Il Volterriano, 8, 11–18 (2000)

I fondamenti dell'Aritmetica: percorsi di ricerca per il XXI secolo

GIORGIO T. BAGNI
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
UNIVERSITÀ DI ROMA "LA SAPIENZA"

Abstract. In this paper we propose a brief summary of the development of researches in Arithmetics and in Logics in XX century and present some important themes connected to the study of Mathematics' fundamental research.

Una necessaria introduzione: i grandi temi della riflessione logica nel XX secolo

Per poter presentare, seppure sommariamente, alcune caratteristiche dello stato attuale della ricerca in Matematica ed in Logica è indispensabile riassumere lo sviluppo della riflessione sui fondamenti della Matematica in un periodo particolarmente vivo, ricco di nuove idee e di risultati (molti sono i testi disponibili; indichiamo ad esempio: Kneale & Kneale, 1972; Mangione, 1972 e 1976; Casari, 1979; Bottazzini, 1990).

Tra le più significative scuole di Filosofia della Matematica sviluppatesi tra il XIX ed il XX secolo, il *formalismo* ebbe per esponente principale David Hilbert (1862-1943). In base all'impostazione formalista, ogni teoria matematica deve essere fondata su di un insieme di assiomi, da cui dedurre rigorosamente i risultati (Cipolla, 1923-1924; Hilbert & Ackermann, 1928; Herbrand, 1930; Cassina, 1937; Hilbert, 1979; Moriconi, 1987). Chiaramente la scelta di un tale sistema di assiomi viene ad essere un'operazione notevolmente delicata, in quanto il sistema deve possedere alcuni requisiti; citiamo lo stesso Hilbert:

> "Perché la teoria di un campo conoscitivo (cioè l'intelaiatura di concetti che la esprime) possa servire al suo scopo (cioè ad orientare e ad ordinare), devono essere soddisfatti principalmente due requisiti: si deve offrire *in primo luogo* un quadro complessivo sulla *dipendenza* (risp., *indipendenza*) dei teoremi della teoria, e *in secondo luogo* una garanzia della *non-contraddittorietà* di tutti i teoremi della teoria. In particolare, sotto questi due punti di vista vanno esaminati gli assiomi di ciascuna teoria" (traduzione in: Bottazzini; Freguglia & Toti Rigatelli, 1992, p. 452).

Tra le cause del fallimento del programma formalista hilbertiano (ovvero del formalismo *in senso stretto*) un ruolo primario va riconosciuto ai risultati che riportiamo nelle parole di Kurt Gödel (1872-1970), tratte dagli *Atti del II Convegno di epistemologia delle scienze esatte* (Königsberg, 1931):

> “Un sistema formale si dice completo se ogni proposizione esprimibile con i suoi simboli è formalmente decidibile a partire dagli assiomi, vale a dire se per ogni proposizione *A* di quel tipo esiste una catena deduttiva finita che si sviluppa secondo le regole del calcolo logico, la quale comincia con certi assiomi e finisce con la proposizione *A* o con la proposizione non-*A*. Un sistema *S* si dice completo rispetto a una certa classe *K* di proposizioni se per lo meno tutte le proposizioni di *K* sono decidibili a partire dagli assiomi di *S* (...).
> Non esiste alcun sistema con un numero finito di assiomi che sia completo anche soltanto rispetto alle proposizioni aritmetiche (…). Persino in quei sistemi che hanno un numero infinito di assiomi esistono sempre proposizioni aritmetiche indecidibili, purché la «regola che determina gli assiomi» soddisfi a certe condizioni (molto generali). Per quanto concerne i risultati circa le dimostrazioni di non contraddittorietà, (...) per tutti quei sistemi formali per i quali è stata sopra affermata l'esistenza di proposizioni aritmetiche indecidibili, vale che l'affermazione della non contraddittorietà di uno di quei sistemi appartiene sempre alle proposizioni indecidibili di quel sistema” (traduzione in: Casari, 1973, pp. 55-57; Gödel, 1979; sull'opera di Gödel si veda anche: Nagel & Newman, 1961).

Non vogliamo qui affermare un’assoluta caduta di interesse per la grande opera logica di Hilbert, che si mantenne di primaria importanza (Carugo, 1961): l'originale impostazione hilbertiana fu ripresa e migliorata nel XX secolo, spesso con risultati pregevoli: una versione più moderna del formalismo fu sviluppata da Rudolf Carnap (1891-1971) (Carnap, 1961).

Altre scuole di pensiero del XX secolo meritano una citazione: il *logicismo* è spesso ricondotto all'opera di Bertrand Russell (1872-1970), sebbene talvolta gli storici indichino il logicismo accomunando i nomi di Leibniz, di Frege e di Russell (Bochenski, 1972); il programma logicista può essere sintetizzato nel tentativo di ricondurre l'intera Matematica alla Logica. La presenza delle antinomie mise in seria difficoltà questo progetto, ma i tentativi di eludere la formazione delle antinomie portarono a teorie interessanti e profonde (ricordiamo le teorie dei tipi semplici e ramificati): nessuna di queste, tuttavia, riuscì a risolvere in modo esauriente il problema (Lolli, 1985). Per quanto riguarda l'*intuizionismo*, il principale esponente fu Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966; segnaliamo: Glivenko, 1929; Kolmogorov, 1932 e 1979; Bernays, 1935; Heyting, 1956 e 1979; Casari, 1973, pp. 15-16).

Una questione centrale: l’incompletezza dell’Aritmetica di Peano

L'impostazione formalistica portava dunque i matematici, all’inizio del XX secolo, a cercare le fondazioni assiomatiche delle teorie; ma tale ricerca si scontrò con i risultati della Logica (ci riferiamo principalmente all'assiomatica per l’Aritmetica: Bagni, 2000). A partire dal 1900, nel corso del II Congresso Internazionale di Parigi, Hilbert indicò alla comunità scientifica un primo gruppo di dieci problemi (i “problemi di Hilbert” saranno, in totale, 23) all’epoca irrisolti; egli propose di *dimostrare che gli usuali metodi matematici non presentano contraddizioni nel loro complesso*: sarebbe stato necessario provare ciò con procedimenti finitari, formando così una parte dell’Aritmetica (Hajek & Pudlak, 1993); i citati risultati di incompletezza di Gödel hanno pertanto mostrato che il programma hilbertiano, nella sua formulazione originale, era impraticabile.

La ricerca logica del XX secolo ha ripreso ed approfondito le questioni fondazionali sopra accennate. In particolare, indichiamo con N l'insieme dei numeri naturali con la struttura aritmetica usuale:

- l'operazione unaria di successore
- l'operazione binaria di addizione
- l'operazione binaria di moltiplicazione
- la relazione binaria di ordine lineare
- il minimo elemento (lo zero)

Introduciamo un linguaggio del primo ordine L_0 tale che N sia un modello di tale linguaggio:

- il simbolo funzionale unario S
- i simboli funzionali binari +, $*$
- il predicato di uguaglianza =
- il predicato binario $\leq$
- la costante 0

Scriviamo $\overline{n}$ al posto di S(S(…S(0)…)), dove S compare *n* volte. Si dice allora che L_0 è il *linguaggio dell'Aritmetica del primo ordine* e N è il suo *modello standard* (modelli non standard dell'Aritmetica sono stati costruiti per la prima volta da T. Skolem; si veda ad esempio: Skolem, 1979).

Sia Q, *Aritmetica di Robinson*, una teoria finitamente assiomatizzata (piuttosto debole) nel linguaggio L_0 con i seguenti otto assiomi:

- $S(x) \neq \overline{0}$
- $S(x) = S(y) \rightarrow x = y$
- $x \neq \overline{0} \rightarrow (\exists y)(x = S(y))$
- $x+\overline{0} = x$
- $x+S(y) = S(x+y)$
- $x*\overline{0} = \overline{0}$
- $x*S(y) = (x*y)+x$
- $x \leq y \equiv (\exists z)(z+x = y)$

Oggi si è soliti chiamare l'Aritmetica assiomatica del primo ordine *Aritmetica di Peano* (tale termine è stato probabilmente introdotto da A. Tarski: Hajek & Pudlak, 1993, citano a tale proposito una comunicazione personale di G.H. Müller), in omaggio alle ricerche di Giuseppe Peano (1858-1932).

L'Aritmetica di Peano si ottiene aggiungendo a Q lo *schema di induzione*:

$$\varphi(\overline{0}) \ \& \ (\forall x)(\varphi(x) \rightarrow \varphi(S(x)) \rightarrow (\forall x)\varphi(x)$$

Si noti che lo schema di induzione non può essere considerato alla stregua di un singolo assioma; si tratta di uno *schema di assiomi*: ciò significa che per ogni formula φ abbiamo un particolare assioma di induzione (C. Ryll-Nardzewski ha provato che l'Aritmetica di Peano del primo ordine non è finitamente assiomatizzabile: Ryll-Nardzewski, 1952).

Veniamo ora al nocciolo del problema: sappiamo che Gödel ha dimostrato che l'Aritmetica di Peano *non* è completa e che è impossibile costruire un sistema di assiomi per l'Aritmetica tale da garantire tale completezza; pertanto, tutte le teorie aritmetiche contengono proposizioni indecidibili, ovvero la cui verità non può essere dimostrata o confutata mediante una catena di deduzioni, partendo dagli assiomi. Un risultato di fondamentale importanza è stato ottenuto da Paris nel 1977: egli ha trovato un'affermazione di Aritmetica combinatoria che *è vera ma non è dimostrabile* nell'Aritmetica di Peano (la prova di ciò è stata ottenuta nell'àmbito della teoria dei modelli, con un procedimento potente ed innovativo, detto *metodo degli indicatori*, sviluppato da J.B. Paris e L.A.S. Kirby; il risultato ora citato è stato riformulato da L.A. Harrington, il quale ha collegato l'affermazione di Paris al teorema di Ramsey sugli insiemi omogenei).

Uno dei più fecondi campi di ricerca della Logica contemporanea mira ad ottenere una più profonda comprensione del ruolo dello schema di assiomi dell'induzione e del fenomeno dell'incompletezza. La domanda che si pongono i logici contemporanei è dunque la seguente: *che cosa si può dire sui sistemi dell'Aritmetica oltre ad affermare, ovviamente, che essi sono tutti incompleti?*

Ci sono molte direzioni in cui cercare una risposta; ad esempio, per ogni formula φ non dimostrabile e non refutabile in un'Aritmetica T si studia come essa risulti *conservativa* su T, cioè per quali formule ψ la dimostrabilità di ψ in (T+φ) implica la dimostrabilità di ψ in T. Si esamina poi l'*interpretabilità* di (T+φ) in T, cioè se le nozioni di T possono essere ridefinite in T in modo tale che per le nuove nozioni tutti gli assiomi di (T+φ) siano dimostrabili in T. Inoltre, vengono analizzati modelli di T in modo da vedere come essi visualizzano le nozioni sintattiche ed i concetti usuali (altre indicazioni di percorsi di ricerca possono essere trovate in: Hajek & Pudlak, 1993, pp. 2-4).

Uno sguardo alla ricerca: i frammenti dell'Aritmetica di Peano

Un importante campo di ricerca considera alcune teorie assiomatiche formulate nel linguaggio L_0 dell'Aritmetica (ricordiamo che una tale teoria T si dice *sound* se il modello standard dell'Aritmetica del primo ordine N è un modello di T, cioè se tutti gli assiomi di T sono veri in N; se T è *sound*, allora, banalmente, ogni formula dimostrabile in T è vera in N): si tratta di teorie che contengono l'Aritmetica di Robinson Q; in particolare è stata messa a punto una gerarchia infinita di teorie *sound* la cui unione è l'Aritmetica di Peano. Le teorie che costituiscono tale gerarchia sono dette *frammenti* dell'Aritmetica di Peano.

Recenti studi (ampiamente riassunti in: Hajek & Pudlak, 1993, testo al quale ci riferiremo, ed in: Bagni, 2000) hanno portato a risultati positivi in tali teorie, cioè hanno mostrato che la potenza deduttiva ed espressiva di tali frammenti è molto elevata. Importanti frammenti dell'Aritmetica di Peano si ottengono *restringendo lo schema di induzione a formule* φ *appartenenti a classi particolari*. Consideriamo dunque alcune L_0-formule particolarmente significative.

Indichiamo con $(\exists x\leq y)\varphi$ la $(\exists x)(x\leq y \ \& \ \varphi)$; analogamente $(\forall x\leq y)\varphi$ è un'abbreviazione per $(\forall x)(x\leq y \rightarrow \varphi)$ (x e y devono essere variabili distinte). Una L_0-formula si dice *vincolata* se tutti i quantificatori in essa presenti sono vincolati, cioè compaiono nelle forme sopra indicate.

Introduciamo una gerarchia di formule denominata *gerarchia aritmetica*:

- le Σ_0-formule (coincidenti con le Π_0-formule) sono formule vincolate;
- le Σ_{n+1}-formule sono $(\exists x)\varphi$ dove φ è una Π_n-formula;
- le Π_{n+1}-formule sono $(\forall x)\varphi$ dove φ è una Σ_n-formula.

Dunque una Σ_n-formula si presenta come un blocco di *n* quantificatori alternati (il primo dei quali esistenziale), seguito da una formula vincolata. Analogamente, una Π_n-formula si presenta come un blocco di *n* quantificatori alternati (il primo dei quali universale), seguito da una formula vincolata ([1]).

Tale gerarchia ci consente di descrivere alcuni importanti frammenti dell'Aritmetica di Peano: $I\Sigma_0$, $I\Sigma_1$ denotano infatti la teoria Q (Aritmetica di Robinson) alla quale sia "aggiunto" lo schema di induzione per le φ rispettivamente Σ_0 e Σ_1.

Non presenteremo dettagliatamente i risultati ottenuti nello studio dei frammenti dell'Aritmetica di Peano, per i quali rimandiamo i lettori alle indicazioni bibliografiche (ribadiamo l'importanza di: Hajek & Pudlak, 1993, che riporta anche una ricca bibliografia). Segnaliamo però il fondamentale campo di studio indicato come *aritmetizzazione della Metamatematica*: esso consiste nel portare alcune parti significative della Metamatematica (intendendo con tale termine lo studio matematico delle teorie matematiche: Kleene, 1952; Lorenzen, 1967) ad essere inserite nell'Aritmetica. In tale prospettiva, è innanzitutto necessario dimostrare che importanti nozioni logiche sono definibili in N da formule dell'Aritmetica del primo ordine; si prova poi che importanti proprietà delle nozioni esaminate sono dimostrabili in vari sistemi di Aritmetica assiomatica ([2]).

L'aritmetizzazione della Metamatematica dà quindi la possibilità di trattare, in un frammento dell'Aritmetica, non soltanto numeri, ma anche insiemi finiti, successioni ed insiemi infiniti definibili di numeri.

La nostra presentazione non esaurisce, ovviamente, i molti importanti settori in cui si sta sviluppando la vivace ricerca logica contemporanea; ma intende segnalare alcuni spunti che possono essere considerati primari, in particolare per la loro stretta connessione con i grandi risultati logici della ricerca che ha seguito la *crisi dei fondamenti*, tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo. Spunti che costituiscono impegnativi e profondi campi di lavoro, che lanciano vere e proprie sfide per i logici e per i matematici del nuovo secolo.

Note

([1]) Ricordiamo che un insieme $X \subseteq N$ è Σ_n (o Π_n) se è definito da una Σ_n-formula (rispettivamente, da una Π_n-formula) con una ed una sola variabile libera. Analogamente per una relazione $R \subseteq N^k$. X è Δ_n se è sia Σ_n che Π_n; in particolare, X è Δ_0 se e solo se è Σ_0. Vale il Teorema di Matiyasevic-Robinson-Davis-Putnam, secondo il quale le relazioni Σ_1 sono definite da L_0-formule esistenziali, cioè con formule costituite da un blocco di quantificatori esistenziali seguiti da una formula aperta. Questo importante teorema implica la non risolubilità ricorsiva del X problema hilbertiano (una sua dimostrazione è in: Davis, 1973; si veda inoltre: Bagni, 2000).

([2]) Per definire nozioni logiche mediante formule aritmetiche è innanzitutto necessario indicare tutti gli oggetti della Logica (simboli, formule, dimostrazioni etc.) con dei numeri: è possibile pensare agli oggetti logici come a dei non-numeri e dare quindi alcune regole esplicite per associare ad essi dei numeri. Questa procedura è detta *numerazione di Gödel* e si parla dunque di numeri di Gödel di simboli, formule, dimostrazioni etc.

Riferimenti bibliografici

Bagni, G.T. (2000), Aritmetica e Logica alla fine del XX secolo, *Atti e Memorie dell'Ateneo di Treviso*, in via di pubblicazione.

Bell, J. & Machover, M. (1977), *A course in Mathematical Logic*, North-Holland, Amsterdam-New York-Oxford.

Bernays, P. (1935), Sur le platonisme dans les mathématiques, *L'Enseignem. Math.*, 34, 36, 52-69.

Bochenski, J.M. (1972), *La Logica formale. I. Dai Presocratici a Leibniz. II. La Logica matematica*, Einaudi, Torino.

Bottazzini, U. (1990), *Il flauto di Hilbert. Storia della Matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino.

Bottazzini, U.; Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L. (1992), *Fonti per la Storia della Matematica*, Sansoni, Firenze.

Carnap, R. (1961), *Sintassi logica del linguaggio*, Silva, Milano (edizione originale: Wien, 1934).

Carugo, A. (1961), Ciò che resta vivo del «programma hilbertiano» nell'attuale sistemazione degli studi sui fondamenti della Matematica, *Atti del Congresso Nazionale di Logica*, Torino, 177-188.

Casari, E. (1973), *La Filosofia della Matematica del '900*, Sansoni, Firenze.

Casari, E. (a cura di) (1979), *Dalla Logica alla Metalogica*, Sansoni, Firenze.

Cassina, U. (1937), Parallelo fra la Logica teoretica di Hilbert e quella di Peano, *Period. di Matem.*, 4, 17, 129-138.

Cipolla, M. (1923-1924), Sui fondamenti logici della Matematica secondo le recenti vedute di Hilbert, *Ann. Matem. pura ed appl.*, IV, 1, 19-29.

Davis, M.D. (1973), Hilbert tenth problem is unsolvable, *Am. Mathem. Mon.*, 80, 233-269.

Glivenko, W. (1929), Sur qualques points de la Logique de M. Brouwer, *Acad. roy. de Belgique, Bull. de la Cl. des Sciences*, 5, 15, 183-188.

Gödel, K. (1979), La completezza degli assiomi del calcolo logico funzionale, Casari, E. (a cura di), *Dalla Logica alla Metalogica*, 137-149, Sansoni, Firenze (edizione originale: *Monatshefte für Math. und Phis.*, XXXVII, 349-360, 1930).

Hájek, P. & Pudlák, P. (1993), *Metamathematics of First-Order Arithmetic*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg.

Herbrand, J. (1930), Les bases de la logique Hilbertienne, *Rev. de Mét. et de Mor.*, 37, 248.

Heyting, A. (1956), *Intuitionism, an introduction*, North-Holland, Amsterdam.

Heyting, A. (1979), Le regole formali della Logica intuizionista, Casari, E. (a cura di), *Dalla Logica alla Metalogica*, 195-212, Sansoni, Firenze (edizione originale: *Sitzungsber. der Preuss. Ak. der Wissensch., Phis.-Math. Klasse*, 42-56, 1930).

Hilbert, D. & Ackermann, W. (1928), *Gründzuge der theoretischen Logik*, Springer, Berlin.

Hilbert, D. (1979), I fondamenti logici della Matematica, Casari, E. (a cura di), *Dalla Logica alla Metalogica*, 67-78, Sansoni, Firenze (edizione originale: *Mathem. Ann.*, LXXXVIII, 151-165, 1923).

Kleene, S.C. (1952), *Introduction to Metamathematics*, North-Holland, Amsterdam.

Kolmogorov, A.N. (1932), Zur Deutung der intuitionistischen Logik, *Math. Zeitschr.*, XXXV, 58-65.

Kolmogorov, A.N. (1979), Sul principio del terzo escluso, Casari, E. (a cura di), *Dalla Logica alla Metalogica*, Sansoni, Firenze, 167-194 (edizione originale: *Matemat. Sborn.*, XXXIII, 646-667, 1925).

Kneale, W.C. & Kneale, M. (1972), *Storia della Logica*, Einaudi, Torino.

Lolli, G. (1985), *Le ragioni fisiche e le dimostrazioni matematiche*, Il Mulino, Bologna.

Lorenzen, P. (1967), *Métamathématique*, Gauthier-Villars, Paris (edizione originale: *Metamathematik*, Bibliographiskes Institut, Mannheim 1962).

Mangione, C. (1972), La Logica nel ventesimo secolo, Geymonat, L., *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, VI, Garzanti, Milano.

Mangione, C. (1976), La Logica nel ventesimo secolo (II), Geymonat, L., *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, VII, Garzanti, Milano.

Moriconi, E. (1987), *La teoria della dimostrazione di Hilbert*, Bibliopolis, Napoli.

Nagel, E. & Newman, J.R. (1961), *La prova di Gödel*, Boringhieri, Torino.

Ryll-Nardzewski, C. (1952), The role of the axiom of induction in elementary Arithmetic, *Fund. Math.*, 39, 239-263.

Skolem, T. (1979), Sull'impossibilità di caratterizzare la serie dei numeri mediante un numero finito oppure infinito numerabile di proposizioni in cui occorrono solo variabili numeriche, Casari, E. (a cura di), *Dalla Logica alla Metalogica*, Sansoni, Firenze, 125-136 (edizione originale: *Fund. Math.*, 23, 150-161, 1934).