$).

Il procedimento ora indicato richiede alcune riflessioni. Esso prevede la considerazione iniziale del caso $m = 2$ e può così sintetizzarsi:

osservazione: $1+2^3 = 9 \quad = (2+1)^2$ $\quad$ formula: $(m+1)^2\cdot x$

e la presenza del fattore $(m+1)^2$ rende agevole la corretta determinazione di $x(m)$ e dell'espressione finale, $(m+1)^2m^2/4$.

Se però fossimo partiti dal caso $m = 3$ avremmo potuto fare riferimento ad entrambe le interpretazioni seguenti:

osservazione: $1+2^3+3^3 = 36 \quad = (3+1)\cdot 3^2$ $\quad$ formula: $(m+1)m^2\cdot x$

osservazione: $1+2^3+3^3 = 36 \quad = (3-1)^2\cdot 3^2$ $\quad$ formula: $(m-1)^2m^2\cdot x$

Mentre nel primo caso la formula verrebbe a dipendere da potenze di $(m+1)$ e di $m$, e dunque la determinazione di $x(m)$ risulterebbe ancora abbastanza semplice, nel secondo le basi in gioco sarebbero $(m-1)$ e $m$ ed un'eventuale determinazione di $x(m)$ risulterebbe notevolmente più difficoltosa.

Pertanto una generalizzazione del procedimento utilizzato da Bàrbera può comportare qualche difficoltà pratica.

Del terzo esempio viene proposta anche l'alternativa *risoluzione C-2*. Essa si basa sulla scomposizione delle somme $1+\ldots+m^3$, per alcuni valori di $m$, in "fattori semplici" (si veda la tabella di p. 372, sopra riportata). Ma l'Autore non indica con precisione una definizione di tali "fattori semplici": al lettore viene lasciato il compito di intuirla sulla base della tabella fornita. Ma tale compito è agevolato dal fatto che la compilazione delle prime righe della tabella:

| | | | |
|---|---|---|---|
| per $m = 2$ | somma: 9 | "fattori semplici": | $1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 3$ |
| per $m = 3$ | somma: 36 | "fattori semplici": | $2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ |
| per $m = 4$ | somma: 100 | "fattori semplici": | $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| per $m = 5$ | somma: 225 | “fattori semplici”: | $3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$ |
| per $m = 6$ | somma: 441 | “fattori semplici”: | $3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7$ |

è suggerita dalla considerazione delle scomposizioni in fattori primi delle somme trovate. Per valori superiori di $m$ i “fattori semplici” non sono più primi, ma la regolarità osservata in questi primi casi consente di completare la tabella in termini efficaci.

**Riflessioni conclusive**

> “La battuta *Il professore ha passato un’ora cercando di convincerci di una cosa della quale nessuno di noi dubitava* è indicativa della confusione che si fa tra apprendere i contenuti e dimostrare le affermazioni: si rammenti che quelle che sarebbero state le prime dimostrazioni (attribuite a Talete) si riferiscono a proprietà ‘evidenti’, segno che già allora s’era capita la differenza fra *logica della ricerca* e *logica della dimostrazione*”.
>
> Francesco Speranza
> (Speranza, 1992, p. 136)

L’opera di Luigi Bàrbera deve essere storicamente considerata nel proprio contesto culturale e sociale; dichiaratamente gli scopi di *Lezioni di logica inventiva* sono filosofici e non matematici, collegati alla filosofia naturale. Pertanto un diretto raffronto dell’opera esaminata con le grandi impostazioni matematiche che, proprio dalla seconda metà del XIX secolo, tanta importanza hanno attribuito al principio di induzione completa sarebbe scarsamente significativo.

Una lettura in chiave didattica degli “esempi dall’aritmetica e dall’algebra” consente tuttavia di evidenziare un atteggiamento stimolante. Pur tenendo presente che i procedimenti descritti non costituiscono dimostrazioni delle formule in questione, pur notando che da essi non emerge un procedimento euristico del tutto sistematico e generalizzabile, gli esempi proposti possono però suggerire strategie, suscitare interesse, fornire l’occasione per molte osservazioni e per commenti; possono essere letti come un “protocollo” che suggerisce attività di problem solving e permette di interpretare possibili errori da parte degli studenti.

Più in generale, come abbiamo notato nell'introduzione, la dimostrazione è un elemento fondamentale della matematica e della sua storia, ma non esaurisce né l'attività del matematico né quella del didattico (Speranza, 1997). Scrive G. Israel, rifacendosi al pensiero di Federigo Enriques (1871-1946):

> "Per Enriques, il modo in cui i concetti scientifici vengono acquisiti sul piano psicologico è almeno altrettanto importante della loro verifica formale: infatti, la struttura dei concetti scientifici è determinata dalla via psicologica attraverso cui essi sono stati conseguiti. Pertanto l'analisi della genesi psicologica dei concetti e delle teorie scientifiche è l'aspetto centrale della teoria della conoscenza. Muovendosi temerariamente contro la corrente montante dell'assiomatica e del logicismo, Enriques si spingeva fino al punto di attribuire un ruolo subordinato alla logica nel processo della conoscenza" (Israel, 1992, p. XVI).[8]

Considerazioni come queste possono essere riprese in chiave storica e geografica: ricordiamo ad esempio che quando il gesuita Matteo Ricci (1552-1610) ed il suo discepolo Xu Guangqi introdussero (1607) gli *Elementi* euclidei in Cina (D'Amore, 1995, p. 330, in cui si cita: Barbin, 1988),[9] l'accoglienza riservata alla struttura logica dell'opera, incentrata sulle dimostrazioni, non fu entusiastica: il ruolo della dimostrazione in Cina era molto diverso da quello nella cultura occidentale e l'antica matematica cinese distingueva la modalità *bian* (che mirava a convincere) dalla modalità *xiao* (che mirava a far capire: Barbin 1988; sui risvolti didattici della questione si veda inoltre: Bagni, 1998).

Dunque il ruolo delle dimostrazioni, pur essendo assolutamente centrale (Hanna, 1997), si accompagna a molti altri aspetti, anche psicologici, dei quali la didattica non può non tener conto:

> "Prima ancora che la logica interna di una dimostrazione, gli studenti spesso non capiscono quale sia la differenza fra 'mostrare', 'verificare' e 'dimostrare', ma soprattutto *perché si debba dimostrare* […] Questo

---

[8] Giova riportare, a tale riguardo, un brano originale di Enriques: "Che dire di una visione puramente formale che rimane affatto indifferente al contenuto del sapere? […] Ben altro è l'insegnamento della storia. Abbiamo pur veduto il pensiero matematico svolgersi da problemi che sono posti alla nostra intuizione, inseguendo una verità che ci appare come qualcosa di dato, e che si chiarisce a poco a poco al nostro spirito anche attraverso l'errore. Dovremmo forse rigettare lontano da noi questa somma di sforzi per celebrare autori delle matematiche quei logici che ne traducono il frutto nel loro linguaggio?" (Enriques, 1938, pp. 141-142).

[9] Si noti però che forse una prima versione dell'opera euclidea era stata già introdotta in Cina nel XIII secolo tramite gli Arabi (Needham, 1985; sulla vita di Matteo Ricci si veda: Spence, 1987).

problema è chiaramente cruciale: lo studente che non capisce la finalità di dimostrare potrà anche impadronirsi brillantemente delle tecniche della dimostrazione, ma inevitabilmente le userà a sproposito” (Piochi, 1992, p. 117).

La possibilità di ripercorrere esempi come quelli sopra presentati consente di anteporre (consapevolmente, criticamente) alla dimostrazione una fase euristica che potrà condurre l’allievo ad una più corretta comprensione del ruolo indispensabile della dimostrazione stessa (Tall, 1995).

## Ringraziamenti

Un vivo ringraziamento al Prof. Guido Bàrbera che ha fornito spunti interessanti e notizie biografiche e bibliografiche su Luigi Bàrbera.

## Bibliografia

Bagni, G.T., 1998, Dimostrare e convincere, *Bollettino dei Docenti di Matematica*, 36, 53-60

Bàrbera, L., 1866, *Lezioni di logica inventiva*, Nistri, Pisa

Barbin E., 1988, *La dimostrazione matematica: significati epistemologici e questioni didattiche*, Quaderni di lavoro, 10, Istituto Filippin, Paderno del Grappa

Bell, J., Machover, M., 1977, *A course in Mathematical Logic*, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford

Brumfield, Ch., 1974, A note of mathematical induction, *Mathematics Teacher*, 67, 7, 616-618

Bruno Longo A.P., 1992, Dimostrare: ostacoli e valenze educative, Furinghetti, F. (a cura di), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti II Internucleo della Scuola secondaria superiore, Progetto strategico CNR, TID, 13, 1-17

D’Amore, B., 1995, Uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica, *La matematica e la sua didattica*, 3, 328-370

Eco, U., 1990, *I limiti dell’interpretazione*, Bompiani, Milano

Enriques, F., 1938, *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica: Zanichelli, Bologna 1982)

Ernest, P., 1984, Mathematical induction: a pedagogical discussion, *Educational Studies in Mathematics*, 15, 173-179

Ferrari, M., 1988, Uno strumento per definire e dimostrare: il Principio di induzione matematica, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 11, 12, 1169-1198

Fischbein, E., Engel, I., 1989, Difficoltà psicologiche nella comprensione del principio di induzione matematica, *La matematica e la sua didattica*, 2, 43-45

Hadamard, J., 1945, The Psychology of Invention in the Mathematical Field, Princeton University Press (Dover edition, New York 1954)

Hanna, G., 1997, Il valore permanente della dimostrazione, *La matematica e la sua didattica*, 3, 236-252

Israel, G., 1992, Federigo Enriques e il ruolo dell'intuizione, Enriques, F., Amaldi, U., *Elementi di geometria*, Studio Tesi, Pordenone

Marchini, C., 1992, Procedimenti dimostrativi presenti nei manuali scolastici, Furinghetti, F. (a cura di), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del secondo Internucleo della Scuola secondaria superiore, Progetto strategico del CNR: TID, Quaderno 13, 97-110

Needham, J., 1985, *Scienza e civiltà in Cina*, III, La Matematica e le scienze del cielo e della terra, I, Matematica e astronomia, Einaudi, Torino (edizione originale: *Science and civilisation in China*, Cambridge University Press 1959)

Peano, G., 1908, *Formulario Mathematico*, Editio V, Fratres Bocca Editores, Torino 1908 (riproduzione in fac-simile dell'edizione originale con introduzione di U. Cassina, Cremonese, Roma 1960)

Peirce, C.S., 1984, *Le leggi dell'ipotesi*, Bompiani, Milano (edizione originale: Deduction, Induction and Hypothesis, *Popular Science Monthly*, 1878, 470-482)

Piochi, B., 1992, Come motivare lo studente alla dimostrazione?, Furinghetti, F. (a cura di), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti II Internucleo della Scuola secondaria superiore, Progetto strategico CNR: TID, Quaderno 13, 117-124

Popper, K., 1970, *La logica della scoperta scientifica*, Torino, Einaudi

Rizzi, A., in stampa, Abduzione ed inferenza statistica, *Statistica e Società*

Spence, J., 1987, *Il palazzo della memoria di Matteo Ricci*, Il Saggiatore, Milano

Speranza, F., 1992, La geometria nelle scuole superiori: dimostrazioni o progetto di razionalità, Furinghetti, F. (a cura di), *Definire, argomentare e* *dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del secondo Internucleo della Scuola secondaria superiore, Progetto strategico del CNR: TID, Quaderno 13, 135-141

Speranza, F., 1997, *Scritti di Epistemologia della Matematica*, Pitagora, Bologna

Tall, D., 1995a, Mathematical growth in elementary and advanced mathematical thinking, Meira L. & Carraher, D. (Eds.), *Proceedings of PME 19*, Recife, Brazil, I, 61-75

Tall, D., 1995b, Cognitive development, representations and proof, *Justifying and Proving in School Mathematics*, Institute of Education, London, 27-38

Vacca, G., 1933, Induzione, voce *Enciclopedia Italiana*, XIX, pp. 181-182

**Giorgio T. Bagni**
**Marta Menghini**