L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate, 17B, 4, 347-355

L'approssimazione di π, i poligoni regolari e la circonferenza

GIORGIO T. BAGNI
NUCLEO DI RICERCA IN DIDATTICA DELLA MATEMATICA, BOLOGNA

INTRODUZIONE

Accanto ai principali protagonisti della storia della scienza e della cultura umana sono spesso ricordati i minori, i "fiancheggiatori" (termine caro a Gino Loria [7], grande storico della matematica), i molti studiosi che sembrano essere debitori della propria porzione di gloria alla vicinanza, cronologica o geografica, dei "grandi"; non sempre la storia attribuisce il giusto risalto all'opera profonda e spesso innovativa di pensatori fecondi, autori di lavori, però, che nel volgere degli anni non hanno raggiunto livelli di popolarità comparabili con quelli conseguiti dalle opere dei tradizionali "grandi".

Alcuni studiosi trevigiani sono ricordati solo marginalmente dalla storia "ufficiale" della scienza: tra questi, merita certamente un'adeguata presentazione Paolo Aproino (1586-1638) [8] [9], scienziato ed uomo di cultura dai molteplici interessi e, come vedremo, autore di originali osservazioni.

Prima di illustrare la posizione di Aproino, descriviamo lo svolgersi della secolare questione matematica riferita al problema detto della *quadratura del cerchio*; proponiamo dunque una selezione degli interventi, delle posizioni e dei tentativi che, nel corso della storia della cultura umana, hanno caratterizzato la ricerca in tale settore.

UN CELEBRE PROCEDIMENTO DI APPROSSIMAZIONE: LA CIRCONFERENZA ED I POLIGONI REGOLARI

Il calcolo approssimato dell'area del cerchio e quello della misura della circonferenza, nella storia della matematica, rappresentano una questione assai importante ed affascinante: innumerevoli, infatti, sono i tentativi di approssimazione di una delle più celebri costanti della matematica, il fatidico e per secoli misterioso π, ovvero il rapporto tra la misura di una circonferenza e quella del suo diametro [3] [7] [12].

Ricordiamo che, cronologicamente, l'adozione del simbolo π per indicare il rapporto tra le misure di una circonferenza e del suo diametro va fatta risalire all'opera *Synopsis palmariorum matheseos* (Londra 1706) dell'inglese William Jones (1675-1749) [7] [11]. Ma il problema dell'approssimazione di π è molto più antico e va fatto risalire addirittura alle matematiche pre-elleniche [3].

La Bibbia propone un'interessante approssimazione di π: nel I Libro dei Re è riportato che Salomone (X secolo a.C.) commissiona a Chiram di Tiro un bacino di bronzo, del quale sono indicate le misure:

"Fece un bacino di metallo fuso di dieci cubiti da un orlo all'altro, rotondo; la sua altezza era di cinque cubiti e la sua circonferenza di trenta cubiti" (1 Re, 7, 23).

Le misure del grande bacino di bronzo sono ricordate in un passo parallelo del II Libro delle Cronache:

"[Salomone] fece la vasca di metallo fuso del diametro di dieci cubiti, rotonda, alta cinque cubiti; ci voleva una corda di trenta cubiti per cingerla" (2 Cronache, 4, 2).

Quanto affermato, evidentemente, equivale a considerare pari a 3 il rapporto tra la misura della circonferenza e quella del suo diametro.

Anche presso i Babilonesi è inizialmente accettato, per π, il valore 3 [10]; ma in una tavoletta scoperta nel 1936 a Susa, 350 km ad est di Babilonia, si trova un elenco di dati sulla misura del raggio di un cerchio basata sulla misura del perimetro dell'esagono regolare inscritto, che sarebbe equivalente all'approssimazione di π con il valore $3+\frac{1}{8}$ (gli studi di E.M. Bruins, pubblicati nel 1950, sono riportati da O. Neugebauer in [10]). Nel papiro Rhind, il documento fondamentale della matematica egiziana, troviamo una regola equivalente all'adozione del valore approssimato [11]:

$$\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3{,}160493...$$

Il più semplice ed efficace approccio al problema del calcolo di π, adottato, nei secoli, da molti grandi Autori della storia della matematica, consiste nell'approssimare il cerchio con una successione opportuna di poligoni regolari inscritti e circoscritti al cerchio dato: al crescere del numero dei lati di questi, infatti, diminuisce progressivamente la differenza tra l'area del poligono e l'area del cerchio, nonché tra la misura del perimetro del poligono e quella della circonferenza. Archimede (287-212 a.C.), considerando un poligono regolare di 96 lati, giunge ad approssimare π nei termini seguenti:

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$$

Il più preciso valore di π calcolato nell'Età antica è dovuto all'astronomo Claudio Tolomeo, che intorno al 150 d.C., nell'*Almagesto* (VI, 7) propone 3,1416 (notiamo che lo stesso valore, nella forma $\frac{3393}{1080}$, sarà adottato dall'indiano Aryabhata, tra il V ed il VI secolo [10]). Per quanto riguarda il calcolo di π nell'Antichità, rileva P.J. Davis:

"Non sembra che gli antichi abbiano avuto molto successo o molto interesse a calcolare π con molta precisione. Forse i loro metodi, un po' scomodi sebbene teoricamente perfetti, li ostacolarono. Forse furono messi in difficoltà dal loro sistema di numerazione, che era ancor più scomodo. Forse consideravano il problema da un punto di vista troppo pratico e non incontrarono mai un problema che richiedesse una risposta tanto precisa" ([3], p. 74).

'L GEOMÈTRA CHE TUTTO S'AFFIGGE PER MISURAR LO CERCHIO...

Anche a Dante Alighieri (1265-1321) spetta un posto nella secolare avventura geometrica che stiamo presentando: egli, nella *Divina Commedia*, propone un esplicito riferimento al problema della quadratura del cerchio, ovvero della (impossibile) determinazione, con l'uso esclusivo della riga e del compasso, di un quadrato avente la stessa area di un cerchio assegnato.

Riportiamo "il più famoso passo matematico di Dante" (nelle parole di B. D'Amore, in [1], p. 8; il passo è ricordato anche da G. Loria, in [7], p. 238):

"Qual è 'l geomètra che tutto s'affigge
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elli indige,

tal era io a quella vista nova;
veder volea come si convenne
l'imago al cerchio e come vi s'indova"

(*Paradiso*, XXXIII, 133-138)

Dante è evidentemente a conoscenza dell'impossibilità del problema citato; e di esso fornisce anche una parziale, ma molto interessante collocazione storica:

"E di ciò sono al mondo aperte prove
Parmènide, Melisso, e Brisso, e molti,
li quali andavano e non sapean dove"

(*Paradiso*, XIII, 124-127)

(G. Loria in [7], p. 35, cita anche quest'ultimo passo, ma un'inesattezza di stampa ne rende difficile l'individuazione: esso infatti è erroneamente indicato come *Paradiso*, XII, 123-126). Ricordiamo che il sofista Brissone, o Brisone (V sec. a.C.), secondo alcuni discepolo di Euclide, fu "deriso da Aristotele (*Analit. poster.*, I, 9) perché ostinato ricercatore della quadratura del circolo" (C. Dragone, in [2], p. 1082). Brissone, frequentemente citato con Antifone (o Antifonte), è oggi considerato figura rilevante nella storia della matematica. Afferma G. Loria:

"Il sofista Brissone..., al pari del contemporaneo Antifonte, fece sforzi per risolvere il problema della quadratura del cerchio, i quali, benché lo abbiano condotto ad errori indiscutibili... contengono nel proprio seno un germe fecondo: cioè l'uso dei poligoni inscritti e circoscritti, di cui poi... Archimede fece sì mirabile applicazione" ([7], p. 35).

Merita di essere riportata l'opinione di M. Kline, uno dei massimi storici della matematica del nostro secolo, sui due sofisti:

"Mentre tentava di quadrare il cerchio, Antifone ebbe l'idea di approssimare l'area del cerchio inscrivendovi dei poligoni aventi un numero sempre maggiore di lati. Brisone vi aggiunse l'idea di usare poligoni circoscritti. Antifone suggerì ulteriormente che un cerchio poteva essere considerato come un poligono con un numero infinito di lati. Vedremo come queste idee furono riprese da Eudosso nel suo metodo di esaustione" ([6], pp. 52-53).

In Dante non è presente alcuna considerazione sul ruolo essenziale che il procedimento di Brissone viene ad assumere con Archimede e con Eudosso, sul "germe fecondo" che (giustamente) G. Loria e M. Kline evidenziano; il poeta si limita a ricordare Brissone nell'àmbito del negativo giudizio aristotelico, e ciò sembra confermare indirettamente il duro giudizio di Loria:

'Tutto induce a credere che le cognizioni matematiche di Dante si riducessero a quelle attinte alle opere di Aristotele ed agli scritti di Boezio" ([7], p. 238).

Osserviamo che Dante riprende il problema della quadratura del cerchio anche in altre occasioni; in *Monarchia*, III, III, 2, leggiamo:

«geometra circuli quadraturam ignorat, non tamen de ipsa litigat»;

ed in *Convivio*, II, XIII, 27:

«lo cerchio, per lo suo arco, è impossibile a quadrare perfettamente, e però è impossibile a misurare a punto».

IL CALCOLO DI π NELL'ETÀ MODERNA

Quattordici secoli dopo Tolomeo, rinasce l'interesse scientifico, lungamente sopito, per il calcolo approssimato di π: tra la fine del XVI secolo ed il primo ventennio del XVII operano Adrien van Roomen (1561-1615), Ludolph van Ceulen (1540-1610) e Willebrod Snell (1581-1614) [11]. Concettualmente, i procedimenti utilizzati sono ancora legati all'approssimazione del cerchio mediante poligoni regolari inscritti o circoscritti; ma la scrittura dei numeri in forma decimale e l'uso di frazioni consentono di raggiungere gradi di precisione assai più elevati di quelli conseguiti nell'Anti chità [3].

Proprio utilizzando ricorsivamente il descritto metodo di approssimazione, anche Francois Viète (1540-1603) si occupa del calcolo di π [3] [7]; ma se i suoi risultati pratici sono notevolmente inferiori rispetto a quelli ottenuti da Van Ceulen e da Snell [3], egli, nel 1593, ricava un'elegante formula per il calcolo di π. Considerando poligoni regolari di 4, 8, 16... lati, Viète giunge all'espressione che può essere modernamente indicata con il prod otto infinito:

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{90°}{2} \cdot \cos\frac{90°}{4} \cos\frac{90°}{8} \cdot \ldots$$

ovvero:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \ldots$$

Ad esempio, i valori approssimati di π ricavati arrestando il precedente prodotto rispettivamente al primo, al secondo ed al terzo fattore (i risultati qui riportati sono troncati alla terza cifra decimale) vengono ad essere:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{approssimazione } \pi\text{: } 2{,}828$$

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \text{approssimazione } \pi\text{: } 3{,}061$$

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}}}} \Rightarrow \text{approssimazione } \pi\text{: } 3{,}121$$

L'espressione per π proposta da Viète merita un attento esame; consideriamo innanzitutto la successione, definita ricorsivamente da:

$\forall n \in \mathbf{N}$

$$\begin{cases} b_0 = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ b_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot b_n} \end{cases}$$

e quindi la successione definita da:

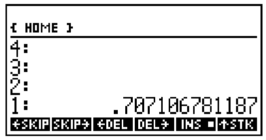
$\forall n \in \mathbf{N}$

$$a_n = \prod_{k=0}^{n} b_k$$

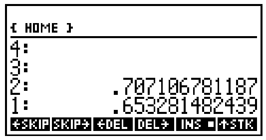
Detto l il limite di questa successione, possiamo dunque ricavare π ponendo:

$$\pi = \frac{2}{l}$$

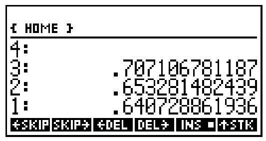
L'algoritmo proposto da Viète sembra essere efficace (seppure la sua convergenza non possa essere considerata rapidissima); per verificare l'utilità di tale espressione è necessario ricorrere ad una calcolatrice tascabile; riportiamo i primi risultati dell'approssimazione:

valore a_o: 

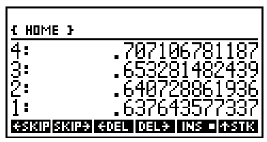
approssimazione π: 

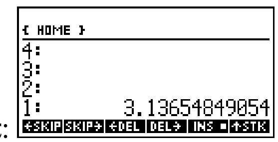
valore a_1: 

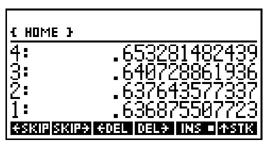
approssimazione π: 

valore a_2: 

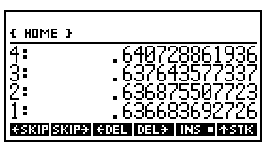
approssimazione π: 

valore a_3: 

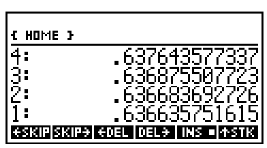
approssimazione π: 

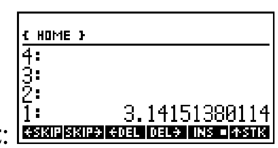
valore a_4: 

approssimazione π: 

valore a_5: 

approssimazione π: 

valore a_6: 

approssimazione π: 

Il prodotto infinito indicato da Viète inaugura un importante filone di ricerca attinente al calcolo di π: al tentativo di determinare il massimo numero possibile di cifre decimali (spesso fine a se stesso, tenacemente perseguito al fine di evidenziare le capacità di calcolo), si affianca la più moderna proposta di algoritmi esatti (ma *infiniti*), che danno la possibilità di calcolare il valore di π con una precisione dipendente dal numero dei passi eseguiti.

Tra gli algoritmi infiniti (serie numeriche, prodotti infiniti, frazioni continue) che permettono il calcolo di π, citiamo ancora alcune celebri espressioni tratte dalla storia della matematica (ed in particolare dell'Analisi) dell'Età moderna [3] [11]:

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\ldots$$ Wallis (1655)

$$\pi=\cfrac{4}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\ldots}}}}$$ Brouncker (1660)

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\ldots$$ Leibniz (1674)

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots$$ Euler (1736)

$$\pi=16\cdot\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3\cdot 5^3}+\frac{1}{5\cdot 5^5}-\frac{1}{7\cdot 5^7}+\frac{1}{9\cdot 5^9}-\ldots\right)-4\cdot\left(\frac{1}{239}-\frac{1}{3\cdot 239^3}+\frac{1}{5\cdot 239^5}-\ldots\right)$$

Machin (1706)

$$\pi=2\sqrt{3}\cdot\left(1-\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 3^2}-\frac{1}{7\cdot 3^5}+\ldots\right)$$ Sharp (1717)

Lo sviluppo del calcolo infinitesimale rende quindi possibile l'elaborazione di importanti espressioni per π; si noti, tuttavia, che l'applicazione pratica di alcune tra le ricordate espressioni è ostacolata dalla lentezza della convergenza; ad esempio, per calcolare π attraverso la serie di Leibniz (da alcuni collegata a precedenti ricerche di Gregory, del 1671 [3]) con la precisione raggiunta da Archimede sarebbe necessario sommare circa 100.000 termini [6].

Non possiamo, infine, non ricordare un'ultima data fondamentale nella storia di π: la ricerca di un valore decimale esatto per π termina infatti nel 1761; in quell'anno, Johann Heinrich Lambert (1728 -1777) dimostra che π è un numero irrazionale, ovvero che non può essere scritto in forma di numero decimale finito né di numero decimale periodico.

L'OSSERVAZIONE DI PAOLO APROINO (1586-1638)

La celebre approssimazione del cerchio con un poligono regolare di n lati, essendo n un numero naturale... "molto grande", ha trovato, nella storia della scienza, moltissimi entusiastici estimatori, ma anche qualche contestatore.Tra questi, merita un'adeguata presentazione Paolo Aproino, nato a Treviso nel 1586 e morto a Venezia nel 1638, Canonico della Cattedrale di Treviso, scienziato dai molteplici interessi e "discepolo ed amico del Galilei" (nelle parole di A.A. Michieli, uno degli storici che più incisivamente hanno studiato la vita e l'opera del trevigiano [8] [9]).

Il vivo rapporto di amicizia e di collaborazione che lega Paolo Aproino a Galileo Galilei risulta centrale per una corretta comprensione della personalità scientifica dello studioso trevigiano: a Galileo, infatti, fanno capo le maggiori tendenze scientifiche della prima età moderna [5]. Al seguito di un così grande maestro, Paolo Aproino si occupa di fisica generale, di idrologia (interessanti sono le lettere di Galilei ad Aproino sui "periodi del flusso e riflusso" del Sile, [4], v. XVII, lett. 3678, pp. 286-287; come interessante è, a tale proposito, il paragone con il galileiano *Discorso sul flusso e reflusso del mare*, [4], v. V, pp. 371-395), di acustica (sottopone a Galileo il proprio progetto di un amplificatore), di astronomia. E Galileo non deve aver mancato di apprezzare le qualità del trevigiano: sottolineiamo infatti che Aproino è ricordato nella Sesta Giornata del galileiano *Dialogo delle Nuove Scienze*, in occasione di una dissertazione di argomento fisico ([4], v. VIII, pp. 321-322).

In una lettera di Aproino a Galilei datata 27 luglio 1613 (riportata da Michieli, [8], p. 171), troviamo alcune osservazioni sull'*"infinibile"* e sull'*"immensurabile"*. In particolare, riportiamo quanto scrive lo studioso trevigiano in riferimento all'approssimazione del cerchio con il poligono regolare con un grande numero di lati:

"[Mi sembra che] non si adatti a bastanza il transito di comparatione che si fa dal poligono di moltissimi lati al circolo, imaginandolo di infiniti; perché *se ben in quantità si va prossimando alla misura, nella specie però della figura si va sempre più allontanando*, ché il poligono di mille lati mi pare più differente dal circolo che non è il triangolo, tanto quanto mille è più differente da uno che non è tre" (il corsivo è nostro).

L'inusuale osservazione ora riportata merita un accorto commento: l'approccio di Aproino è innanzitutto (e dichiaratamente) qualitativo, e non esclusivamente quantitativo, come invece tradizionalmente avviene nel caso in questione. Infatti è ben noto ed accettato (e lo era, come abbiamo constatato, anche all'inizio del XVII secolo) che, al crescere del numero dei lati, la misura del perimetro di un poligono regolare approssima sempre più la misura della circonferenza del cerchio circoscritto (o, equivalentemente, inscritto) a tale poligono; in modo del tutto analogo, l'area di tali poligoni, al crescere del numero dei lati, fornisce una sempre migliore approssimazione dell'area del cerchio.

Tuttavia, se accettiamo di considerare la circonferenza come una figura geometrica delimitata da "un solo" lato (e, del resto, *priva di angoli*), l'osservazione di Aproino può apparire giustificabile ed addirittura profonda, interessante: al crescere del numero dei lati e degli angoli del poligono regolare, la "struttura" della figura (intesa nel senso sopra accennato, ovvero *dal punto di vista del numero dei lati e degli angoli*) può sembrare progressivamente ed irrimediabilmente allontanarsi dalla "struttura" del cerchio.

Aproino, quindi, non ignora la evidente e feconda approssimazione dell'area del cerchio mediante l'area del poligono regolare (scrive infatti egli stesso: "...se ben in quantità si va prossimando alla misura..."); ma, d'altro canto, non manca di sottolineare che la "specie" della figura geometrica viene ad essere contrastata da tale approssimazione ("...nella specie però della figura si va sempre più allontanando..."). Un'osservazione forse insolita, ma senza dubbio interessante e profonda, proposta, forse, in un momento storico nel quale l'importanza tradizionalmente assegnata alla valutazione quantitativa impedisce un approfondimento astratto-formale dell'argomento.

L'autore desidera ringraziare il Prof. Bruno D'Amore del Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna e il Prof. Mario Ferrari del Dipartimento di Matematica dell'Università di Pavia per la generosa collaborazione e per i preziosi suggerimenti.

Note bibliografiche

[1] **B. D'Amore**, *Cenni sulla presenza della matematica nell'opera di Dante*, in: **AA.VV.** *Dante e l'Enciclopedia delle scienze.* Atti del Convegno, Bologna 24 maggio 1990 ed in: "Incontri Mathesis 1990", quaderno n. 4, Sulmona 1990, pp. 7-15. Si veda inoltre: **B. D'Amore-M. Matteuzzi**, *Gli interessi matematici*, Marsilio, Venezia 1976.

[2] **Dante**, *La Divina Commedia*, a cura di **C. Dragone**, Edizioni Paoline, Roma 1985.

[3] **P.J. Davis**, *Il mondo dei grandi numeri*, Zanichelli, Bologna 1965.

[4] **G. Galilei**, *Le Opere*, a cura di **A. Favaro**, Barbera, Firenze 1890-1909.

[5] **M. Giuia**, *Storia delle scienze ed epistemologia. Galilei, Boyle, Planck*, Chiantore, Torino 1945. Meritano inoltre una segnalazione le recenti pubblicazioni: **A. Favaro**, *Adversaria Galilaeana*, Serie I-II, a cura di **L. Rossetti** e **M.L. Soppelsa**, Lint, Trieste 1992; **A. Favaro**, *Scampoli Galileiani*, I, Serie I-XII, II, Serie XIII-XXIV, a cura di **L. Rossetti** e **M.L. Soppelsa**, Lint, Trieste 1992.
[6] **M. Kline**, *Storia del pensiero matematico. I. Dall'Antichità al Settecen-to*, Einaudi, Torino 1991.
[7] **G. Loria**, *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino 1929-1933 (riedizione: Hoepli, Milano 1950; ristampa anastatica: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982).
[8] **A.A. Michieli**, *Il Canonico trevigiano Paolo Aproino discepolo ed amico del Galilei*, in: "Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti", a. acc. 1941/42, t. CI, parte II, Venezia 1942.
[9] **A.A. Michieli**, *Ancora del Can. Paolo Aproino, della sua gente e della coltura del suo tempo (nota II)*, in: "Atti dell'Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti", a. acc. 1946/47, t. CV, Venezia 1947.
[10] **O. Neugebauer**, *The exact sciences in Antiquity*, Brown University Press, Providence, Rhode Island 1957 (traduzione italiana di A. Carugo: *Le scienze esatte nell'Antichità*, Feltrinelli, Milano 1974).
[11] **A. Piccato**, *Dizionario dei termini matematici*, Rizzoli, Milano 1987.
[12] **H.C. Schepler**, *The Chronology of Pi*, in: 'Mathematics Magazine", 23, 1949-1950).