Capitolo 5

Ostacoli e apprendimento

5.1. TIPI DI OSTACOLI

5.1.1. Ostacoli e fallimenti

Sappiamo bene che l'apprendimento della matematica non è sempre lineare, semplice e indolore. Insomma, non sempre lo studente riesce a realizzare gli obiettivi didattici ed educativi connessi alla matematica: talvolta (spesso?) i nostri allievi "non capiscono", riescono soltanto in parte a raggiungere i livelli di apprendimento sperati o programmati.

La matematica, tradizionalmente, è considerata una materia "difficile". Proprio per questa ragione, molto spesso, la matematica "fa paura".

Perché accade ciò? Da che cosa dipendono le interruzioni, i blocchi improvvisi, i fallimenti nell'apprendimento della matematica? Quali elementi rendono difficoltosa (talvolta apparentemente quasi impossibile) la "crescita matematica" di uno studente della scuola secondaria superiore?

Evidentemente non è semplice rispondere in modo adeguato e completo a queste domande. Come vedremo, molti importanti elementi, alcuni dei quali già sfiorati nei capitoli precedenti, concorrono a costituire la tradizionale, temuta (inevitabile?) difficoltà che accompagna la matematica.

Bisogna innanzitutto considerare che i presunti ostacoli collegati all'apprendimento della matematica sono spesso rilevati mediante prove oggettive di valutazione, come la risoluzione di problemi e di esercizi nel corso di interrogazioni o di prove scritte[1]. E, frequentemente, eventuali fallimenti in queste prove sono determinati da elementi che possono anche essere in parte o del tutto estranei all'effettiva comprensione dei contenuti matematici in esame.

---

[1] Ricordiamo che, nel caso della risoluzione di problemi, il fallimento può avvenire nelle fasi seguenti (D'Amore, 1993a):

❶ *Lettura* del testo.
❷ *Comprensione* (traduzione) del testo.
❸ *Trasformazione* del testo in modelli (grafici etc.).
❹ *Applicazione* della tecnica risolutiva (aritmetica etc.).
❺ *Codificazione* della risposta.

Secondo la *tesi di Clemens*, il fallimento avviene molto spesso nelle fasi ❶, ❷, ❸ (Clemens, 1980).

Ad esempio, ogni insegnante sa bene che un fallimento (anche pesante) in una prova scritta di matematica può essere determinato da diverse componenti emotive, da elementi caratteriali, o addirittura da condizioni esterne all'allievo (Gagné, 1973)[2].

Senza con ciò trascurare l'importanza di tali componenti, in questo capitolo ci occuperemo particolarmente delle questioni collegate in modo specifico all'apprendimento dei contenuti matematici.

5.1.2. Gli ostacoli: una prima classificazione

Per affrontare proficuamente l'argomento in questione, riteniamo opportuno classificare innanzitutto gli ostacoli che possono rendere arduo il superamento delle difficoltà nell'apprendimento della matematica.

A tale proposito, seguiamo la classificazione di G. Brousseau (faremo dunque riferimento a: Brousseau, 1983, come ricordato in: D'Amore, 1993a), il quale individua:

❶ *Ostacoli di origine ontogenetica*. Si tratta di ostacoli che dipendono dai limiti neuro-fisiologici dell'allievo. Ogni insegnante sa che di fronte a sé non vengono a trovarsi studenti "ideali", pressoché perfetti, bensì ragazzi in carne ed ossa, talvolta limitati, insicuri: queste caratteristiche possono influenzare (negativamente) il rendimento scolastico (Pontecorvo, 1981).

❷ *Ostacoli di origine didattica*. Dipendono dal sistema educativo adottato, dalle scelte operate dall'insegnante: dunque proprio l'insegnante può operare in termini decisivi per limitare l'influenza di questo genere di ostacoli.

❸ *Ostacoli di natura epistemologica*. Dipendono dalla natura della disciplina (e sono, dunque, inevitabili). Inutile illudersi: alcuni contenuti matematici *non* sono banali, *non* sono immediatamente comprensibili. Se, da un lato, è assurdo che l'allievo "rinunci in partenza", che finisca per trincerarsi dietro ad un "io non ce la farò mai a capire questa roba" (atteggiamento, purtroppo, non del tutto infrequente), d'altro canto è sciocco e controproducente presentare tutta la matematica come un elementare e divertente giochetto. *Non è così*. La matematica è bella, certo; e vale davvero la pena di impegnarsi a fondo per comprendere la sua eleganza. Ma non sempre la matematica è "facile" (si veda anche: Glaeser, 1984).

---

[2] Con ciò si intende ad esempio: stimoli (fisici, verbali, non-verbali, iconici...), condizioni ambientali (rumore, temperatura, pressione, luce...), esplicite direttive verbali da parte dell'insegnante, altre istruzioni (informazioni sulla natura delle soluzioni richieste, sulle regole da impiegare, sul processo da seguire...) (Gagné, 1973; D'Amore, 1993a).

La classificazione di Brousseau merita di essere discussa per le non banali implicazioni epistemologiche che comporta; ma può essere adottata, almeno in prima approssimazione, per la sua evidente chiarezza.

In questo lavoro ci occuperemo principalmente degli ostacoli di origine didattica. In particolare, esamineremo gli ostacoli dipendenti dal linguaggio nell’apprendimento di alcuni argomenti di matematica.

5.2. OSTACOLI E LINGUAGGIO

5.2.1. Leggibilità

Le nostre lezioni, i testi dei problemi, le domande che proponiamo ai nostri allievi durante le prove orali sono in gran parte espressi mediante frasi, mediante parole, termini tratti dal linguaggio naturale e dal cosiddetto linguaggio matematico. Una delle principali questioni che, in qualità di insegnanti, dobbiamo (continuamente) affrontare è dunque la seguente: siamo davvero sicuri che il nostro interlocutore (l’allievo) sia in grado di comprendere il nostro messaggio (ad esempio: la domanda posta, il testo dell’esercizio, l’enunciato del problema, il contenuto delle nostre spiegazioni)?

Si tratta evidentemente di un argomento molto delicato, che non ci illudiamo di poter trattare completamente in poche pagine: ma, considerata la sua importanza, cercheremo di fornire al lettore lo spunto per qualche riflessione ed alcune indicazioni per ulteriori approfondimenti.

Esaminiamo innanzitutto il complesso problema della comprensibilità di un testo scritto.

Un’osservazione di A. Gagatsis sottolinea l’importanza della lettura di un testo matematico:

«La lettura è superiore in efficacia rispetto agli altri mezzi di informazione. Il lettore può sempre tornare sul suo testo per approfondirne progressivamente il contenuto (per esempio in matematica), cosa che non si potrebbe fare ascoltando la radio. D’altra parte, si sa che la lettura permette di comprendere un messaggio circa 3 volte più velocemente rispetto al semplice ascolto (27000 parole lette ogni ora, contro 9000 parole ascoltate)» (Gagatsis, 1995).

Ma è (sempre) semplice leggere e comprendere un testo in generale, e un testo matematico in particolare?

Per dare un’idea al lettore di come è possibile valutare la “facilità” di un testo, proponiamo la *formula di leggibilità di R. Flesh* (originariamente elaborata per la lingua inglese, adattata al francese da L. Kaudel e A. Moles ed al greco: Gagatsis, 1995). La *facilità* di un testo può essere espressa dalla quantità seguente:

$$206{,}85 - 0{,}59x - 1{,}015y$$

con: x = numero di sillabe per 100 parole

y = numero di parole per frase

Indicando con p il numero di parole, con s il numero di sillabe e con f il numero di frasi, otteniamo per la facilità:

$$206{,}85 - \frac{s \cdot 100}{p} \cdot 0{,}59 - \frac{p}{f} \cdot 1{,}015$$

Va sottolineato che la formula ora ricordata è costruita per testi letterari; la sua applicazione a testi matematici può dunque essere difficoltosa. Ma è interessante indicare qualche esempio.

Consideriamo il testo A:

«Nei primi decenni del Duecento la diffusione in Europa dei risultati matematici arabi ed indiani è uno dei più importanti elementi di rinascita della matematica occidentale. La figura di maggior rilievo in ambito europeo è Leonardo da Pisa detto Fibonacci. Figlio di un funzionario pisano, Leonardo viaggia molto; egli ha quindi la possibilità di entrare in contatto con le tradizioni culturali straniere. Pubblica il *Liber Abaci*, opera fondamentale per la storia della matematica. La fortuna dei manuali di matematica, in particolare di quelli di aritmetica pratica, risale dunque ad alcuni secoli prima dell'introduzione della stampa a caratteri mobili».

In questo caso, abbiamo:

$p = 99$ $s = 247$ $f = 6$

e dunque la facilità del testo (A) è: $206{,}85 - \frac{s \cdot 100}{p} \cdot 0{,}59 - \frac{p}{f} \cdot 1{,}015 = 42{,}9$.

Consideriamo il testo B:

«La Didattica della Matematica si colloca sempre in un contesto sociale, all'interno di alcuni tipi di strutture istituzionali, dove una parola chiave che caratterizza la situazione è *umanizzazione*. La Matematica è intesa come una disciplina specificamente benevola, non caratterizzata da severità e intolleranza, ma dall'apertura verso un ampio spettro di approcci. Ci si focalizza sugli studenti come singoli, con il loro personale sviluppo, con le loro necessità, ma anche sulle relazioni tra coloro che professionalmente intervengono nella Didattica della Matematica. I procedimenti matematici sono considerati molto più dei prodotti matematici, non richiedendo specifici obiettivi».

In questo secondo caso, abbiamo:

$p = 96$ $\qquad s = 253$ $\qquad f = 4$

e dunque la facilità del testo (B) è: $206{,}85 - \frac{s \cdot 100}{p} \cdot 0{,}59 - \frac{p}{f} \cdot 1{,}015 = 27{,}0$.

Possiamo quindi concludere che (limitatamente all'analisi condotta mediante la formula di Flesh, sopra ricordata), il testo (A) risulta più "leggibile" del testo (B)[3].

5.2.2. Variabili redazionali

Le formule di leggibilità sono però riferite esclusivamente all'aspetto formale; esse forniscono indicazioni certamente interessanti, ma che non possono essere considerate esaustive. In altri termini, non è sufficiente che un testo abbia un elevato indice di leggibilità, ad esempio secondo la formula di Flesh, affinché tale testo possa essere considerato chiaro e didatticamente efficace. Per stabilire se un testo matematico (ad esempio l'enunciato di un problema) è davvero comprensibile, dobbiamo evidentemente condurre un attento esame critico anche dei suoi contenuti (Goldin & Caldwell, 1979; Webb, 1979).

A tale proposito, C. Laborde ha proposto le seguenti *variabili redazionali* da valutare nell'enunciato di un problema:

❶ Grado di esplicitazione ottenuto dall'impaginazione, dalla punteggiatura e dalle strutture sintattiche impiegate.

❷ Complessità sintattica.

❸ Densità dell'enunciato.

[3] In effetti, il testo (A) è tratto da una pubblicazione destinata a studenti della scuola secondaria, il testo (B) da un articolo specialistico in didattica della matematica.

❹ Ordine delle informazioni fornite.

❺ Differenza tra la forma in cui le informazioni sono date e quella in cui le si deve trattare nella risoluzione.

❻ Grado di esplicitazione degli oggetti intermedi utili alla risoluzione del problema (Laborde, 1995).

Analizziamo ora, seguendo l’impostazione di Laborde, il semplice testo seguente:

Calcolare il rapporto delle altezze di due rettangoli equivalenti con le basi rispettivamente di 12 cm e di 15 cm.

L’enunciato di questo problema appare sintetico, ben posto: ma è davvero chiaro? È didatticamente efficace?
Prima di rispondere dovremmo dare un’esauriente definizione di questa “efficacia didattica” (e vedremo tra poco che una tale definizione è tutt’altro che scontata). Possiamo però esaminare punto per punto le variabili redazionali:

① La punteggiatura non è utilizzata. Il citato “rapporto delle altezze” potrebbe essere riferito ad entrambe le situazioni:

altezza maggiore : altezza minore altezza minore : altezza maggiore

e ciò può essere causa di perplessità.

② L’enunciato appare complesso: è costituito da un solo periodo, con una proposizione subordinata. Il termine “rispettivamente” richiede attenzione da parte dell’allievo.

③ L’enunciato (appena di due righe) appare piuttosto denso.

④ La domanda è posta all’inizio.

⑤ Le informazioni sono date nell’ordine inverso rispetto a quello in cui esse possono essere trattate, ad esempio, in una risoluzione del tipo:

altezza A = area A : base A = area A : 12 cm

altezza B = area B : base B = area B : 15 cm

(essendo area A = area B) altezza A : altezza B =

= (area A : 12 cm) : (area B : 15 cm) = 15 : 12 = 5/4

⑥ L’informazione relativa al passaggio fondamentale (l’uguaglianza delle aree) è appena accennata ed è celata nel termine “equivalente”.

Non possiamo certo dire che la situazione delle variabili redazionali così rilevata sia tale da favorire la comprensione e da agevolare la risoluzione da parte dell’allievo. Proviamo dunque a “migliorare le cose”, ovvero a riscrivere l’enunciato del problema assegnato nel modo seguente (Bagni & Giovannoni, 1996):

> *Il rettangolo A ha la base di 12 cm; il rettangolo B ha la base di 15 cm. L’area del rettangolo A è uguale all’area del rettangolo B.*
>
> *Calcolare il rapporto tra l’altezza del rettangolo A e l’altezza del rettangolo B.*

Esaminiamo nuovamente il testo secondo l’impostazione di Laborde:

❶ La punteggiatura è utilizzata. Il “rapporto delle altezze” richiesto viene indicato esplicitamente.

❷ L’enunciato, ora costituito da quattro proposizioni distinte, appare meno complesso. Non compare il (pericoloso) termine “rispettivamente”.

❸ L’enunciato (di cinque righe) è lungo, ma non è particolarmente denso.

❹ La domanda è posta alla fine ed è chiaramente evidenziata (si va addirittura a capo).

❺ Le informazioni sono date nell’ordine in cui possono essere trattate nella risoluzione (accennata al precedente punto ⑤).

❻ L’informazione relativa al passaggio fondamentale (l’uguaglianza delle aree) è ora ben evidenziata.

Dobbiamo dunque concludere che il testo del problema, così riformulato, è “migliore” del testo precedente? No, non possiamo affermarlo, in quanto non esiste, in assoluto, *un* criterio per stabilire quando un testo sia da considerare “migliore” di un altro. Se per “migliore” intendiamo più comprensibile, più “facile”, allora riteniamo che il testo riformulato debba essere preferito a quello originale; *ma non è detto che sia così*: ad esempio, è possibile che l’insegnante abbia voluto proporre il testo meno “facile” proprio per saggiare, negli allievi, la capacità di interpretare un testo impegnativo.

È tuttavia importante sottolineare che gli ostacoli connessi alla lettura e all'interpretazione del testo costituiscono un aspetto fondamentale di un problema, un elemento spesso decisivo a proposito della sua difficoltà. Dunque, i due problemi espressi da:

Calcolare il rapporto delle altezze di due rettangoli equivalenti con le basi rispettivamente di 12 cm e di 15 cm.

Il rettangolo A ha la base di 12 cm; il rettangolo B ha la base di 15 cm. L'area del rettangolo A è uguale all'area del rettangolo B.
Calcolare il rapporto tra l'altezza del rettangolo A e l'altezza del rettangolo B.

hanno forse la stessa risoluzione, ma *non* la stessa difficoltà. *Non* sono lo stesso problema[4].

5.2.3. La delicata questione del rigore

Uno degli obiettivi che molti insegnanti si propongono è di portare i propri allievi alla comprensione e all'uso di un linguaggio matematico "rigoroso". Lodevole intenzione, in generale. Ma essa necessita di qualche chiarimento, al fine di evitare pericolosissimi malintesi: quando un'espressione matematica (ovvero: riguardante argomenti matematici) può essere considerata, in effetti, rigorosa? Insomma, che cosa significa "rigore"? E quale "rigore" possiamo e dobbiamo esigere dai nostri allievi?

---

[4] Nello stesso lavoro, la ricercatrice francese suggerisce alcune attività per migliorare la capacità di lettura degli enunciati dei problemi:

- domandare agli allievi di risolvere problemi con dati superflui;
- domandare agli allievi di produrre un testo (ad esempio: un problema) destinato a dei compagni:
- porre agli allievi domande sul contenuto di testi: una data informazione è presente? C'è un'informazione che ne implichi un'altra, o che la contraddica?
- ricomporre un testo dato in più pezzi;
- trovare la domanda di un problema di cui si dia una soluzione;
- redigere alla maniera di questo o di quell'altro enunciato l'enunciato di un problema (Laborde, 1995).

Cercheremo di rispondere a queste (insidiose) domande esaminando innanzitutto la traccia di un problema, tratta da un libro di testo di geometria elementare utilizzato nelle scuole secondarie:

L'area di un trapezio isoscele è m² 324 e la sua altezza è m 27. Calcolare le basi sapendo che la maggiore è tripla della minore.

Dedicheremo qualche pagina all'analisi approfondita di questo enunciato, apparentemente chiaro e corretto. Un suo attento esame, infatti fa sorgere qualche perplessità:

I.	*L'area... è m² 324...*	Come va espressa l'area? Qual è il ruolo dell'unità di misura?
II.	*Calcolare le basi...*	Posso... "calcolare" dei segmenti?

Prima di procedere, ricordiamo alcune riflessioni sui concetti, continuamente impiegati proprio nelle questioni di geometria elementare, di segmento, di misura, di superficie, di area, di volume. Iniziamo dai segmenti. Com'è noto, è necessario distinguere tra:

• Segmento	*Figura geometrica (parte di retta)*
• Estensione di un segmento (spesso non considerata)	*Ciò che hanno in comune più segmenti congruenti*
• Misura di un segmento	*Rapporto tra il segmento dato e un segmento scelto come unità di misura (non è necessario ricorrere alle loro estensioni)* Attenzione: la misura è dunque un numero puro e va espressa così: $\overline{AB} = 12$ (rispetto al metro)

È importante osservare che, per i segmenti, congruenza ed equivalenza coincidono; ciò significa che il confronto di segmenti può avvenire anche senza considerare l'estensione.

Consideriamo ora le figure piane:

• Figura piana	*Figura geometrica (parte di piano)*
• Estensione superficiale (è fondamentale, nel caso delle figure piane)	*Ciò che hanno in comune più figure piane equivalenti (ma non necessariamente congruenti)*
• Area (misura di una figura piana)	*Rapporto tra la figura data e una figura scelta come unità di misura (nel senso dell’equivalenza: quindi è il rapporto tra le loro estensioni superficiali)* Attenzione: è un numero puro e va dunque espressa così: Area(ABC) = 12 (rispetto al metro quadrato)

Per le figure piane congruenza ed equivalenza non coincidono! Il confronto di figure piane non può avvenire senza considerare l’estensione.

Accenniamo infine, per amor di completezza, alle figure solide (sebbene il problema sopra considerato riguardi la geometria piana):

• Figura solida	*Figura geometrica (parte di spazio)*
• Estensione spaziale (fondamentale, nel caso delle figure solide)	*Ciò che hanno in comune più figure solide equivalenti (ma non necessariamente congruenti)*
• Volume (misura di una figura solida)	*Rapporto tra la figura data e una figura scelta come unità di misura (nel senso dell’equivalenza: quindi è il rapporto tra le loro estensioni spaziali)* Attenzione: è un numero puro e va dunque espresso così:

Volume(ABCDE) = 60

(rispetto al metro cubo)

Per le figure solide, come per quelle piane, congruenza ed equivalenza non coincidono. Il confronto di figure solide non può avvenire senza considerare l'estensione.

Alla luce delle considerazioni precedenti, possiamo cercare di "correggere" la traccia inizialmente proposta, che riportiamo nuovamente:

L'area di un trapezio isoscele è m² 324 e la sua altezza è m 27. Calcolare le basi sapendo che la maggiore è tripla della minore.

Questo enunciato, adesso, *non* ci sembra sufficientemente rigoroso. Ricordiamo infatti le nostre iniziali perplessità:

I. *L'area... è m² 324...* Qual è il ruolo dell'unità di misura?

La risposta, ora, appare semplice: l'area è una misura e quindi è un numero puro (un rapporto di grandezze omogenee): il numero che la esprime *non* deve dunque essere preceduto o seguìto dall'unità di misura.

II. *Calcolare le basi...* Posso... "calcolare" dei segmenti?

Evidentemente no: i segmenti sono *figure geometriche*. Possono essere calcolati dei numeri (ovvero, ad esempio, le *misure* delle figure), ma non delle figure geometriche!

Ecco dunque la nostra traccia "riveduta e corretta" (essa fa sempre riferimento a misure: esprimiamo anche l'altezza in termini di misura):

L'area di un trapezio isoscele è 324 rispetto al m² e la misura della sua altezza è 27 rispetto al m. Calcolare le misure delle basi sapendo che la maggiore è tripla della minore.

Bene, senza dubbio abbiamo fatto molti passi nella direzione di un linguaggio (pienamente?) "rigoroso". Ma... che fatica! Le considerazioni precedenti sono state infatti dettate da uno sviluppo attento e preciso della teoria, uno sviluppo che richiede evidentemente molta cautela e che coinvolge concetti anche piuttosto delicati[5]. E non possiamo dimenticare che tali osservazioni riguardano un ben limitato settore della matematica: distinzioni analoghe (se non addirittura più profonde) dovrebbero essere messe a punto *per ogni altro campo della matematica*, per ogni altro argomento.

Ma possiamo (dobbiamo) esigere dai nostri allievi una simile attenzione?

Non pretendiamo di dare una risposta secca, valida sempre e per tutti[6]. Per evitare equivoci, ripetiamo quanto affermato all'inizio di questo paragrafo: il tentativo di portare i propri allievi ad impiegare un linguaggio matematico "rigoroso" è una lodevole intenzione, è un obiettivo importante per ogni insegnante. Non intendiamo certamente avallare una pratica matematica linguisticamente scorretta o comunque approssimativa! Tuttavia ogni insegnante deve essere consapevole delle reali difficoltà che l'uso di questo linguaggio "rigoroso" comporta per l'allievo, difficoltà che si sovrappongono, spesso pesantemente, a quelle che la risoluzione di un problema già comporta (si veda: D'Amore & Plazzi, 1990).

Non dovremmo inoltre dimenticare che anche la storia della matematica ha visto una continua evoluzione del concetto di "rigore". Nota a tale proposito U. Bottazzini:

«Il rigore in matematica è anch'esso un concetto 'storico' e dunque in divenire… Appellarsi all'esigenza del rigore nello spiegare lo sviluppo della matematica sembra in realtà un discorso circolare: di fatto, alla formulazione di

---

[5] In effetti, bisognerebbe distinguere fra:

➊ Grandezze di primo genere (esempi: segmenti, angoli piani, …): la relazione di equivalenza coincide con quella di congruenza (coppie di grandezze equivalenti sono anche congruenti).

➋ Grandezze di secondo genere (esempi: poligoni, prismi, …): la relazione di equivalenza coincide con quella di equiscomponibilità ma non con quella di congruenza (coppie di grandezze equivalenti sono equiscomponibili, ma esistono coppie di grandezze equivalenti non congruenti).

➌ Grandezze di terzo genere (esempi: figure piane aventi contorni mistilinei, poliedri, …): la relazione di equivalenza non coincide con quella di equiscomponibilità (esistono coppie di grandezze equivalenti non equiscomponibili) (Amaldi, 1900).

[6] Ricordiamo ancora alcune considerazioni di U. Amaldi che riguardano l'argomento trattato nelle pagine precedenti: «È possibile sviluppare tutta la teoria elementare delle grandezze poligonali e poliedriche senza introdurre nessun nuovo postulato oltre quelli dell'*appartenenza*, dell'*ordinamento* e della *congruenza*. E si può anche notare che gli sviluppi a ciò necessari non sono più elevati, né più laboriosi di altre teorie che, per unanime consenso, sono considerate come accessibili alla maggioranza degli alunni delle scuole medie. Cionondimeno noi crediamo che un tale assetto della teoria non sia didatticamente raccomandabile. La concezione delle *superficie* e dei *volumi* quali *grandezze* è di una evidenza altrettanto spontanea, quanto ciascuna delle altre verità intuitive, che si sogliono assumere a postulati» (Amaldi, 1900).

nuovi *standard* di rigore si perviene quando i vecchi criteri non permettono una risposta adeguata alle domande che vengono dalla pratica matematica» (Bottazzini, 1981, p. 13).

E scrive il “rigorosissimo” N. Bourbaki:

«È da venticinque secoli che i matematici hanno l’abitudine di correggere i loro errori e vedere così la loro scienza arricchita, e non impoverita; ciò dà loro il diritto di guardare al futuro con serenità» (Bourbaki, 1963).

Ogni errore, dunque, può essere proficuamente corretto; anche qualche carenza di rigore può essere utilmente rilevata e, dopo un’adeguata motivazione, rettificata.

A ciascun insegnante spetta dunque il non facile compito di valutare attentamente il ruolo (meditato, equilibrato) da assegnare al rigore ed alla correttezza formale nell’ambito della propria programmazione, tra i propri obiettivi didattici. Rinunciare ad un’espressione corretta significa abbandonare un’importante aspetto, una fondamentale caratteristica della matematica. Fare dell’espressione formale il primissimo (o l’unico!) obiettivo del proprio insegnamento può rivelarsi altrettanto sbagliato e deleterio.

5.2.4. Il… “matematichese”

Prima di abbandonare l’importante e delicata questione del rigore, segnaliamo un rischio che una poco oculata gestione dell’argomento potrebbe comportare: l’impiego, da parte degli allievi, di un “linguaggio pseudo-matematico” costituito dall’accostamento di termini tratti da libri di testo, da espressioni utilizzate dall’insegnante nel corso delle spiegazioni; un accostamento, però, in parte o del tutto privo di significato. La nascita, insomma, di un terribile “matematichese”, di una vuota, inutile e dannosa accozzaglia di termini che nulla ha ormai a che fare con il benché minimo contenuto matematico.

Come è possibile che accada ciò? Semplice, purtroppo: l’allievo, magari in difficoltà nel corretto apprendimento di qualche contenuto matematico, cerca di imitare l’insegnante, cerca di rifarsi (almeno con qualche parola!) al libro di testo, con ciò sperando di “dare un’impressione positiva”, di ottenere quindi comunque l’agognata “sufficienza”. Abbiamo già visto qualcosa del genere nel capitolo precedente, dedicato al contratto didattico. L’allievo sembra pensare: il mio insegnante mi valuterà positivamente soltanto se riuscirò a fare ciò che lui mi chiede; ebbene, ciò che lui mi chiede (l’ho già constatato nelle spiegazioni, in altre interrogazioni, nel libro di testo che mi viene chiesto di utilizzare) è un “discorso” infarcito da “termini matematici”; pertanto non mi resta che usare, comunque, questi benedetti termini, cercando di dare un tono altisonante alla mia esposizione.

Il risultato? Un completo disastro. L'apprendimento non migliora di certo, e al contempo i termini matematici, così banalizzati, perdono il loro significato e, dunque, la loro importanza. La preoccupazione di "dover usare un ben determinato linguaggio", nella mente già disorientata dell'allievo, si sovrappone all'esigenza di "capire": la situazione di confusione finisce dunque per peggiorare. E la stessa immagine della matematica, forse già debole nella concezione del povero studente, crolla. Definitivamente.

È evidente che non c'è più alcunché di corretto, di "rigoroso" in una situazione come quella ora descritta. Il disperato tentativo di utilizzare qualche termine "matematico" rincorrendo qualche definizione, qualche teorema, qualche dimostrazione non può essere considerato didatticamente utile, da alcun punto di vista[7].

Non ci resta pertanto che ribadire quanto già anticipato nel paragrafo precedente, ovvero che la ricerca di un'espressione rigorosa dei contenuti matematici deve essere condotta con l'indispensabile prudenza[8].

---

[7] La questione è piuttosto complicata e non è certo esaurita in questa sede. Il lettore potrà consultare ad esempio: D'Amore, 1993b; Maier, 1993.

[8] Non sarà inutile sottolineare che anche nei testi ministeriali proposti come traccia per la prova scritta degli esami di maturità rileviamo la presenza di qualche "infortunio formale" (si veda la ricerca riportata in appendice indicata con la lettera B). Limitandoci ai casi più recenti, troviamo ad esempio nella traccia proposta all'esame di maturità scientifica 1993, sessione ordinaria, l'assegnazione della qualifica di funzione ($x \rightarrow y$) ad una relazione ($x \rightarrow y$) espressa da $y = \pm f(x)$ (Bagni, 1993a). Più grave è la situazione della traccia della maturità scientifica 1995, sessione ordinaria, in cui leggiamo: «Nel cubo di vertici A, B, C, D, E, F, G, H le facce ABCD e EFGH sono opposte ed i segmenti AE, BF, CG sono spigoli. Inoltre gli spigoli del cubo hanno lunghezza unitaria. Sullo spigolo BF prendere un punto P tale che: $\overline{BP} = x$. a) Verificare che la distanza y di P dalla diagonale AG è espressa dalla seguente funzione: $y = \sqrt{\frac{2}{3}\left(x^2 - x + 1\right)}$. b) Di essa disegnare il grafico in un sistema di assi cartesiani ortogonali (Oxy), dopo aver trovato, fra l'altro, le equazioni dei suoi asintoti». Consideriamo il problema geometrico così descritto: l'appartenenza di P allo spigolo BF di "lunghezza unitaria", con $\overline{BP} = x$, impone la limitazione $0 \leq x \leq 1$: non ha alcun senso affermare (senza specificare il dominio!) che la distanza y di P dalla diagonale AG è espressa dalla $y = \sqrt{\frac{2}{3}\left(x^2 - x + 1\right)}$. Sarebbe stato necessario indicare tale funzione precisandone il dominio, che *non* è tutto **R**. E la richiesta al punto (b) (di essa disegnare il grafico in un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, *dopo aver trovato, fra l'altro, le equazioni dei suoi asintoti*) diventa davvero problematica: non è facile considerare gli asintoti di una funzione continua definita nell'intervallo chiuso e limitato [0; 1]. Come la mettiamo, ad esempio, con il teorema di Weierstrass? (Bagni, 1995).

5.2.5. Dimostrare e convincere

Spesso, nei corsi scolastici di matematica e nei libri di testo (anche se questo aspetto non si riferisce alla scuola primaria), la dimostrazione viene considerata il momento essenziale dell'intera trattazione di una questione matematica, anche dal punto di vista didattico. Talvolta questa impostazione porta ad attribuire alla dimostrazione un ruolo preponderante: osserva F. Speranza che «siamo stati educati nell'ideale aristotelico-euclideo nel quale la matematica viene presentata secondo lo schema *enunciati-dimostrazioni*. Siamo arrivati a far coincidere con questo stile la *sostanza* della razionalità matematica» (Speranza, 1992, p. 135).

Non intendiamo negare l'importanza primaria della dimostrazione, sia per la ricerca sia nell'ambito della didattica disciplinare; eppure, nota ancora Speranza, «in quanto alla pratica matematica, le dimostrazioni sono solo una parte del lavoro (anche per i matematici 'puri'): essa è preceduta da una fase di intuizioni, di congetture, di tentativi che via via si perfezionano» (Speranza, 1992, p. 135).

Il ruolo di questa fase pre-dimostrativa, generalmente affidata a capacità di intuizione[9] prima ancora che di organizzazione razionale della dimostrazione, è rilevante (Mazzanti & Piochi, 1990; Dapueto, 1992, p. 39), soprattutto se si considera che «la dimostrazione… non dà necessariamente il massimo convincimento» (Speranza, 1992, p. 137). Osserva E. Fischbein:

«*Capire intuitivamente* non significa semplicemente *vedere*... Dobbiamo considerare tre livelli di accettazione intuitiva. Un primo livello si riferisce al fatto espresso dall'affermazione stessa... Un secondo livello si riferisce alla struttura della dimostrazione: un allievo può capire intuitivamente il significato di un teorema ma può non essere in grado di capire intuitivamente la struttura della rispettiva dimostrazione (sebbene sia in grado di memorizzare e di capire formalmente i suoi passi)… Il terzo livello si riferisce al fatto di capire la

[9] Sul significato del termine intuizione in ambito matematico, F. Furinghetti annota (riferendosi a Davis & Hersh, 1980, p. 391): «Il problema del significato dell'intuizione è prima di tutto glottologico... L'ambiguità e il mistero che circonda questo termine possono spiegarsi col fatto che nell'immagine comune la matematica è associata alla pura deduzione logica, per cui ogni fatto discende strettamente e 'fatalmente' dai precedenti; certi processi di acquisizione di nuova conoscenza (e, tra essi, in particolare, le scoperte/invenzioni matematiche) sembrano avvenire saltando alcuni anelli della catena di deduzioni e… creano la necessità di un elemento 'estraneo' (l'intuizione, appunto) che entri in gioco a spiegare ciò che è avvenuto» (Furinghetti, 1992, p. 85). Citiamo E. Fischbein: «La più diffusa interpretazione di intuizione è che l'intuizione è senso comune… Il fatto che questa identificazione è in parte corretta ha probabilmente bloccato gli interessi degli psicologi nello studio del fenomeno dell'intuizione» (Fischbein, 1993, p. 1).

validità universale dell'affermazione come garantita ed imposta dalla validità della dimostrazione» (Fischbein, 1993, p. 22).

Tali idee si riflettono sulla concezione e sul ruolo della dimostrazione:

«Formalmente non c'è differenza tra l'accettare la correttezza di una dimostrazione matematica e l'accettare l'universalità di un'affermazione come garantita da quella dimostrazione. Il fatto che, per l'alunno, ci sia differenza tra accettare una dimostrazione ed accettare l'universalità dell'asserto provato da essa dimostra che si può prendere in considerazione un elemento in più. Tale elemento aggiuntivo è costituito dal bisogno di un'accettazione intuitiva complementare della capacità predittoria assoluta di un'affermazione che è stata formalmente provata» (Fischbein, 1993, pp. 22-23; si veda anche: Lolli, 1989).

La dimostrazione è certamente una fase fondamentale dell'apprendimento della matematica; ma non bisogna dimenticare che non sempre essa è in grado di convincere pienamente l'allievo, di catturare la sua attenzione. Emotivamente, l'allievo può restare in parte o del tutto insensibile ad una "tradizionale" dimostrazione, mentre può essere affettivamente coinvolto, in termini spesso decisivi, da un'argomentazione più vicina all'esperienza, ad una procedura (praticamente) ripetibile, sebbene, forse, meno "rigorosa"[10].

Ricordiamo un'osservazione di uno dei più importanti matematici contemporanei, Jacques Hadamard (1865-1963):

«Che un elemento affettivo sia parte di ogni scoperta o invenzione è sin troppo evidente, e molti pensatori vi hanno già insistito: è chiaro che nessuna scoperta o invenzione significativa può aver luogo senza la volontà di scoprire» (Hadamard, 1993).

A. Rogerson e M. Arora citano un'interessante annotazione di un non meglio precisato "collega giapponese":

---

[10] La questione del rigore (anche dal punto di vista linguistico) è molto delicata. U. Bottazzini evidenzia la storicità di tale aspetto della matematica: «Il rigore in matematica è anch'esso un concetto 'storico' e dunque in divenire… Appellarsi all'esigenza del rigore nello spiegare lo sviluppo della matematica sembra in realtà un discorso circolare: di fatto, alla formulazione di nuovi *standard* di rigore si perviene quando i vecchi criteri non permettono una risposta adeguata alle domande che vengono dalla pratica matematica» (Bottazzini, 1981, p. 13). La questione è complessa e non può essere certo esaurita in poche battute; il lettore potrà consultare ad esempio: D'Amore, 1993; Maier, 1993a e 1993b; Zan, 1995; Pellerey & Orio, 1996.

«È importante fare ricerca matematica nella propria lingua, in quanto la ricerca coinvolge la persona intera, conoscenza e sentimenti, testa e cuore. Fare matematica in una lingua straniera è come impegnarsi in un incontro di pugilato tenendo una mano dietro la schiena» (citato in: Rogerson & Arora, 1995, p. 496).

Dunque il ruolo dell'aspetto affettivo si conferma fondamentale nell'apprendimento della matematica, particolarmente per quanto riguarda l'accettazione di fatti matematici (per l'allievo) sorprendenti, in aperto contrasto con «alcuni preesistenti frammenti pre-matematici» (e proprio la presenza di tali "frammenti" è una delle principali cause di misconcezioni: Davis & Vinner, 1986, pp. 298-300).

Concludiamo facendo nostra un'osservazione di F. Speranza, riferita primariamente al ruolo didattico della dimostrazione e dell'esperienza concreta in geometria (ma immediatamente estesa all'aritmetica e all'algebra):

«Molti insegnanti di matematica sono convinti che attraverso le dimostrazioni gli studenti imparino sia i 'contenuti' sia la 'struttura logica' della disciplina, e siano educati allo 'spirito critico'. Almeno per la geometria, sono profondamente convinto che questa sia un'illusione. Anzitutto i 'fatti spaziali' si imparano per esperienza concreta (in certa misura, anche quella offerta dal metodo delle coordinate); del resto, anche altri settori, nei quali i fatti sono meno 'palpabili', come l'aritmetica e l'algebra, si apprendono anzitutto affrontando problemi, escogitando metodi di risoluzione» (Speranza, 1992, p. 136).

5.2.6. Quasi una conclusione

Al termine di questo capitolo una questione si presenterà spontaneamente all'attenzione del lettore: abbiamo constatato la possibile presenza di molti ostacoli che rendono difficoltoso (ed a volte, purtroppo, gravemente!) l'apprendimento; ebbene, alla luce di ciò, quale può essere il corretto atteggiamento di noi insegnanti? Come possiamo effettivamente ed efficacemente aiutare il nostro allievo in difficoltà? Come possiamo davvero migliorare il nostro insegnamento e, *soprattutto*, il suo apprendimento?

Ancora una volta non pretendiamo di dare una risposta assoluta a quella che può essere considerata una delle principali domande che un insegnante può porsi (e che spesso, in effetti, si pone). Molte volte, in questi appunti, abbiamo affermato che sarebbe presuntuoso e controproducente illudersi di fornire ricette universali.

Ma è importante sottolineare con forza alcuni elementi essenziali.

Tra questi, uno dei più importanti è la consapevolezza che, per moltissimi versi, l'apprendimento dei nostri allievi dipende inscindibilmente (anche) dalle caratteristiche del nostro insegnamento e dunque dalle nostre scelte. Anzi, insegnamento e apprendimento formano un complesso unitario; così come gli atteggiamenti dell'insegnante e dell'allievo, le attese, le richieste (sia esplicite che implicite) e le corrispondenti risposte sono strettamente collegate, regolate da quel sistema delicatissimo e intricato di clausole che abbiamo indicato con il termine "contratto didattico".

Non si insegna da soli ("a chi" si insegnerebbe?); così come, da soli, non si apprende: "da chi" si potrebbe apprendere? E "con chi"? Wittgenstein ribadisce che anche il più semplice "seguire una regola" non può ridursi ad una pratica privata (Wittgenstein, 1999). La dimensione sociale della didattica è basilare. Potrà sembrare, questa, un'osservazione banale; ma, a nostro avviso, non sarà mai abbastanza ricordata.

Riprendiamo inoltre alcune considerazioni espresse nell'Introduzione a questi appunti. Ribadiamo che il "saper insegnare" non deve essere considerato alla stregua di un'arte, di un incontrollabile "dono di natura"; e in modo del tutto analogo, anche l'importanza del "saper apprendere" va smitizzata. Certamente, in alcuni di noi insegnanti una qualche forma di predisposizione (forse) e l'esperienza (spesso) possono rendere facile o piacevole l'attività di insegnamento; analogamente, in questo o in quell'allievo si può manifestare una maggiore o minore predisposizione all'apprendimento della matematica. Ma attenzione: un proficuo insegnamento e un pieno apprendimento non sono mai determinati *esclusivamente* da una fortunata coincidenza, dal casuale incontro di due persone "speciali".

Come dobbiamo regolarci, dunque?

L'importante, per l'insegnante, per *ogni* insegnante, è innanzitutto… non perdere di vista la situazione. Mantenere il controllo della dialettica docente-discente, cercare sempre di sapere che cosa sta succedendo. E quindi riflettere costantemente sui perché, al fine di essere in grado, nei casi di difficoltà, di intervenire tempestivamente e di predisporre i correttivi opportuni[11]. L'eventuale variazione delle nostre scelte didattiche non deve *mai* essere considerata una specie di sconfitta. Tutt'altro: è il fiore all'occhiello, per una didattica consapevole e responsabile.

L'insegnante, *ogni* insegnante, è un ricercatore.

Una corretta, viva, moderna ed efficace azione didattica nel campo della matematica (e analogamente accade, crediamo, per le altre discipline) non richiede doti eccezionali, rare o irraggiungibili capacità, non deve

---

[11] Se con il termine *metacognizione* intendiamo riferirci ad una riflessione sui processi di apprendimento, e con il termine *metarisoluzione* ad una riflessione su quanto fatto per risolvere un problema (come affermato nel capitolo 2), potremmo qui inventare termini come *metainsegnamento*.

obbligatoriamente basarsi soltanto su tecniche psicologiche iper-specialistiche, alla portata di pochi eletti. Ma, d'altro canto, non può più essere condotta esclusivamente confidando nell'aiuto del caro, vecchio "istinto": di ciò ogni docente deve essere consapevole.

Solo in questo modo, soltanto grazie a questa consapevolezza, l'insegnante saprà quotidianamente evitare il sorgere di malintesi, di incertezze, di misconcezioni. Saprà continuare ad essere, per il proprio allievo, maestro. Forse, non solo di matematica.

BIBLIOGRAFIA DEL CAPITOLO 5

Amaldi, U. (1900), Sulla teoria della equivalenza: Enriques, F. (a cura di) *Questioni riguardanti le matematiche elementari*, Zanichelli, Bologna (seconda edizione: 1912; terza edizione: 1924-1927; ristampa anastatica: 1983).

Arrigo, G. & D'Amore, B. (1998), Ricerca in corso, titolo provvisorio: "Lo vedo ma non ci credo", *comunicazione privata all'autore*.

Bagni, G.T. & D'Amore, B. (1992), Le classificazioni dei quadrilateri, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 15, 785-814.

Bagni, G.T. (1993a), Sul compito di matematica dell'esame di maturità scientifica 1993: *Bollettino Mathesis Bologna*, 27, 15-16.

Bagni, G.T. (1993b), Funzioni naturali di variabile reale: *La matematica e la sua didattica*, 4, 466-475, Bologna.

Bagni, G.T. (1994), Continuità e discontinuità nella didattica dell'Analisi matematica: Piochi, B. (a cura di), *Atti del IV Incontro dei Nuclei di Ricerca Didattica nella Scuola Superiore*, IRRSAE Toscana, Siena.

Bagni, G.T. (1995), Sul compito di matematica dell'esame di maturità scientifica 1995: *La matematica e la sua didattica*, 4, 520-521.

Bagni, G.T. & Giovannoni, L. (1996), Come è scritto l'enunciato di un problema?: *La Scuola Se*, 4, 16-18.

Bagni, G.T. (1997), La visualizzazione nella didattica della matematica: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 20B, 4, 309-335.

Bagni, G.T. (1998), *La scelta del contesto e il contratto didattico*, in via di pubblicazione.

Bartolini Bussi, M. (1991), Apprendere la matematica attraverso la discussione: grafici nel piano cartesiano: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 14, 243-258.

Bottazzini, U. (1981), *Il calcolo sublime*, Boringhieri, Torino.

Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano.

Brousseau, G. (1983), Ostacles epistemologiques en mathématiques: *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4, 2.

Brousseau, G. (1986), Fondaments et méthods de la didactique des mathématiques: *Recherches en didactique del mathématiques*, 7, 2, 33-115.

Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, La Penseé Sauvage, Grenoble.

Clemens, K. (1980), Analyzing children's errors on written mathematical tasks: *Educational studies in mathematics*, 11.

D'Amore, B. (1986), Il ruolo della definizione nella didattica della matematica: *Insegnare*, 6, 9-13.

D'Amore, B. & Plazzi, P. (1990), Intuizione e rigore nella pratica e nei fondamenti della matematica: *La matematica e la sua didattica*, IV, 3, 18-24.

D'Amore, B. (1993), Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico: *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-301.

D'Amore, B. (1993a), *Problemi*, Angeli, Milano.

D'Amore, B. (1993b), Esporre la matematica appresa: un problema didattico e linguistico: *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-301.

D'Amore, B. (1995), Lingue e linguaggi nella pratica didattica: Jannamorelli, B. (a cura di), *Atti del II Seminario internazionale di Didattica della Matematica di Sulmona, 'Lingue e linguaggi nella pratica didattica', 30 marzo-1 aprile 1995*, Sulmona.

D'Amore, B. (1996), *L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi*, Opening Relation to Topic Group XIV "Infinite processes throughout the curriculum", 8th ICME, Sevilla, 14-21 July 1996 (*La matematica e la sua didattica*, 3, 1996, 322-335).

D'Amore, B. & Frabboni, F. (1996), *Didattica generale e didattiche disciplinari*, Angeli, Milano.

D'Amore, B. (1997), Bibliografia in progress sul tema: "l'infinito in didattica della matematica": *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-305.

Dapueto, C. (1992), La problematica del definire e del dimostrare nella costruzione di un progetto per l'insegnamento della matematica: Furinghetti, F. (a cura di), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del II Internucleo della Scuola secondaria superiore, CNR, Tecnologie e innovazioni didattiche, 13, 19-51.

Davis R. & Vinner S. (1986), The Notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconception Stages: *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.

Davis, P.J. & Hersh, R. (1980), *The mathematical experience*, Birkhäuser, Boston.

Duval, R. (1993), Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg.
Duval, R. (1994a), Les différents fonctionnements d’une figure dans une démarche géométrique: *Repres IREM*, 17.
Duval, R. (1994b), Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage: *Actes de la Quarantesixieme Rencountre Internationale de la CIEAEM* (in via di pubblicazione).
Duval, R. (1997), La compréhension des énoncés de problème de mathématisation: de la lecture à la résolution: D’Amore, B. & Gagatsis, A. (a cura di), *Didactics of Mathematics-Technology in Education*, Erasmus ICP-96-G-2011/11, 25-46, Thessaloniki.
Euclide (1970), *Elementi*, Frajese, A & Maccioni, L. (a cura di), UTET, Torino.
Fischbein, E. (1983), Intuition and proof: *For the Learnong of Mathematics*, 3, 2, 9-24 (traduzione italiana di Copercini, L.: Intuizione e dimostrazione: Fischbein, E. & Vergnaud, G., 1992, *Matematica a scuola: teoria ed esperienze*, Pitagora, Bologna, 1-24).
Fischbein, E. (1987), *Intuition in science and mathematics*, Riedel, Dodrecht.
Fischbein, E. (1993), The theory of figural concepts: *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.
Furinghetti, F. (1992), Luci ed ombre dell’approccio “intuitivo”: Furinghetti, F. (a cura di), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, Atti del II Internucleo della Scuola secondaria superiore, CNR, Tecnologie e innovazioni didattiche, 13, 83-96.
Gagatsis, A. (1995), Modi di valutazione della leggibilità dei testi matematici: *La matematica e la sua didattica*, 2, 136-146.
Gagné, R.M. (1973), *Le condizioni dell’apprendimento*, Armando, Roma (prima edizione: 1970).
Gelbaum, B.R. (1961), *Advanced calculus*, Appleton-Century-Crofts, New York.
Gelbaum, B.R. (1962), *The real number system*, Appleton-Century Crofts, New York.
Gelbaum, B.R. & Olmsted, J.M.H. (1979), *Controesempi in Analisi matematica*, Mursia, Milano.
Glaeser, G. (1984), À propose des obstacles épistemologiques: réponse à Guy Brousseau: *Recherche en Didactique de la Mathématique*, 5.
Goldin, G.A. & Caldwell, J. (1979), Syntax, contentand context variables examined in a research study: Goldin, G.A. & McClintock, C.E. (a cura di), *Task variables in mathematical problem solving*, Eric, Columbus.

Hadamard, J. (1993), *La psicologia dell'invenzione in campo matematico*, Cortina, Milano.
Johnson-Laird, P.N. (1988), *Modelli mentali*, Il Mulino, Bologna (prima edizione originale: 1983).
Kaldrimidou, M. (1987), *Images mentales et représentations en mathématiques chez les mathématiciens et les étudiants en mathématiques*, Thèse 3éme cycle, Université Paris 7, Paris.
Kaldrimidou, M. (1995), Lo status della visualizzazione presso gli studenti e gli insegnanti di matematica: *La matematica e la sua didattica*, 2, 181-194.
Laborde, C. (1995), Occorre imparare a leggere e scrivere in matematica?: *La matematica e la sua didattica*, 2, 121-135.
Lolli, G. (1989), *Capire una dimostrazione*, Il Mulino, Bologna.
Maier, H. (1993a), Conflit entre language mathématique et langue quotidienne pour les élèves: *Cahier de didactique des mathématiques*, 3, 86-118 (*La matematica e la sua didattica*, 3, 1995, 298-305).
Maier, H. (1993b), Problemi di lingua e comunicazione durante le ore di matematica: *La matematica e la sua didattica*, 1, 69-80.
Mazzanti, G. & Piochi, B. (1990), Riflessioni sulla dimostrazione in didattica della matematica: *Didattica delle scienze e dell'informatica nella scuola*, 149, 45-50.
Neubrand, M. (1990), L'apprendere e il riflettere: perché e come associarli nella didattica della matematica: *La matematica e la sua didattica*, IV, 2, 5-16.
Paivio, A. (1986), *Mental representation: a dual coding approach*, Clarendon Press, Oxford.
Pellerey, M. (1991), Apprendere a pensare matematicamente: Resnick, L.B. & Ford, W.W., *Psicologia della matematica e apprendimento scolastico*, SEI, Torino.
Pellerey, M. & Orio, F. (1996), La dimensione affettiva e motivazionale nei processi di apprendimento della matematica: *ISRE*, 2, 52-73.
Polya, G. (1971), *La scoperta matematica*, I-II, Feltrinelli, Milano.
Pontecorvo, C. (1981), Educazione e scuola di fronte alle differenze di intelligenza: AA.VV., *Intelligenza e diversità*, Loescher, Torino, 240-323.
Priore, F. (1990), *Modelli, strumenti e misure nella didattica contemporanea*, Mursia, Milano.
Prodi, G. (1970), *Analisi matematica*, Boringhieri, Torino.
Rogerson, A. & Arora, M. (1995), La didattica della matematica verso il 21° secolo: *La matematica e la sua didattica*, 4, 491-508.
Schoenfeld, A.H. (1986), On having and using geometric knowledge: Hiebert, J. (a cura di), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*, 225-263, Erlbaum, Hillsdale.

Shepard, R.N. (1980), *Internal representations: studies in perception imagery and cognition*, Bradford, Montgomery.
Speranza, F. (1990), Controindicazioni al riduzionismo, *La matematica e la sua didattica*, IV, 3, 12-17.
Speranza, F. (1992), La geometria nelle scuole superiori: dimostrazioni o progetto di razionalità: Furinghetti, F. (a cura di), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto,* Atti del II Internucleo della Scuola secondaria superiore, CNR, Tecnologie e innovazioni didattiche, 13, 135-141.
Vergnaud, G.; Cortes, A. & Favre-Ortigue, P. (1997), Introduzione dell'algebra ai principianti "deboli". Problemi epistemologici e didattici: *La matematica e la sua didattica*, 3, 253-271.
Vigotskij, L.S. (1987), *Il processo cognitivo*, Boringhieri, Torino (edizione originale: 1978).
Vinner, S. (1992), Function concept as prototype for problems in mathematics: Harel, G. & Dubinsky, E. (a cura di), *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, 25, 195-213.
Webb, N. (1979), Content and context variables in problem task: Goldin, G.A. & McClintock, C.E. (a cura di), *Task variables in mathematical problem solving*, Eric, Columbus.
Whorf, B. (1970), *Linguaggio, pensiero e realtà*, Boringhieri, Torino (edizione originale: 1956).
Wittgenstein, L. (1999), *Ricerche filosofiche*, Einaudi, Torino.
Zan, R. (1995), Chi non riesce in matematica?: D'Amore, B. (a cura di), *Insegnare ad apprendere la matematica in aula: situazioni e prospettive*, Atti del IX Convegno Nazionale "Incontri con la Matematica", Castel San Pietro Terme, Pitagora, Bologna, 77-83.

❋❋❋