Atti del Convegno "La Matematica è difficile?" Adria, 10 maggio 2001, 19-30

Dalla storia alla didattica della Matematica

GIORGIO T. BAGNI

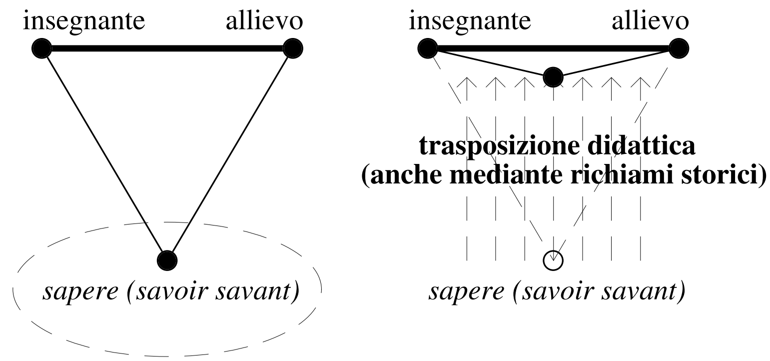
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
UNIVERSITÀ DI ROMA "LA SAPIENZA"

Abstract In this paper we propose some considerations about the use of the History into Mathematics Education. In particular, we present two basic examples from Arithmetics and from Algebra, related to Secondary School mathematical curriculum. We conclude that the use of History into Education is an important tool for the teacher, but its real effectiveness must be carefully monitored, e.g. by experimental methods, in order to obtain a full learning.

Introduzione

Ricordando alcuni termini di Y. Chevallard (1985), possiamo dire che la storia della Matematica può utilmente essere impiegata nella *transposition didactique* ([1]). Il *triangolo di Chevallard* visualizza una ben nota situazione: il sapere accademico (il *savoir savant*) viene spesso a trovarsi lontano dal processo di insegnamento-apprendimento.

([1]) Scrivono J. Fauvel e J. van Maanen: «Come ogni progetto educativo, quello di intendere la storia della matematica come una componente dell'insegnamento della Matematica implica un'aspettativa più o meno esplicita in termini di un migliore apprendimento. La ricerca sull'uso della storia della Matematica nell'insegnamento è quindi una parte importante della ricerca in didattica della Matematica» (Fauvel & van Maanen, 1997, p. 8). F. Furinghetti e A. Somaglia individuano «due livelli di lavoro nell'introduzione della storia nella didattica: uno che potremmo associare a un'immagine 'sociale' della matematica e un altro che concerne piuttosto un'immagine 'interna' della stessa. Il primo livello si riferisce a quegli interventi mirati a fornire motivazioni allo studio della matematica mediante la contestualizzazione nel sociale... Il secondo recupera... la dimensione culturale della matematica come metodo» (Furinghetti & Somaglia, 1997, p. 43; indichiamo inoltre: Carruccio, 1972; Weil, 1980; Swetz, 1989 e 1995; Pepe, 1990; Fauvel, 1990 e 1991; Grugnetti, 1992; Furinghetti, 1993; Nobre, 1994; Bagni, 1996a; Calinger, 1996). Alcune considerazioni ed alcuni risultati citati nel presente lavoro sono ripresi da: Bagni, 1998 e1999.



È allora didatticamente indispensabile "avvicinare" il *savoir savant* alla pratica scolastica, al processo di insegnamento-apprendimento attraverso un'opportuna *transposition didactique* che può essere ottenuta anche attraverso richiami storici.

Un primo esempio: la *moltiplicazione per raddoppio*

Il confronto di alcuni procedimenti tratti dalla storia dell'Aritmetica può portare gli allievi della scuola secondaria ad alcune riflessioni sulla notazione numerica additiva e posizionale. Esaminiamo un semplice caso.

Può essere innanzitutto interessante ricordare la celebre *moltiplicazione per raddoppio* impiegata nell'antico Egitto; illustriamola mediante un esempio (che agli allievi può essere inizialmente presentato, per comodità, in notazione numerica posizionale):

$18 \times 13 = 234$

Per l'esecuzione pratica del calcolo si compila una tabella a due colonne; la prima riga è costituita da 1 e da uno dei due fattori (nell'esempio: 18, il maggiore); ad essa si fanno seguire altre righe ottenute raddoppiando gli elementi della riga precedente, finché nella prima colonna si ottengono numeri non maggiori del secondo fattore (nell'esempio, 13):

•	1	18	•
	2	36	
•	4	72	•
•	8	144	•

Si scelgono poi gli elementi della prima colonna di somma 13 (il secondo fattore); la somma dei corrispondenti elementi della seconda colonna fornisce il risultato:

(1+4+8 = 13) (18+72+144 = **234**, risultato)

La moltiplicazione per raddoppio può essere eseguita anche in notazione additiva (ricordiamo peraltro che la notazione numerica egizia *era* additiva); un esempio nella notazione romana, generalmente ben nota agli allievi, è il seguente:

XVIII × XIII = CCXXXIIII

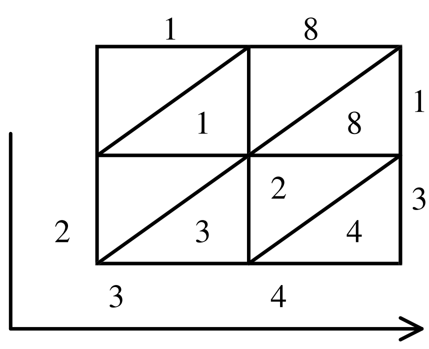
(in cui viene dunque nuovamente eseguita la moltiplicazione precedente, cioè: 18×13 = 234)

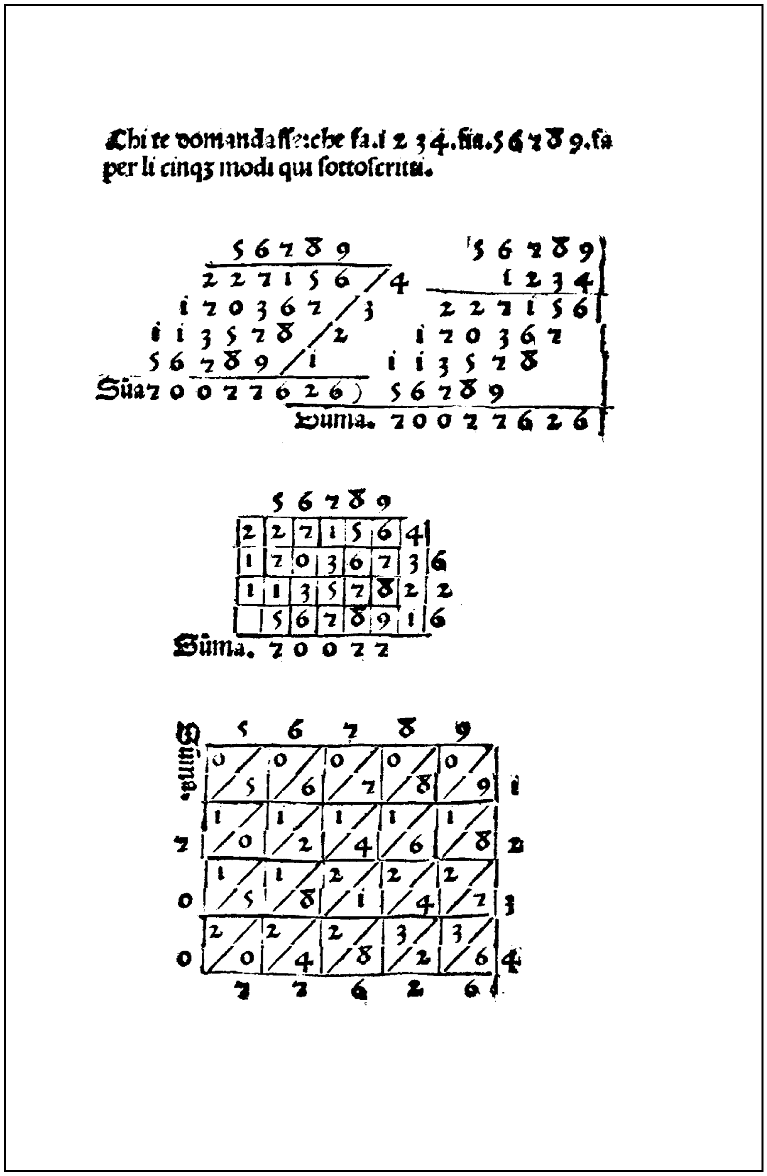
•	I	XVIII	•
	II	XXXVI	
•	IIII	LXXII	•
•	VIII	CXXXXIIII	•
(I+IIII+VIII)		(XVIII+LXXII+CXXXXIIII)	
	XIII	**CCXXXIIII** (risultato)	

La *moltiplicazione per graticola*

A tale procedimento può essere affiancata la *moltiplicazione per graticola*, un procedimento (espresso in notazione posizionale) di probabile origine indiana, assai diffuso presso gli Arabi e quindi nell'Europa medievale: moltiplicando e moltiplicatore devono essere scritti ai lati di una tabella rettangolare, all'interno della quale vengono disposti i prodotti parziali (si veda l'esempio riportato nel seguito). Il risultato finale si ottiene sommando diagonalmente quanto scritto nelle caselle, considerando gli eventuali riporti, e può essere letto ai lati della tabella nei quali non sono scritti i fattori.

Riportiamo nuovamente la moltiplicazione precedentemente eseguita per raddoppio (18×13 = 234):





Una pagina de *Larte de Labbacho* (Treviso, 1478) in cui è riportato un esempio di moltiplicazione per graticola (Boncompagni, 1862-1863; Loria, 1929-1933; D'Acais & Porro, 1969; Romano, 1969; Picutti, 1977; Bagni, 1989, 1994, 1995).

È immediato notare che *risulta del tutto impossibile utilizzare quest'ultima tecnica in notazione additiva*.

Considerazioni didattiche

Si pone ora un'importante questione: quale può essere l'effetto sull'insegnamento e sull'apprendimento dei richiami storici ora accennati? Mediante essi è certamente possibile migliorare la qualità dell'insegnamento, ma resta il problema di valutare quali conseguenze ciò implichi sull'apprendimento degli allievi.

Possiamo infatti supporre che, grazie alla considerazione degli esempî precedenti, gli allievi:

- si rendano conto che i numeri possono essere scritti in modi diversi;
- capiscano che tale diversità non è soltanto "estetica"; ovvero "tocchino con mano" la differenza operativa tra la notazione additiva e la notazione posizionale;
- apprezzino, infine, il vantaggio, anche pratico, di operare con i numeri scritti in notazione posizionale.

Non possiamo però esimerci da una più diretta valutazione (ad esempio sperimentale) del processo didattico posto in atto. Il problema è infatti questo: utilizzando forme di didattica incentrate esclusivamente sull'insegnamento, come quello ora descritto, noi agiamo su questo al fine di migliorarne la qualità. Ma possiamo essere certi, *a priori*, dell'effetto che un rinnovato insegnamento avrà sugli studenti? Alcune reazioni nella mente degli allievi sono plausibili, non obbligatorie. Perciò la sottintesa equivalenza: *migliore insegnamento* uguale a *migliore apprendimento* non è scontata (D'Amore & Frabboni, 1996, pp. 97-98; D'Amore, 1999).

In sintesi, agendo secondo l'impostazione ora considerata, abbiamo proposto all'allievo alcune sollecitazioni nell'àmbito storico-aneddotico. Diamo per accettato che, *in tale àmbito*, lo studente "apprenda": la conoscenza così acquisita non deve però restare confinata nell'àmbito storico-aneddotico (ciò sarebbe poco utile). È necessario un suo "trasferimento" ad àmbiti diversi, una possibile utilizzazione, ad esempio, per la risoluzione di problemi, l'interpretazione di esempî, l'apprendimento di contenuti (Feldman & Toulmin, 1976).

La questione che potrebbe limitare l'efficacia della didattica unicamente incentrata sull'insegnamento potrebbe sintetizzarsi nella domanda: *siamo certi che avvenga tale essenziale trasferimento?*

Ancora un esempio: l'*Algebra geometrica* greca

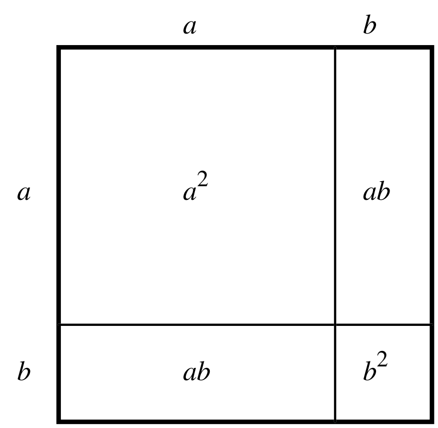
La storia dell'Algebra è antica: se ci limitiamo a considerare i principali problemi algebrici (ad esempio la risoluzione di equazioni o di semplici sistemi), possiamo affermare che una forma di Algebra nacque molti secoli prima dell'era volgare presso gli Egizî e presso i Babilonesi. Questi ultimi, in particolare, erano in grado di risolvere equazioni di grado anche superiore al primo e sistemi di equazioni in due incognite (Neugebauer, 1974; Kline 1991; Bagni, 1996a, I).

Se dunque operativamente l'Algebra nacque almeno una ventina di secoli prima dell'era volgare, deve essere tuttavia sottolineato che non esisteva uno strumento simbolico completo nell'Algebra antica. Il mondo greco privilegiò sistematicamente la Geometria, anche nell'approccio ai problemi che saranno detti algebrici (notiamo che il termine *Algebra* avrà origine nella cultura araba). Il II libro degli *Elementi* di Euclide (opera la cui redazione è collocata intorno al 300 a.C.) è dedicato all'*Algebra geometrica* (2), un settore elegante e originale della Matematica greca (si veda ad esempio: van der Waerden, 1983).

Riportiamo la proposizione 4, che esprime la nota regola algebrica del quadrato di una somma.

Proposizione 4 del II libro degli *Elementi*. Se si divide a caso un segmento, il quadrato di tutto il segmento è equivalente (equiesteso) alla somma dei quadrati delle parti e del doppio del rettangolo compreso dalle parti stesse (Euclide, 1970, p. 163).

La figura seguente esprime compiutamente tale proposizione.



(2) «L'idea centrale che caratterizza l'Algebra geometrica (il termine fu coniato da H. G. Zeuthen) appare semplice ed intuitiva: essa consiste nella rappresentazione dei numeri reali attraverso grandezze geometriche (ad esempio: segmenti). Le operazioni possono quindi essere visualizzate mediante figure: se due numeri sono identificati con due segmenti, il loro prodotto può essere fatto corrispondere ad un rettangolo; un'uguaglianza di prodotti viene così ad essere ricondotta all'equiestensione dei corrispondenti rettangoli. Attraverso tali tecniche possono essere enunciate regole di calcolo generali, ovvero procedimenti riferiti a numeri qualsiasi» (Bagni, 1996a, I). La ricerca presentata nel presente paragrafo è illustrata in: Bagni, 1996b, 1997, 1998.

La sua moderna espressione simbolica è:

$$(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$$

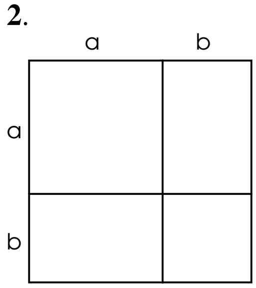
La dimostrazione delle proposizioni di Algebra geometrica può essere ricavata direttamente dall'osservazione delle figure e ciò rende tali risultati assai intuitivi ed utili dal punto di vista didattico (Dieudonné, 1989, p. 43): l'additività delle aree, sulla quale si basano le dimostrazioni dell'Algebra geometrica piana, è immediatamente intuita dall'allievo, che può trovarsi talvolta in difficoltà nell'applicazione di alcune proprietà delle operazioni (come la proprietà distributiva).

Il ricorso all'immagine offre dunque allo studente la possibilità di accostarsi efficacemente all'astrazione algebrica; ma, come vedremo, la visualizzazione è spesso considerata con qualche diffidenza, talvolta addirittura esplicitamente evitata, dagli studenti e dagli insegnanti di matematica. Uno studio di M. Kaldrimidou ha evidenziato un atteggiamento negativo nei confronti delle rappresentazioni visuali; è stato proposto un test a studenti (del terzo anno universitario del corso di matematica) e ad insegnanti di matematica, in Grecia (Kaldrimidou, 1995; si veda inoltre: Kaldrimidou, 1997).

Analizziamo uno dei quesiti proposti nel test, riferito alla citata proposizione dell'Algebra geometrica euclidea:

"**1**. $(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ba+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2$

2.



Tra i due metodi per provare che: $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, qual è il più appropriato, dal punto di vista matematico? Giustificate la risposta".

La maggioranza ha preferito la rappresentazione analitica a quella visuale:

Studenti		**Insegnanti**	
Analitica	68.3%	Analitica	61.5%
Visuale	26.7%	Visuale	23.1%
pref. non espressa	5.0%	pref. non espressa	15.4%

Dalle motivazioni espresse da coloro i quali hanno optato per la risoluzione analitica emerge una qualche diffidenza nei confronti della visualizzazione:

- la rappresentazione visuale viene da alcuni considerata un mezzo non sempre adatto per rappresentare informazioni, in matematica; ciò dipende dalla specificità di ogni rappresentazione visuale;
- negli insegnanti sono presenti ostacoli epistemologici («Si cerca di ottenere metodi generali, si richiede esattezza, si cerca di avere delle teorie complete... E basta talvolta il carattere algebrico del metodo affinché la soluzione sia considerata più "matematica". Di conseguenza, poiché le rappresentazioni visuali sono prive di queste caratteristiche, non sono considerate come equivalenti ai metodi algebrici, essendo i due metodi diversi quanto al loro status epistemologico»: Kaldrimidou, 1995);
- negli studenti le rappresentazioni visuali sono causa di timore, di incertezza: il *contratto didattico* sembra attribuire importanza all'espressione algebrica a scapito di quella figurale (Kaldrimidou, 1995).

I risultati ottenuti da M. Kaldrimidou sono riferiti a studenti universitari di matematica e ad insegnanti greci. Abbiamo proposto nuovamente il test ad alcuni studenti italiani di scuola secondaria superiore, per verificare l'accettazione della visualizzazione (riferita ad alcuni procedimenti algebrici).

Il quesito presentato nel paragrafo precedente è stato proposto a 105 allievi di quattro classi degli ultimi due anni (IV e V) di un Liceo scientifico italiano (i quali avevano seguito, fino al momento del test, un programma tradizionale di matematica). La maggioranza ha optato per la rappresentazione analitica:

rappresentazione analitica	62 studenti	60%
rappresentazione visuale	30 studenti	29%
pref. non espressa	13 studenti	11%

Dunque i risultati concordano qualitativamente con quelli ottenuti da Kaldrimidou. Gli allievi che hanno espresso una preferenza hanno giustificato la propria scelta fornendo alcune motivazioni interessanti:

- Alcuni studenti (18, pari al 17%) tra coloro i quali hanno optato per la rappresentazione analitica hanno sottolineato positivamente la presenza esplicita di tutti i passaggi (che sembra rendere il metodo convincente ed affidabile); riportiamo alcune giustificazioni: «Il metodo algebrico è preferibile perché mostra tutti i passaggi» (Luisa, cl. IV). «Il primo metodo è più appropriato perché si esegue la scomposizione» (Luca, cl. IV). «La dimostrazione del primo metodo è lo sviluppo di un quadrato svolto correttamente e in ordine; il secondo è una raffigurazione e non sappiamo se le misure sono esatte» (Chiara, cl. IV. È evidente, da quest'ultima affermazione, la differenza tra la considerazione dei reali a, b in àmbito algebrico e come misure di segmenti).
- Alcuni studenti (6, pari al 6%) tra coloro i quali hanno optato per la rappresentazione analitica hanno ritenuto che la natura algebrica del proble-

ma suggerisse o addirittura richiedesse un'impostazione risolutiva di tipo algebrico: «Il primo metodo è più appropriato perché dimostra una proprietà algebrica con un procedimento algebrico» (Anna, cl. V. Emerge l'ostacolo di una rappresentazione eterogenea rispetto alla richiesta: i due linguaggi, "algebrico" e "geometrico" sono "iso morfi", ma il riconoscimento di tale equivalenza costituisce un ostacolo).

- Alcuni studenti (4, pari al 4%) tra coloro i quali hanno optato per la rappresentazione analitica hanno sottolineato la difficoltà della risoluzione visuale, non comune nella pratica didattica, ed il conseguente timore: «Se dovessi risolvere $(a+b)^2$ lo farei con il metodo algebrico per il fatto che sono abituata a lavorare più con i numeri che con le figure» (Paola, cl. IV). «La prima soluzione è preferibile perché è sicuramente esatta e perché può essere utilizzata anche quando non si riesce a visualizzare facilmente l'operazione» (Cristina, cl. V) (per quanto riguarda la figura nella prassi didattica indichiamo: D'Amore, 1995).
- Tra gli studenti che hanno scelto la rappresentazione visuale, le giustificazioni riguardano la sua evidenza, la semplicità e l'assenza di calcoli.

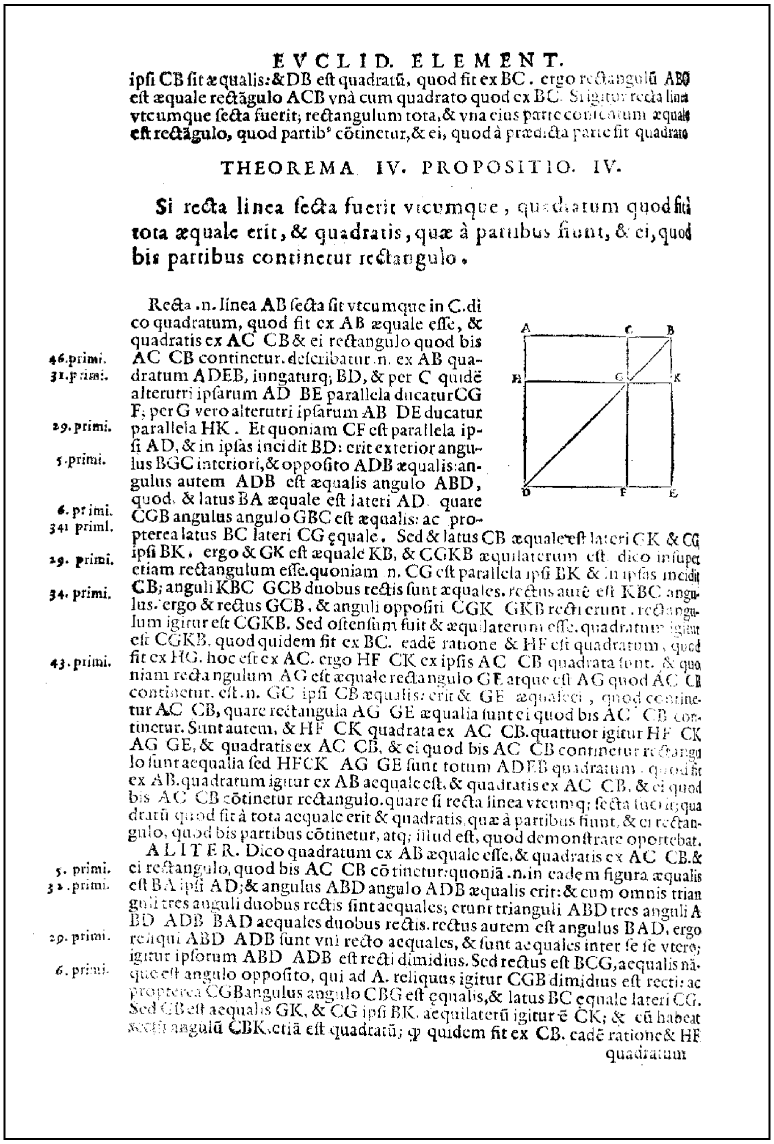
Quanto precedentemente annotato, nonostante sia riferito ad un particolare impiego della visualizzazione, è indice di una situazione abbastanza chiara: non pochi tra gli allievi intervistati (il 17% del totale, quasi un terzo di coloro i quali hanno optato per la risoluzione analitica) hanno sottolineato la rassicurante presenza di tutti i passaggi algebrici, contrapposta all'incertezza, alla difficoltà del procedimento visuale ([3]).

Interessante è l'affermazione secondo la quale la natura algebrica del problema richiede un'impostazione risolutiva di tipo algebrico (riferibile al 6% degli studenti): l'allievo si sente dunque portato da una clausola del *contratto didattico* a risolvere l'esercizio assegnato in modo da incontrare l'approvazione "metodologica" dell'insegnante. Questa preoccupazione limita le possibilità di impostazione della risoluzione del problema.

Possiamo concludere che la visualizzazione dei procedimenti algebrici non gode di una reputazione particolarmente prestigiosa tra gli allievi della scuola secondaria superiore (e tra i loro insegnanti) ([4]).

([3]) Molti studenti sembrano principalmente preoccupati di scegliere il metodo risolutivo tradizionalmente più affidabile; nessuno degli allievi intervistati, ad esempio, ha osservato che l'errore che vede $(a+b)^2$ identificato in a^2+b^2 (omettendo il "doppio prodotto") viene ad essere quasi impossibile se si tiene presente la rappresentazione visuale, mentre può non essere infrequente se la risoluzione è ridotta alla mnemonica applicazione della formula $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$.

([4]) Sarebbe inesatto estendere questa situazione a *tutti* i procedimenti collegati alla visualizzazione: ad esempio, la didattica delle funzioni è basata su tecniche di visualizzazione: un legame che talvolta giunge addirittura ad identificare lo studio di una funzione con il tracciamento del suo diagramma cartesiano (Bagni, 1997).


EVCLID. ELEMENT.

ipſi CB ſit æqualis: & DB eſt quadratū, quod fit ex BC. ergo rectangulū ABC eſt æquale rectāgulo ACB vnà cum quadrato quod ex BC. Si igitur recta linea vtcumque ſecta fuerit; rectangulum tota, & vna eius parte contentum æquale eſt rectāgulo, quod partib° cōtinetur, & ei, quod à prædicta parte fit quadrato

THEOREMA IV. PROPOSITIO. IV.

Si recta linea ſecta fuerit vtcumque, quadratum quod fit à tota æquale erit, & quadratis, quæ à partibus fiunt, & ei, quod bis partibus continetur rectangulo.

Recta .n. linea AB ſecta ſit vtcumque in C. dico quadratum, quod fit ex AB æquale eſſe, & quadratis ex AC CB & ei rectangulo quod bis
46. primi. AC CB continetur. deſcribatur .n. ex AB qua-
31. primi. dratum ADEB, iungaturq; BD, & per C quidē alterutri ipſarum AD BE parallela ducatur CG F; per G vero alterutri ipſarum AB DE ducatur
29. primi. parallela HK. Et quoniam CF eſt parallela ipſi AD, & in ipſas incidit BD: erit exterior angu-
5. primi. lus BGC interiori, & oppoſito ADB æqualis: angulus autem ADB eſt æqualis angulo ABD, quod & latus BA æquale eſt lateri AD. quare
6. primi. CGB angulus angulo GBC eſt æqualis: ac pro-
34. primi. pterea latus BC lateri CG ęquale. Sed & latus CB æquale eſt lateri GK & CG ipſi BK. ergo & GK eſt æquale KB, & CGKB æquilaterum eſt. dico inſuper
29. primi. etiam rectangulum eſſe. quoniam .n. CG eſt parallela ipſi BK & in ipſas incidit
34. primi. CB; anguli KBC GCB duobus rectis ſunt æquales. rectus autē eſt KBC angulus. ergo & rectus GCB, & anguli oppoſiti CGK GKB recti erunt. rectangulum igitur eſt CGKB. Sed oſtenſum fuit & æquilaterum eſſe. quadratum igitur eſt CGKB, quod quidem fit ex BC. eadē ratione & HF eſt quadratum, quod
43. primi. fit ex HG. hoc eſt ex AC. ergo HF CK ex ipſis AC CB quadrata ſunt. & quoniam rectangulum AG eſt æquale rectangulo GE atque eſt AG quod AC CB continetur. eſt .n. GC ipſi CB æqualis: erit & GE æquale ei, quod continetur AC CB, quare rectangula AG GE æqualia ſunt ei quod bis AC CB continetur. Sunt autem, & HF CK quadrata ex AC CB. quattuor igitur HF CK AG GE, & quadratis ex AC CB, & ei quod bis AC CB continetur rectangulo ſunt aequalia ſed HFCK AG GE ſunt totum ADEB quadratum, quod fit ex AB. quadratum igitur ex AB aequale eſt, & quadratis ex AC CB, & ei quod bis AC CB cōtinetur rectangulo. quare ſi recta linea vtcumq; ſecta fuerit; quadratū quod fit à tota aequale erit & quadratis, quæ à partibus fiunt, & ei rectangulo, quod bis partibus cōtinetur, atq; illud eſt, quod demonſtrare oportebat.

ALITER. Dico quadratum ex AB æquale eſſe, & quadratis ex AC CB. &
5. primi. ei rectangulo, quod bis AC CB cōtinetur: quoniā .n. in eadem figura æqualis
32. primi. eſt BA ipſi AD; & angulus ABD angulo ADB æqualis erit: & cum omnis trianguli tres anguli duobus rectis ſint aequales; erunt trianguli ABD tres anguli ABD ADB BAD aequales duobus rectis. rectus autem eſt angulus BAD, ergo
29. primi. reliqui ABD ADB ſunt vni recto aequales, & ſunt aequales inter ſe ſe vterq; igitur ipſorum ABD ADB eſt recti dimidius. Sed rectus eſt BCG, aequalis nā-
6. primi. que eſt angulo oppoſito, qui ad A. reliquus igitur CGB dimidius eſt recti: ac propterea CGB angulus angulo CBG eſt ęqualis, & latus BC ęquale lateri CG. Sed CB eſt aequalis GK, & CG ipſi BK. aequilaterū igitur ē CK; & cū habeat rectū angulū CBK, etiā eſt quadratū; ꝙ quidem fit ex CB. eadē ratione & HF

quadratum

La pagina degli *Elementi* euclidei con il commento di Federico Commandino (Pesaro, 1619) in cui è riportata la proposizione 4 del II libro.

Conclusione

Anche nel caso dell'Algebra geometrica greca, dunque, la proposta di uno stimolo tratto dalla storia della disciplina non può essere considerata indipendentemente dagli importanti aspetti didattici ad essa collegati.

Quanto rilevato non sminuisce l'importanza della presenza della storia nella didattica della Matematica, che resta notevole; ma suggerisce l'opportunità di intervenire sulla struttura e sugli scopi della ricerca didattica, inserendo in essa come parte integrante una verifica empirica che renda evidenti gli effetti sull'apprendimento delle scelte dell'insegnante: proprio la presenza di questo aspetto sperimentale, che valorizza l'impiego dei riferimenti alla storia della Matematica, può modificare l'impostazione della ricerca didattica e quindi conferire ad essa un particolare statuto epistemologico (D'Amore, 1991 e 1999).

Bibliografia

Bagni, G.T. (1989), L'Aritmetica di Treviso, D'Amore, B. & Speranza F. (a cura di), *Lo sviluppo storico della matematica*, I, Armando, Roma, 27-34.

Bagni, G.T. (1994), Numeri e operazioni nel Medioevo. Larte de labbacho (l'Aritmetica di Treviso, 1478), *La matematica e la sua didattica*, 4, 432-444.

Bagni, G.T. (1995), Il primo manuale di matematica stampato al mondo. Larte de labbacho (Treviso, 1478), *Cassamarca*, 11, IX, 2, 77-82.

Bagni, G.T. (1996a), *Storia della Matematica. I. Dall'Antichità al Rinascimento. II. Dal Rinascimento ad oggi*, Pitagora, Bologna.

Bagni, G.T. (1996b), La visualizzazione nella didattica della matematica, *La Didattica*, II, IV, 19-96.

Bagni, G.T. (1997), La visualizzazione nella scuola secondaria superiore, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 20B, 4, 309-335.

Bagni, G.T. (1998), Visualization and didactics of mathematics in High School: an experimental research, *Scientia Paedagogica Experimentalis*, XXXV, 1, 161-180.

Bagni, G.T (1998), *Dopo Larte de labbacho. Manuali di Matematica dal* XV *al* XIX *secolo*, Quaderni dell'Ateneo n. 8, Treviso.

Bagni, G.T. (1999), Le serie numeriche dalla Storia alla Didattica della Matematica, Gagatsis, A. (a cura di), *A multidimensional approach to Learning in Mathematics and Sciences*, Intercollege Press, Nicosia, Cyprus, 183-194.

Boncompagni, B. (1862-1863), Intorno ad un trattato d'Aritmetica stampato nel 1478, *Atti dell'Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei*, XVI, XVI.

Calinger, R. (a cura di) (1996), *Vita mathematica: historical research and integration with teaching*, Mathematical Association of America.

Carruccio, E. (1972), *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, Pitagora, Bologna.

Chevallard, Y. (1989), Arithmetique, algebre, modelisation, *Publications de l'IREM d'Aix-Marseille*.

D'Acais F. & Porro, B. (a cura di) (1969), *L'Aritmetica di Treviso*, copia anastatica, Società Tipografica Cremonese, Roma.

D'Amore, B. (1991), Ricerca-azione, possibile paradigma della ricerca in didattica, *La scuola se*, 79-80, 14-17.

D'Amore, B. (1995), Lingue e linguaggi nella pratica didattica, Jannamorelli, B. (a cura di), *Atti del II Seminario internazionale di Didattica della Matematica di Sulmona, "Lingue e linguaggi nella pratica didattica"*, 30 marzo-1 aprile 1995", Sulmona 1995.

D'Amore, B. (1999), *Elementi di Didattica della Matematica*, Pitagora, Bologna.

D'Amore, B. & Frabboni, F. (1996), *Didattica generale e didattiche disciplinari*, Angeli, Milano.

Dieudonné, J. (1989), *L'arte dei numeri*, Mondadori, Milano (*Pour l'honneur de l'esprit humain*, Hachette, Paris 1987).

Euclide (1970), *Elementi*, Frajese, A. & Maccioni L. (a cura di), UTET, Torino.

Fauvel, J. (1990), History in the mathematical classroom, *IREM papers*, The Math. Ass.

Fauvel, J. (1991), *For the learning of mathematics* (numero speciale sulla storia), 11, 2.

Fauvel, J. & van Maanen, J. (1997), Storia e didattica della matematica, *Lettera Pristem*, 23, 8-13.

Feldman, C.F. & Toulmin, S. (1976), Logic and the theory of mind, Cole, J.K. (a cura di), *Nebraska symposium on motivation 1975*, University of Nebraska Press, Lincoln, London.

Furinghetti, F. (1993), Insegnare matematica in una prospettiva storica, *L'educazione matematica*, III, IV, 123-134.

Furinghetti, F. & Somaglia, A. (1997), Storia della matematica in classe, *L'educazione matematica*, XVIII, V, 2, 1.

Grugnetti, L. (1992), L'histoire des mathématiques: une expérience interdisciplinaire fondée sur l'histoire des mathématiques, *Plot*, 60, 17-21.

Kaldrimidou, M. (1987), *Images mentales et représentations en mathématiques chez les mathématiciens et les étudiants en mathématiques*, Thèse 3éme cycle, Université Paris 7, Paris 1987.

Kaldrimidou, M. (1995), Lo status della visualizzazione presso gli studenti e gli insegnanti di matematica, *La matematica e la sua didattica*, 2, 181-194.

Kline, M. (1991), *Storia del pensiero matematico*, I-II, Einaudi, Torino (*Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York, 1972).

Loria, G. (1929-1933), *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino (riedizione: Hoepli, Milano 1950; ristampa anastatica: Cisalpino-Goliardica, Milano 1982).

Neugebauer, O. (1974), *Le scienze esatte nell'Antichità*, Feltrinelli, Milano (*The exact sciences in Antiquity*, Brown University Press, Providence Rhode Island 1957).

Nobre, S. (a cura di) (1994), *Meeting of the International Study Group on relations between history and pedagogy of mathematics*, Blumenau, Brasile 25-27 luglio, UNESP.

Pepe, L. (1990), Storia e didattica della matematica, *L'educazione matematica*, III, I-2, 23-33.

Picutti, E. (1977), *Sul numero e la sua storia*, Feltrinelli, Milano.

Romano, G. (a cura di) (1969), *Larte de Lannacho*, Longo e Zoppelli, Treviso.

Swetz, F.J. (1989), Using problems from the history of mathematics in classroom instruction, *Mathematics teacher*, 82, 370-377.

Swetz, F.J. (1995), To know and to teach: mathematical pedagogy from a historical context, *Educational Studies in Mathematics*, 29, 73-88.

Van der Waerden, B.L. (1983), *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations*, Springer, Berlin.

Weil, A. (1980), History of mathematics: why and how, Letho, O. (a cura di), *Proceedings of International Congress of Mathematicians*, Helsinki 1978, I, 227-236.

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica
Università di Roma 'La Sapienza"