

Storie di concetti matematici: contesti socio-culturali e riorganizzazioni del sapere

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine (Italia)

Sunto. Nel presente lavoro si considerano alcune questioni epistemologiche collegate alla presentazione storica di un concetto matematico, con particolare riferimento ai metodi infinitesimali. All'interno del quadro teorico dell'approccio socio-culturale (Radford, 1997 e 2003), viene sottolineata l'importanza degli elementi non matematici; in particolare, si propone un confronto tra il Calcolo europeo e alcune antiche esperienze non europee e si conclude che la presentazione didattica dei procedimenti infinitesimali mediante riferimenti storici richiede una corretta contestualizzazione socio-culturale e geografica.

Summary. In this paper we consider some epistemological issues related with the historical presentation of a mathematical concept, with particular reference to infinitesimal methods. According to theoretical framework of the socio-cultural approach (Radford, 1997 and 2003), we underline the importance of non-mathematical elements; in particular, we propose a comparison between the European Calculus and some ancient non-European experiences and conclude that the educational introduction of infinitesimal methods by historical references requires a correct socio-cultural and geographical contextualisation.

«Dal giorno in cui una statua è terminata, comincia, in un certo senso, la sua vita. È superata la prima fase, che, per opera dello scultore, l'ha condotta dal blocco alla forma umana; ora una seconda fase, nel corso dei secoli, attraverso un alternarsi di adorazione, di ammirazione, di amore, di spregio o di indifferenza, per gradi successivi di erosione e di usura, la condurrà poco a poco allo stato di minerale informe a cui l'aveva sottratta lo scultore».

Marguerite Yourcenar
(*Il Tempo, grande sculture*, 1985, p. 51)

1. La storia della matematica, una sfida culturale

Una crescente attenzione dedicata all'evoluzione storica caratterizza ampi settori della cultura contemporanea ed ha rilevanti conseguenze nel campo didattico: la considerazione di un concetto matematico attraverso la sua storia è una scelta metodologica diffusa, anche nella trasmissione del sapere matematico (Fauvel & van Maanen, 2000; alcune implicazioni sono esaminate in: Pepe, 1990 e Pizzamiglio, 2002) e richiede l'assunzione di posizioni epistemologiche impegnative (un'interessante selezione di lavori di F. Speranza, che si riconduce a F. Enriques, è in: Speranza, 1997; importanti riferimenti sono in: D'Amore, 2001).

Spesso, dunque, si parla della storia di un particolare oggetto matematico, della storia di un intero settore della disciplina per giungere alla storia della matematica o addirittura alla storia della scienza. Ma la complessità delle relazioni tra le componenti che determinano l'evoluzione storica è enorme e talvolta viene elusa con l'introduzione di semplificazioni nette e pesanti. L. Radford nota che il collegamento tra lo sviluppo concettuale nella storia e quello moderno richiede l'assunzione di posizioni epistemologiche (Radford, 1997, p. 26): per realizzare un tale collegamento sarà

necessario affrontare diversi aspetti: i problemi più pesanti sono quelli connessi all'interpretazione dei dati storici, spesso influenzata dai nostri attuali paradigmi culturali (Gadamer, 1975).

Le questioni ora presentate hanno radici filosofiche importanti: ad esempio, il noto dilemma tra *scoperta* e *invenzione* ha fatto discutere a lungo matematici, filosofi e storici della matematica (una sua sintetica presentazione è in: Casari, 1973, p. 14; un'ampia rassegna delle più significative posizioni filosofiche del secolo scorso è ad esempio in: Lolli, 2002). Già l'alternativa posta nei termini ricordati può essere considerata una semplificazione di un problema ben più ampio ed articolato; dal punto di vista storiografico, il dilemma è talvolta impostato (Giusti, 1999, p. 74; Grugnetti & Rogers, 2000) secondo una concezione che elude la rigorosa alternativa tra le due posizioni: infatti un nuovo concetto verrebbe inizialmente "incontrato" da un matematico in una fase operativa (Sfard, 1991), ad esempio nel corso della risoluzione di un problema o all'interno di una dimostrazione, per essere, più tardi, rielaborato e inquadrato teoricamente (Slavit, 1997), alla luce di nuove esigenze e dei mutati standard di rigore (Bagni, 2004-b).

Spesso è stata segnalata qualche possibile analogia tra evoluzione storica e sviluppo cognitivo (Frajese, 1950, p. 338; ben nota è la tesi espressa in: Piaget & Garcia, 1983; sulla questione si veda: Furinghetti & Radford, 2002). Notiamo però che l'accettazione di una simile struttura evolutiva può portare ad affrontare alcune questioni epistemologiche tutt'altro che banali: è infatti corretto concepire la storia della matematica come un percorso che, attraverso tentativi e rivisitazioni critiche, conduca finalmente alla sistemazione concettuale moderna? Un ruolo decisivo deve essere attribuito ai fattori culturali e sociali che hanno influenzato i singoli periodi storici (Radford, 1997 e 2003); come vedremo, tale considerazione richiede la considerazione di elementi di importanza decisiva anche dal punto di vista geografico (Joseph, 2000).

2. Data (o date) di nascita ed evoluzione (o evoluzioni)

Pur facendo nostre tutte le precauzioni espresse a proposito dell'alternativa tra *scoperta* ed *invenzione* ci sentiamo più vicini alla seconda scelta, e non solo dal punto di vista terminologico. Ma ciò non significa che una teoria matematica venga creata e progressivamente costruita secondo un percorso chiaro e lineare. In effetti, è sempre possibile individuare il momento preciso in cui un ente matematico viene "creato"? Probabilmente no. La "data di nascita" di un contenuto matematico (visto in termini di oggetto generale, dunque di definizione, di teorema, ovvero di procedimento standardizzato e riconosciuto dalla comunità scientifica) è forse intuibile a posteriori, quando gli utilizzatori giungono a identificare le sue caratteristiche in grado di far funzionare quel particolare contenuto in un complesso di interrelazioni con altri contenuti matematici, di fargli cioè assumere un ruolo chiaro all'interno dell'organizzazione generale della disciplina.

Questa fase di "creazione" di un contenuto matematico non può dunque limitarsi al superamento di un ostacolo epistemologico (il riferimento è alle ormai tradizionali classificazioni proposte in: Brousseau, 1983 e 1989, delle quali ovviamente ribadiamo l'importanza) e in molti casi risulta decisamente lunga e complicata: spesso, infatti, coinvolge una dimensione operativa (e come abbiamo sopra anticipato proprio questo aspetto porta alcuni Autori ad affermare che l'opposizione tra creazione e scoperta può considerarsi superata: Giusti, 1999); non possiamo inoltre dimenticare che la stessa organizzazione di contenuti alla quale il nuovo componente viene a fare riferimento subisce in generale un cambiamento rilevante causato dalla presenza del nuovo elemento; infine uno stesso contenuto può essere inserito in settori diversi della matematica, ciascuno di essi caratterizzato da una relativamente autonoma struttura di concetti e di procedimenti.

Ipotizzata comunque una "data di nascita", almeno rispetto ad una struttura, ad un'organizzazione di contenuti, il contenuto matematico in esame inizia una propria vita. Che non è comunque unica: altre vite potrebbero essere riferibili ad altre "date di nascita", ad altri settori della disciplina; e il contenuto, ad esempio la teoria (o le teorie) si evolve (si evolvono) grazie all'azione di matematici, di storici, di utilizzatori, di insegnanti, di studenti. La comunità matematica (intesa nel senso più ampio) lavora all'evoluzione della teoria e dunque *riorganizza* il sapere; ad esempio:

- il matematico aggiorna: dunque riorganizza per progredire teoricamente;
- lo storico ricostruisce l'originale: dunque riorganizza per contemplare;
- l'insegnante traspone: dunque riorganizza per far capire;
- lo studente apprende: dunque riorganizza per capire;
(ma l'elenco potrebbe essere notevolmente allungato: si pensi ad esempio ai ruoli del filosofo, del tecnico, dell'economista...).

Il termine *riorganizzazione* non deve trarre in inganno il lettore: si tratta di una fase spesso molto complessa, che non si esaurisce in una rilettura di precedenti conoscenze. Ognuno dei protagonisti citati reinterpreta creativamente, dunque "ricrea" il contenuto matematico con scopi diversi e con risultati, a volte, apparentemente in reciproco contrasto; spesso posizioni in precedenza accettate vengono superate e nuovi elementi (definizioni, teoremi) vengono introdotti. Ciascun operatore esprime la matematica con riferimento alle proprie esigenze e ai propri registri rappresentativi (Duval, 1995) e tutto ciò avviene in relazione ad una collocazione sociale (Radford, 2003), in stretta dipendenza dai contesti culturali, storici e geografici.

3. Le radici storiche dell'analisi matematica: le riorganizzazioni dell'infinitamente piccolo

Introdurremo ora un esempio che ci consentirà di evidenziare il ruolo primario delle ricordate riorganizzazioni nell'evoluzione di un importante settore del pensiero matematico: l'analisi matematica (per l'aspetto storico segnaliamo: Edwards, 1994; Hairer & Wanner, 1995; a proposito del concetto di infinito e delle ricadute didattiche: Arrigo & D'Amore, 1992; D'Amore, 1996).

Non proporremo una completa rassegna delle radici storiche dell'analisi; è inoltre necessario tener conto che ogni selezione dei dati storici da considerare significativi non è epistemologicamente neutra (Radford, 1997, p. 28). Spesso l'approccio ai dati originali è mediato da edizioni successive e da commenti, e ciò può rendere necessario valutare anche le concezioni dei curatori delle edizioni considerate: dunque anche tutte queste concezioni devono essere considerate nei rispettivi contesti storici (Barbin, 1994, p. 157).

Ci limiteremo, in questa prima fase, alla tradizione matematica occidentale (dal mondo greco alla tradizione moderna europea) e individueremo sei momenti successivi (Bagni, 2004-a e 2004-b), da una prima sensibilità al problema dell'infinitamente piccolo (Castelnuovo, 1938, p. 29) ai contributi della topologia e dell'analisi non-standard.

3.1. L'antica attenzione per l'infinitamente piccolo: Anassagora

- La riflessione sull'infinitamente piccolo può essere fatta risalire ad Anassagora di Clazomene (500?-428 a.C.; anche i paradossi di Zenone d'Elea, V secolo a.C., sono spesso citati nella preistoria del Calcolo infinitesimale: Enriques & de Santillana, 1936, p. 54; Enriques, 1938); il suo celebre frammento:

"Rispetto al piccolo non vi è un ultimo grado di piccolezza, ma vi è sempre un più piccolo, essendo impossibile che ciò che è, cessi di essere per divisione" (riportato in: Geymonat, 1970, p. 96).

è riferibile ad una successione (potenzialmente) infinitesima: viene infatti descritta una quantità che può essere indefinitamente ridotta senza mai annullarsi.

- Questa prima sensibilità non è però sufficiente per fissare una significativa "data di nascita", nel senso indicato nel paragrafo precedente: l'infinitamente piccolo non ha ancora assunto alcun ruolo all'interno della matematica o, più in generale, della cultura. Inoltre il frammento di Anassagora non può essere interpretato, alla luce di un'impostazione moderna, in analogia ai concetti dell'analisi matematica, ad esempio alla nozione di limite: l'infinitamente piccolo sarà ripreso molte volte prima di raggiungere l'organizzazione concettuale a noi nota (e anche questa nostra attuale sistemazione potrà essere, in futuro, rivista nuovamente).

3.2. Un procedimento geometrico: il metodo di esaustione

- Le dimostrazioni per esaustione sono spesso considerate importanti procedimenti infinitesimali e a volte presentate nella pratica didattica (si basano sulla proposizione I-10 degli *Elementi* euclidei; il metodo è tuttavia attribuito a Eudosso di Cnido, 405-355 a.C.; la denominazione fu introdotta nel XVII secolo da Gregorio di Saint-Vincent). Sarebbe ancora una volta forzato supporre la presenza di un limite (modernamente inteso) nel metodo di esaustione (Kline, 1972, p. 83): l'ideale distanza tra il metodo di esaustione e il limite non è solo da intendersi in senso formale; nel primo possiamo oggi individuare analogie con i procedimenti infinitesimali, ma tale lettura è nostra, basata sulle concezioni moderne (Bourbaki, 1963, p. 171): le istituzioni culturali del mondo greco ebbero un ruolo rilevante e la stessa argomentazione greca risentì del contesto sociale e politico (come dettagliatamente discusso in: Radford, 1997).
- Un'ulteriore occasione di riflessione storica e storiografica riguardante il metodo di esaustione e l'impostazione euclidea si collega alle proposizioni XII-1 e XII-2 degli *Elementi*, secondo le quali due poligoni simili inscritti in cerchi stanno l'uno all'altro come i quadrati dei rispettivi diametri (XII-1) e due cerchi stanno l'uno all'altro come i quadrati dei rispettivi diametri (XII-2). Venti secoli dopo la redazione degli *Elementi*, G. Saccheri (1667-1733), in *Euclides ab omni naevo vindicatus*, osservò che la XII-2 avrebbe potuto essere ricavata dalla XX-1 come corollario ("considerando i cerchi come poligoni infinitilateri": Saccheri, 1904, p. 104). Ma l'appunto di Saccheri deve essere collocato nel contesto culturale del XVII secolo, dopo che una radicale riorganizzazione ha profondamente inciso sullo status dei procedimenti infinitesimali. Mai i matematici greci utilizzarono l'infinito secondo l'idea di Saccheri: la dimostrazione euclidea della proposizione XII-2 è del tutto diversa (Frajese & Maccioni, 1970, p. 930).
- Il metodo di esaustione non può essere considerato alla stregua di uno strumento di ricerca in quanto i risultati da dimostrare con la *reductio ad absurdum* devono essere intuiti o ricavati euristicamente (si ricordino alcuni notissimi procedimenti archimedei), con tecniche che i Greci non accettavano come dimostrazioni. Nella mentalità eleatico-platonica la vera conoscenza di una proposizione non poteva essere ottenuta mediante i sensi: dunque il metodo di esaustione aveva il ruolo di conferire rigore alle dimostrazioni (Radford, 2003): da questo punto di vista l'organizzazione dell'infinitamente piccolo che emerge da Eudosso e da Euclide è legata a questioni matematico-filosofiche. Osservazioni come questa hanno indotto a considerare il metodo di esaustione pertinente all'"invenzione geometrica" (Bourbaki, 1963, p. 171) piuttosto che alle radici storiche del Calcolo infinitesimale.

3.3. Cavalieri e gli indivisibili

- Molti secoli più tardi, B. Cavalieri (1598?-1647), pur non conoscendo nel dettaglio alcuni metodi archimedei, propose un nuovo procedimento (spesso oggi impiegato in ambito didattico: Carruccio, 1972, p. 179) introdotto da una significativa denominazione (*indivisibili*), ma non diede un'esplicita definizione di indivisibile (Lombardo Radice, 1989): la sensibilità per l'infinitamente piccolo subì una radicale revisione che non fu condotta in una prospettiva filosofica, bensì con intenti che appaiono spesso direttamente legati alla pratica matematica. Cavalieri non nutriva alcuna simpatia per i metodi indiretti (Lombardo Radice, 1989, p. 256) e sosteneva che il suo procedimento era "una tecnica pragmatica per evitare il ricorso al metodo di esaustione" (Kline, 1972, p. 350).
- Esaminando l'ambiente matematico del tempo si nota che anche B. Pascal (1623-1662) e I. Barrow (1630-1677) espressero dubbi sull'utilità dell'antico metodo di esaustione (Bourbaki, 1963, p. 180; le posizioni critiche di P. de Fermat, 1601-1665, sono espresse in: Fermat, 1891-1922, I, p. 257). I matematici del XVII secolo, in una fase intensa e stimolante della storia della ricerca scientifica, esigevano il supporto di tecniche efficaci, più che formalmente eleganti o rigorose. Forse il metodo di Cavalieri non appariva del tutto "rigoroso" (Kline, 1972, p. 350);

certamente, però, il rigore deve essere esaminato nell'originale contesto storico e concettuale, evitando di imporre a tale contesto i nostri moderni standard (Grugnetti & Rogers, 2000, p. 50): sarebbe impensabile, da parte di studiosi del Seicento, il rifiuto di un procedimento sulla base di una debolezza fondazionale riconoscibile mediante un approccio moderno.

3.4. La nascita del Calcolo e le “quantità evanescenti” da Wallis a Lagrange

- La fase che portò, tra il XVII ed il XVIII secolo, alla nascita del Calcolo infinitesimale ed al suo sviluppo fu preceduta da alcuni interessanti tentativi (ad esempio J. Wallis, 1616-1703, suggerì un significativo concetto “aritmetico” di limite: Kline, 1972, p. 388). Le ricerche di I. Newton (1642-1727) e di G.W. Leibniz (1646-1716) dovrebbero essere ricondotte alle rispettive motivazioni primarie, che nel caso di Newton erano fisiche e nel caso di Leibniz algebriche e filosofiche. Comunque la posizione di Leibniz a proposito dell'infinitamente piccolo fu sempre piuttosto articolata: nel 1695 egli parlava di uno stato di “evanescenza” nel quale una quantità può essere considerata minore di ogni quantità considerata (Kline, 1972, p. 386); tuttavia tale intuizione, il cui sviluppo potrebbe portare alla concezione dell'infinitesimo attuale, non fu approfondita e sia Newton che Leibniz “si affidarono alla coerenza dei risultati del proprio metodo per spingersi avanti senza preoccuparsi del rigore” (Kline, 1972, p. 387). Anche C.B. Boyer segnala “incertezza a proposito dei concetti” (Boyer, 1985, p. 442) nell'impostazione di Leibniz: tali giudizi, tuttavia, dovrebbero essere riferiti più alla nostra moderna lettura delle posizioni leibniziane che alla loro complessa posizione storica (Enriques, 1938, p. 60).
- Nel XVII secolo L. Euler (1707-1783) nelle *Institutiones calculi differentialis* si occupò di quantità “evanescenti” (Euler, 1787, I, p. 62; Kline, 1972, p. 429), ma nella pratica matematica preferì non approfondire i problemi collegati all'infinitesimo attuale (Euler, 1796, pp. 84-91). Naturalmente le connessioni tra la matematica e il contesto socio-culturale possono essere decisive per comprendere la posizione euleriana (Crombie, 1995).
- Anche le concezioni di J.B. d'Alembert (1717-1783), sviluppate in periodo illuminista, meritano attenzione: egli rifiutava le affermazioni leibniziane ed euleriane sui differenziali e nel 1767 affermò che una quantità “è qualcosa o non lo è” e “supporre l'esistenza di uno stato intermedio è una chimera” (riportato in: Boyer, 1985, p. 493).
- G.L. Lagrange (1736-1813) nel 1797 (*Théorie des fonctions analytiques*: Lagrange, 1813) cercò di ricondurre i procedimenti infinitesimali all'algebra; il suo tentativo, liquidato da M. Kline (1972, p. 430) come una “follia”, deve essere però correttamente considerato e rivalutato: il grande matematico, nella speranza di superare la debolezza fondazionale del Calcolo, si basò su assunzioni non corrette; ma tale valutazione, ancora una volta, richiede le attuali concezioni epistemologiche e le nostre conoscenze matematiche.

3.5. Cauchy e Weierstrass

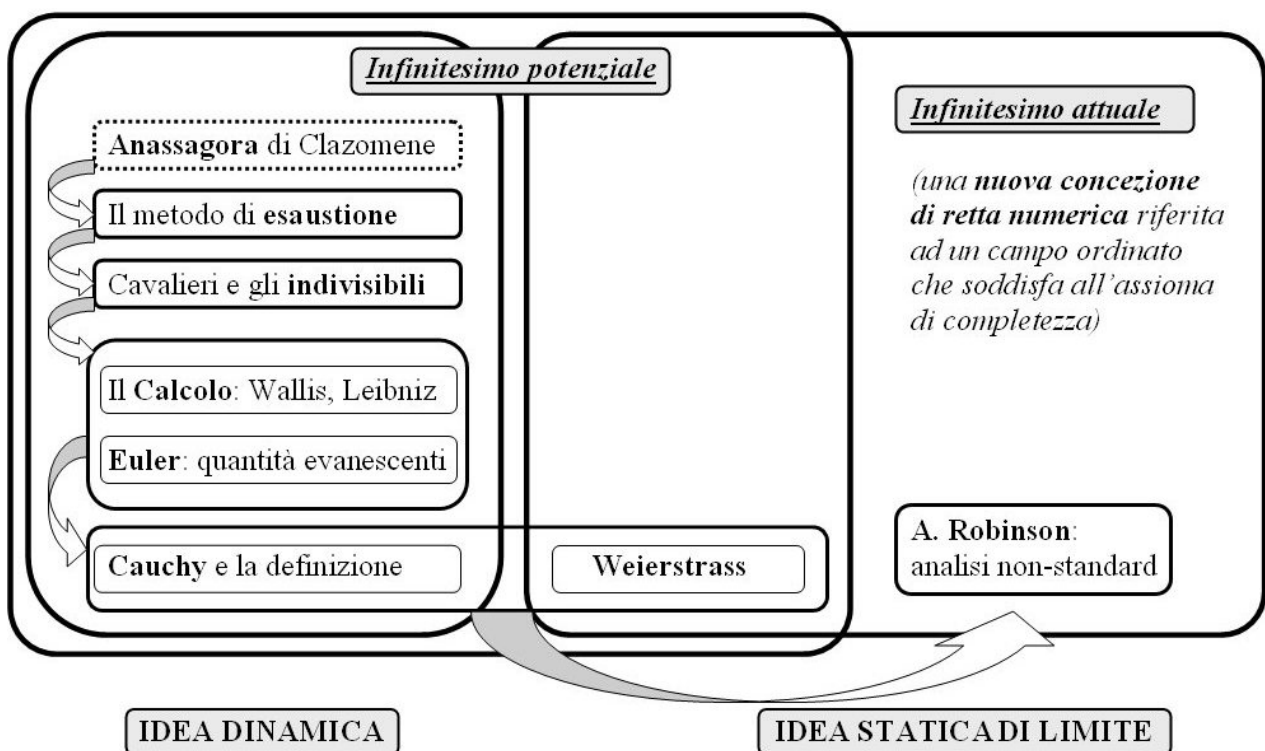
- I tempi sono maturi per giungere ad una precisazione dei concetti del Calcolo infinitesimale: A.L. Cauchy (1789-1857), nel *Cours d'Analyse algébrique* (1821), diede le definizioni di limite e di infinitesimo. Il limite secondo Cauchy è ancora collegato ad un procedimento dinamico, ma egli introdusse una prima distinzione tra *costanti* e *quantità variabili*, sebbene non disponesse di un'introduzione assiomatica dei numeri reali (la formulazione verbale proposta da Cauchy era espressa nel registro disponibile all'inizio del XIX secolo: la sua considerazione, oggi, potrebbe essere diversa e portare all'uso di altri registri rappresentativi: Tall, 1982).
- K.T.W. Weierstrass (1815-1897) diede la moderna definizione di limite e di funzione continua: egli affermò che la funzione $x \rightarrow f(x)$ è continua in $x = c$ se per ogni reale $\varepsilon > 0$ si può trovare un δ in modo che per ogni x tale che $|x - c| < \delta$ si abbia $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. I riferimenti ad un processo dinamico sembrano essere superati e Weierstrass contribuì, anche dal punto di vista formale, all'evoluzione dell'infinitesimo potenziale verso l'infinitesimo attuale. Per quanto riguarda i registri rappresentativi, la definizione di Weierstrass permette l'uso efficace del registro

simbolico (ricordiamo tuttavia che sarebbe fuorviante fare riferimento ad *un singolo* registro simbolico, in quanto esistono registri diversi nei diversi ambienti socio-culturali).

3.6. Gli sviluppi recenti: il contributo della topologia e l'infinitesimo attuale

- Neppure le definizioni di Cauchy e di Weierstrass esauriscono la storia dell'infinitamente piccolo. La matematica contemporanea ha risistemato i fondamenti dell'analisi inquadrando il concetto di limite in una visione topologica; inoltre l'analisi non-standard di A. Robinson ha completato il passaggio ad una concezione attuale dell'infinitesimo (Robinson, 1966).

Riassumiamo nella seguente figura le tappe ricordate di questa lunga evoluzione (riprendiamo parzialmente lo schema da: Bagni, in via di pubblicazione), non senza ricordare che anche tale schema deve essere considerato con prudenza (una concezione "dinamica" dell'infinitesimo potenziale negli indivisibili di Cavalieri, ad esempio, non è storicamente evidente, soprattutto se si considera la segnalata mancanza di una definizione di indivisibile).



Ad ogni freccia, dunque, corrisponde una riorganizzazione concettuale:

- | | |
|---|---|
| i. da una prima sensibilità per l'infinitamente piccolo al procedimento di esaustione | ➤ scelta (anche) metodologica che rende rigorosi i risultati ottenuti euristicamente |
| ii. dall'esaustione al metodo degli indivisibili | ➤ rifiuto della dimostrazione indiretta |
| iii. dagli indivisibili al Calcolo infinitesimale di Leibniz e di Euler | ➤ coerenza e possibilità applicative dei risultati ottenuti mediante il Calcolo |
| iv. dal Calcolo alle concezioni di limite di Cauchy e Weierstrass | ➤ passaggio dall'idea dinamica all'idea statica di limite |
| v. dall'analisi ottocentesca all'analisi non-standard di Robinson, con riferimento all'infinitesimo attuale | ➤ nuova concezione della retta numerica con riferimento ad un campo ordinato (assioma di completezza) |

Come osservato, tale scansione di fasi non è certamente l'unica mediante la quale presentare la storia dei concetti e dei procedimenti infinitesimali: essa corrisponde ad una nostra interpretazione. Inoltre, anche accettando di limitare lo studio alla tradizione matematica occidentale, gli esempi presentati non costituiscono una rassegna completa di riferimenti storici collegati alle varie organizzazioni concettuali che, nel tempo, sono state date all'infinitamente piccolo (ammesso che la pretesa di fornire una tale rassegna "completa" abbia qualche significato): molti autori potrebbero essere ancora esaminati (ad esempio Luca Valerio, 1552-1618). Appare comunque chiaro che il passaggio dal discreto al continuo è un complesso problema culturale (Bagni, 2004-a e 2004-b): il riferimento alla storia della matematica può essere importante per comprendere caratteristiche e difficoltà di tale delicata fase.

Completiamo la presente sezione con un'osservazione legata alla pratica didattica: è impossibile presentare alcuni episodi tratti dalla storia della matematica in termini assoluti e L. Radford (1997, p. 30) sottolinea che l'influenza delle nostre moderne concezioni del passato è inevitabile. Il ruolo dell'insegnante è essenziale (potremmo citare molti riferimenti; ci limitiamo a: Lladò & Boero, 1997; D'Amore, 2004; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2004): ma non per impersonare un mediatore che porti l'allievo a comprendere un sapere astratto ed univocamente storicizzato, bensì una guida dotata di solida consapevolezza storica ed epistemologica, in grado di ripercorrere e di motivare le continue riorganizzazioni del pensiero matematico, con riferimento ai diversi contesti culturali.

4. Le radici geografiche dell'analisi matematica: alcune esperienze orientali

Come premesso, la riportata rassegna di esempi riportata riguarda esclusivamente la tradizione matematica europea: il percorso che vede coinvolta la cultura scientifica occidentale che, fondata sull'eredità del mondo ellenico, trova la piena realizzazione in Europa a partire dal XVII secolo. Tuttavia alcuni contributi delle culture extraeuropee non dovrebbero essere trascurati: ad esempio, per quanto riguarda l'infinito alcune intuizioni indiane sono, come vedremo, assai interessanti (e potrebbero essere criticamente riprese anche nelle nostre aule scolastiche). Un'altra storia del Calcolo infinitesimale, forse, una tradizione trascurata o ritenuta per alcuni versi minore merita dunque l'attenzione dei ricercatori: e le possibilità di un'adeguata applicazione didattica appaiono meritevoli di considerazione.

Un primo esempio è significativo: è noto che, come cifra, lo zero era inizialmente associato al sistema di numerazione posizionale indiano (con ciò non dimentichiamo i contributi della matematica della Mesoamerica; si noti che anche in Cina il sistema numerico era posizionale, ma un simbolo per lo zero comparve solo nel XII secolo). I matematici indiani non si limitarono a considerare lo zero alla stregua di un semplice segnaposto per indicare posizioni vuote nella scrittura di un numero in notazione posizionale. Infatti in Brahmagupta (VII-VIII secolo), in Mahavira (IX secolo) ed in Bhaskara (1114-1185) troviamo alcune regole di calcolo con lo zero:

$$a+0 = a$$

$$a-0 = a$$

$$a \cdot 0 = 0$$

Per quanto riguarda un'eventuale divisione per 0, Bhaskara (secondo alcuni studiosi riprendendo Brahmagupta) notò che se esistesse una "frazione" come $1/0$, essa avrebbe una stranissima peculiarità, che descriviamo con le parole dello storico G. Loria:

"[Una tale frazione avrebbe la] proprietà di non mutare per l'aggiunta o la diminuzione di un numero qualsivoglia [...] ond'è lecito asserire che con Brahmagupta facciamo il loro ingresso nell'Aritmetica razionale i numeri 0 e ∞ " (Loria, 1929-1933, p. 176).

Ancora una volta il contesto culturale appare significativo: l'argomentazione di Bhaskara è condotta con esplicito riferimento a questioni religiose. M. Kline nota infatti:

“Bhaskara, parlando di una frazione il cui denominatore è uguale a 0, dice che questa frazione rimane la stessa qualunque cosa le si aggiunga o le si sottragga, proprio come nessun mutamento ha luogo nella Divinità immutabile quando vengono creati o distrutti dei mondi. Un numero diviso per zero, aggiunge, viene chiamato una quantità infinita” (Kline, 1991, I, p. 216).

Possiamo concludere che una chiara sensibilità per l'infinito è presente presso i matematici indiani, seppure in un contesto particolare (e l'esempio citato può essere utilmente considerato anche in ambito didattico: si veda il capitolo X di: Bagni, 2000).

Di sicura importanza è inoltre il contributo dell'astronomia indiana che ha portato ad elaborare alcuni procedimenti riconducibili all'analisi matematica (per un confronto con l'astronomia cinese si veda: Needham, 1959): ad esempio, la considerazione del moto reale istantaneo della Luna per determinare i momenti esatti in cui si verificano le eclissi indusse Aryabhata (nato nel 476), Brahmagupta e più ancora Manjula (operante intorno al 930 d.C.) a considerare alcune quantità dal punto di vista differenziale.

Circa un secolo dopo Manjula, Bhaskara utilizzò la formula che scriveremmo modernamente:

$$d(\sin x) = \cos x \, dx$$

e nel proprio *Siddhanta Siromani* egli si mostrò consapevole che quando una variabile raggiunge il valore massimo il suo differenziale si annulla. Alcune annotazioni del matematico indiano possono dunque essere interpretate in chiara analogia con il celebre risultato analitico che sarà denominato teorema di Rolle (risalente al 1691) nella tradizione matematica europea (Joseph, 2000, pp. 294-295). Oltre tre secoli dopo Bhaskara, Nilakantha (XV-XVI secolo) e Acyuta Pisarati (1550-1621) ricavarono espressioni per differenziare le funzioni arcoseno e il rapporto di due coseni.

Restando nell'ambito delle culture orientali, a parte la matematica indiana, troviamo esperienze riconducibili all'analisi nella matematica giapponese: nel XVII secolo, Seki Kowa sviluppò il calcolo che venne chiamato *yenri* e che fu applicato a questioni di ciclotomia (Mikami, 1974). Una menzione meritano infine gli sviluppi in serie infinite presenti in opere matematiche cinesi tra il XVII ed il XVIII secolo, ad esempio di Mei Wending e di suo nipote Mei Juecheng (1681-1763) (Martzloff, 1997, p. 353).

5. Analisi matematica europea ed esperienze orientali: un confronto di contenuti e di contesti culturali

Le precedenti considerazioni ci consentono di concludere che nell'ambito della matematica orientale si è sviluppato un calcolo infinitesimale propriamente detto, paragonabile all'analoga esperienza occidentale? Una tale affermazione, almeno sulla base delle conoscenze attualmente disponibili, non sarebbe del tutto sostenibile (Bagni, 2004-c). Gli elementi decisivi che inducono a tale valutazione possono essere così riassunti:

- il concetto di differenziazione, presente in India, come abbiamo potuto constatare, sin dai tempi di Manjula (X secolo), realizzò collegamenti significativi soltanto con settori limitati della scienza, quali l'astronomia e la misurazione (Joseph, 2000, p. 296);
- nella tradizione europea, invece, la differenziazione trovò applicazioni importanti e feconde in molti campi della matematica, della fisica e delle scienze, nonché connessioni profonde e significative con la speculazione filosofica. Concetti e procedimenti del Calcolo infinitesimale riuscirono dunque a radicarsi efficacemente in un ampio contesto culturale.

Un elemento degno di nota riguarda inoltre la simbologia: nella tradizione orientale non troviamo un sistema di simboli specifici utilizzato diffusamente per esprimere i concetti ed i procedimenti analitici; nelle traduzioni di opere occidentali riguardanti il calcolo differenziale e integrale (a partire dalla metà del XIX secolo), i matematici cinesi crearono degli ideogrammi speciali per

abbreviare le espressioni linguistiche che sarebbero state utilizzate per descrivere l'integrazione e la differenziazione: riferendoci alla classica scansione di Nesselmann (1842) per la notazione algebrica, potremmo dunque pensare ad una tarda forma di sincopazione che consentì il superamento di una fase retorica. Ad esempio (Martzloff, 1997, p. 119), la scrittura:

$$\int 3x^2 dx = x^3$$

sarebbe stata espressa nella forma:

$$\text{禾} \text{三天} \text{ } \text{彳} \text{天} = \text{天} \text{ } \text{三}$$

dove il primo ed il quinto ideogramma sono semplificazioni degli ideogrammi che indicano rispettivamente “somma” e “piccolo”.

Nella tradizione europea, invece, già nel XVII secolo vennero sviluppati due sistemi simbolici specifici per il Calcolo infinitesimale: quello di Leibniz e quello di Newton (l'uso di tali sistemi quali identificò a lungo l'appartenenza a due diverse scuole matematiche); dopo oltre tre secoli entrambi i sistemi simbolici, pure con le modifiche resesi necessarie, sono ancora utilizzati dai matematici e dai fisici. Si osservi che il simbolismo occidentale è stato adottato dai matematici cinesi a partire dal 1920 (unitamente con la convenzione di disporre i simboli orizzontalmente e non verticalmente).

Proprio le numerose riorganizzazioni del sapere che hanno caratterizzato la storia dell'analisi matematica europea sono sintomi di vivacità e di fecondità: da questo punto di vista, chiaramente, la storia occidentale dell'analisi matematica deve essere considerata più vitale ed incisiva rispetto alle esperienze extra-europee: un'analisi dei ben diversi contesti socio-culturali, soprattutto con riferimento alle tradizioni cinese ed occidentale, porta J. Needham ad affermare che l'elemento che portò alla nascita della scienza moderna in Europa fu la presenza di una cultura mercantile, contrapposta alla civiltà agrario-burocratica orientale (si veda la discussione presente in: Needham, 1959, pp. 150-168).

Non pretendiamo di esaurire in poche battute l'argomento (lo stesso Needham, 1959, p. 167, ricorda che “il problema dei rapporti esatti fra scienza e tecnologia moderne da un lato e circostanze socioeconomiche che ne condizionarono la nascita dall'altro costituisce forse il grande dibattito della storia della scienza”). Sarebbe tuttavia errato e storicamente discutibile ignorare i molti contributi orientali (segnatamente indiani) ad uno dei settori più importanti della matematica mondiale.

Quanto sopra proposto ci consente quindi di formulare una riflessione generale (Grugnetti & Rogers, 2000, p. 50; Bagni, 2004-c): l'evoluzione storica non deve essere considerata, e proposta didatticamente, mirando alla proclamazione di una pretesa universalità della matematica. Al contrario, la storia ci presenta delle significative diversità: un nuovo concetto o un nuovo approccio teorico si sono sviluppati (in alcuni casi rapidamente, in altre situazioni in termini meno vivaci) in particolari momenti storici ed in particolari aree geografiche, sulla base di esigenze e di standard di rigore ben diversi. J.-L. Chabert (1999, p. 7, la trad. è nostra) nota che “un metodo algoritmico riscuote un buon successo quando le tecniche impiegate corrispondono alle necessità del tempo”, dunque sottolinea la necessità di collegare la diversa matematica sviluppata e trasmessa ai diversi contesti socio-culturali.

Tutto ciò porta ad una chiara rivalutazione dell'aspetto multiculturale della matematica e della sua storia, e può avere ripercussioni didattiche molto importanti: gli approcci alla matematica caratteristici delle diverse culture potrebbero infatti non limitarsi ad una (pur fondamentale) coesistenza di impostazioni diverse e a volte complementari, ma potrebbero portare ad un'efficace interazione, in una prospettiva interculturale particolarmente utile e feconda (si veda ad esempio: Ascher, 1991; Zaslavsky, 1996; Cipollari & Portera, 2004).

6. Ancora uno spunto per una riflessione...

Abbiamo evidenziato che la storia di un concetto matematico non può essere concepita (e presentata ai nostri allievi) in termini di rigorosa sequenzialità, né facendo riferimento ad una sola tradizione culturale. Più che della storia di un concetto matematico dovremmo quindi parlare di una sua vita ricca e complessa, in cui si fondono molte storie. Non possiamo dunque non chiudere la nostra riflessione con un interrogativo: questa vita di un contenuto matematico (di un concetto, di un procedimento, di una teoria) termina?

In omaggio all'antica massima fisica secondo la quale nulla si crea e nulla si distrugge, dovremmo rispondere negativamente: se scegliessimo di intendere la matematica in termini di espressione dell'umana intelligenza, la sua presenza sarebbe legata alla stessa presenza dell'uomo, dunque di un essere pensante, dotato di capacità creative e razionali. Da ciò seguirebbe che un particolare contenuto matematico non muore perché, forse, non è propriamente mai nato: un concetto potrebbe essere interpretato come una proiezione della mente umana (collettivamente intesa), in una particolare situazione culturale costituita da esigenze, da vincoli, da relazioni sociali, da affetti.

Non cercheremo, tuttavia, di analizzare ulteriormente la questione. Ad altri pensatori lasciamo il compito di immaginare, ad esempio, la sorte della matematica in un universo in assenza dell'uomo, in un sistema che esprimerebbe probabilmente altre forme di razionalità.

E, forse, un'altra affascinante matematica.

Ringraziamenti

L'Autore desidera ringraziare vivamente la Prof. Evi Azzali dell'Università di Udine per i preziosi stimoli e per le utilissime osservazioni su di una prima versione di questo articolo. Un sincero ringraziamento va anche ai membri del Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Udine, diretto dal Prof. Maurizio Trombetta, da tempo impegnati in una ricerca didattica sperimentale che riflette assai efficacemente alcune posizioni teoriche espresse nel presente lavoro.

Riferimenti bibliografici

- Arrigo, G. & D'Amore, B. (1992), *Infiniti*, Angeli, Milano.
- Ascher, M. (1991), *Ethnomathematics. A Multicultural View of Mathematical Ideas*, Brooks/Cole Publishing Company. Pacific Grove, California.
- Bagni, G.T. (2000), *Matematici*, Antilia, Treviso.
- Bagni, G.T. (2004-a), Exhaustion argument and limit concept in the History of Mathematics: educational reflections, Furinghetti, F. Kaiser, S. & Vretblad, A. (Eds.), *Proceedings of HPM-2004, History and Pedagogy of Mathematics, Uppsala July 12-17, 2004*, 94-103.
- Bagni G.T. (2004-b), Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche, *La matematica e la sua didattica*, 3, 51-70.
- Bagni, G.T. (2004-c), "...ma la perdita sarebbe stata maggiore del guadagno", *Bollettino dei Docenti di Matematica*, 48, 29-40.
- Bagni, G.T. (in via di pubblicazione), Historical roots of limit notion. Development of its representative registers and cognitive development, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*.
- Barbin, E. (1994), Sur la conception des savoirs géométriques dans les *Éléments* de géométrie, Gagatsis, A. (Ed.), *Histoire et enseignement des mathématiques, Cahiers de didactique des Mathématiques*, 14-15, 135-158.
- Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano (*Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris, 1960).
- Boyer, C.B. (1985), *A History of Mathematics*, University Press, Princeton (1968).
- Brousseau, G. (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques, *Reserches en Didactique des Mathématiques*, 4, 2, 165-198.

- Brousseau, G. (1989), Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques, Bednarz, N. & Garnier, C. (Eds.), *Constructions des savoirs, obstacles et conflits*, Agence d'Arc, Montreal, 41-64.
- Carruccio, E. (1972), *Matematiche elementari*, Pitagora, Bologna.
- Castelnuovo, G. (1938), *Le origini del calcolo infinitesimale*, Zanichelli, Bologna.
- Chabert, J.-L. (a cura di) (1998), *A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg (*Histoire d'algorithmes. Du caillou à la puce*, Éditions Belin, Paris 1994).
- Cipollari, G. & Portera, A. (2004), *Cultura, culture, intercultura*, IRRE Marche, Ancona.
- Crombie, A.C. (1995), Commitments and styles of European scientific thinking, *History of Sciences* 33, 225-238.
- D'Amore, B. (1996), L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi, *La matematica e la sua didattica*, 3, 1996, 322-335.
- D'Amore B. (2001), *Scritti di Epistemologia Matematica. 1980–2001*, Bologna, Pitagora.
- D'Amore B. (2004), Il ruolo dell'Epistemologia nella formazione degli insegnanti di Matematica nella scuola secondaria. *La matematica e la sua didattica*, 4, 4-30.
- D'Amore B. & Fandiño Pinilla M.I. (2004), Cambi di convinzioni in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale, *La matematica e la sua didattica*, 3, 27-50.
- Duval, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Lang, Paris.
- Edwards, C.H. Jr. (1994), *The Historical Development of the Calculus*, Springer, Berlin.
- Enriques, F. (1938) *Le matematiche nella storia e nella cultura*, Zanichelli, Bologna.
- Enriques F. & de Santillana, G. (1936), *Compendio di storia del pensiero scientifico*, Zanichelli, Bologna (ristampa anastatica: Zanichelli, Bologna 1973).
- Euler, L. (1755-1787), *Institutiones calculi differentialis cum eius usu in Analysisi Finitorum ac Doctrina Serierum*, Galeati, Pavia.
- Euler, L. (1796), *Introduction a l'analyse infinitésimale*, Barrois, Paris (prima edizione francese).
- Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.) (2000), *History in mathematics education*, Dordrecht, Kluwer.
- Fermat, P. de (1891-1922), *Œuvres*, I-V, Gauthier-Villars, Paris.
- Frajese, A. (1950), Storia della matematica ed insegnamento medio, *Bollettino UMI*, III, 337-342.
- Frajese, A. & Maccioni L. (Eds.) (1970), *Gli Elementi di Euclide*, UTET, Torino.
- Furinghetti, F. & Radford, L. (2002), Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice, English, L. (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 631-654, Erlbaum, New Jersey.
- Gadamer, H.-G. (1975), *Truth and method*, Crossroad, New York (II ed.: 1989).
- Geymonat, L. (1970), *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, Milano.
- Giusti, E. (1999), *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Bollati Boringhieri, Torino.
- Grugnetti, L. & Rogers, L. (2000), Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues, Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.) (2000), 39-62.
- Hairer, E. & Wanner, G. (1996), *Analysis by its history*, Springer-Verlag, New York.
- Joseph, G.G. (2000), *C'era una volta un numero. La vera storia della Matematica*, Il Saggiatore, Milano (*The crest of the peacock. Non-European roots of mathematics*, 1991).
- Kline, M. (1972), *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York.
- Lagrange, J.L. (1813), *Théorie des fonctions analytiques*, Courcier, Paris.
- Lladò, C. & Boero, P. (1997), Les interactions sociales dans la classe et le role mediateur de l'enseignant, *Actes de la CIEAEM-49*, Setubal 171-179.
- Lolli, G. (2002), *Filosofia della matematica. Eredità del Novecento*, Il Mulino, Bologna.
- Lombardo Radice, L. (1989), *Geometria degli indivisibili di Cavalieri*, UTET, Torino.
- Loria, G. (1929-1933), *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino.
- Martzloff, J.-C.: 1997, *History of Chinese mathematics*. Springer Verlag, Berlin-Heidelberg (*Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, Paris).
- Mikami, Y. (1974), *The Development of Mathematics in China and Japan*, 2nd edition, Chelsea Publ., New York (original ed.: Leipzig, 1913).
- Needham, J. (1959), *Science and civilisation in China*, Cambridge University Press (Einaudi, Torino, 1985, volume 3*).

- Nesselmann, G.H.F. (1842), *Versuch einer kritischen Geschichte den Algebra, Nach den Quellen bearbeitet*, Reimer, Berlin.
- Pepe, L. (1990), Storia e didattica della matematica, *L'educazione matematica*, III, I-2, 23-33.
- Piaget, J. & Garcia, R. (1983), *Psychogenèse et histoire des sciences*, Flammarion, Paris.
- Pizzamiglio, P. (2002), *Matematica e storia. Per una didattica interdisciplinare*, La Scuola, Brescia.
- Radford, L. (1997), On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: towards a socio-cultural history of mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33.
- Radford, L. (2003), On culture and mind, Anderson, M. & Al. (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*, 49-79, Legas, Ottawa.
- Radford, L., Boero, P. & Vasco, C. (2000), Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics, Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.) (2000), 162-167.
- Robinson, A. (1966), *Non-standard analysis*, North-Holland, London.
- Saccheri G. (1904), *Euclides ab omni naevo vindicatus*, Boccardini (Ed.), Hoepli, Milano.
- Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Slavit, D. (1997), An alternate route to reification of function, *Educational Studies in Mathematics* 33, 259-281.
- Speranza, F. (1997), *Scritti di epistemologia della matematica*, Pitagora, Bologna.
- Tall, D. (1982), Elementary axioms and pictures for infinitesimal Calculus, *Bulletin of the IMA*, 14, 43-48.
- Yourcenar, M. (1985), *Il Tempo, grande scultore*, Einaudi, Torino (*Le Temps, ce grand sculpteur*, Gallimard, Paris 1983).
- Zaslavsky, C. (1996), *The multicultural math classroom: bringing in the world*, Heinemann Portsmouth, NH.

Giorgio T. Bagni
 Department of Mathematics and Computer Science
 University of Udine
 Via delle Scienze 206
 I-33100 Udine, Italy
bagni@dimi.uniud.it