Capitolo 3

Dal concreto all'astratto

3.1. MATEMATICA E ASTRAZIONE

3.1.1. Verso l'astrazione

Il ruolo dell'astrazione è essenziale, nella matematica. Per molti versi, la matematica *è* astrazione. Non ci dobbiamo dunque meravigliare della notevole importanza che lo studio dei procedimenti relativi all'astrazione assume nella didattica della matematica (Barth, 1990).

Che cosa significa *astrazione*? Le risposte possono essere molte, elaborate magari nei diversi ambiti disciplinari o culturali. Certo, fin dal momento in cui il bambino si rende conto che le proprie mani, le lenti dei propri occhiali e le ruote della propria bicicletta hanno qualche cosa in comune (hanno la stessa "numerosità"), egli opera, intuitivamente, spontaneamente, secondo un tipico procedimento di astrazione.

La matematica (e qui ci riferiamo al *savoir savant*, ricordato nel capitolo precedente: Chevallard, 1985) ha messo a punto tecniche e terminologie ben precise per formalizzare procedimenti come questi: ma le relazioni di equivalenza ed i passaggi al quoziente necessitano di "massicce dosi" di *trasposizione didattica* prima di poter entrare a far parte dei processi di insegnamento e di apprendimento. E, nel frattempo, i bambini riescono ugualmente a contare ed a confrontare insiemi diversi.

La didattica della matematica si occupa con la massima attenzione di ciò che accade, nella mente dell'allievo, in situazioni come quella ora descritta. Se, da un lato, non intendiamo trattare a livello specialistico questo delicatissimo argomento (rimandando il lettore alle indicazioni bibliografiche alla fine del capitolo), riteniamo utile fornire alcuni punti di riferimento, almeno dal punto di vista terminologico (consigliamo ancora la lettura di: D'Amore & Frabboni, 1996, dal quale trarremo le definizioni di questo paragrafo).

Chiameremo *immagine mentale* ciò che viene elaborato dall'allievo, anche involontariamente, a fronte di una qualsiasi sollecitazione (sia interna che proveniente dall'esterno). Si tratta di una immagine interna, dunque non espressa, almeno inizialmente. Tutte le immagini mentali riferite ad un concetto costituiscono il *modello mentale* relativo a tale concetto (Johnson-Laird, 1988).

Come abbiamo detto, fino a questo punto ci troviamo in una situazione *interna*. Ma le concezioni così formate devono spesso essere espresse, comunicate: mediante un'apposita *traduzione*, dunque, si viene a creare un modello *esterno*, esprimibile, talvolta, in un ben determinato linguaggio (ad esempio mediante parole, disegni etc.). Ogni forma di comunicazione di un contenuto, di un qualsiasi messaggio matematico avviene dunque con l'impiego di modelli esterni; i quali però sono derivati, ad esempio nella mente del nostro allievo, dai corrispondenti modelli interni.

Di estrema importanza, pertanto, sarebbe la conoscenza diretta del modello mentale (interno) di un concetto, modello che l'allievo stesso si è creato: tale conoscenza darebbe infatti la possibilità di capire molte cose a proposito di quanto il nostro allievo ha appreso sul concetto in questione; come sopra anticipato, la difficoltà consiste però nel fatto che tale modello interno non viene *mai* comunicato (esternamente).

Nel paragrafo seguente ci occuperemo di un importante esperimento relativo agli argomenti ora trattati. A tale proposito, torniamo a considerare la risoluzione dei problemi.

3.1.2. Un esperimento

Che cosa accade, dunque, quando uno studente si trova di fronte ad un problema? Ancora una volta, non è semplice rispondere in poche parole. Possiamo intanto dire che l'allievo, alle prese con un problema, si crea un modello mentale della situazione, "rappresenta" il testo (per una chiara ed efficace introduzione all'argomento si vedano: Zan, 1991-1992; D'Amore, 1993).

La corretta costruzione di tale modello mentale è molto importante per la risoluzione del problema assegnato; e sembra del tutto ovvio affermare che il fatto che un problema rifletta una situazione facilmente immaginabile in tutti i suoi dettagli (ad esempio, sia riferito ad oggetti familiari, di uso comune, che l'allievo può facilmente "pensare") possa agevolare la costruzione del modello mentale e, dunque, renda più semplice la risoluzione (su questo importante argomento hanno scritto molti ricercatori; ci limitiamo a citare: Johnson-Laird, 1988; Vergnaud, 1985; Paivio, 1986).

E qui... scatta il dubbio: *ma le cose vanno veramente così?*

Una recente ricerca di B. D'Amore, condotta al livello di scuola elementare (gli esperimenti descritti sono stati effettuati tra il 1993 e il 1995; si veda:

D'Amore, 1997b), ha messo pesantemente in discussione questa assunzione[1]. Presentiamo brevemente tale ricerca.

È stato proposto a tre gruppi di allievi di V elementare (10-11 anni) di risolvere uno stesso problema, nel testo del quale, però, era stata inserita, per ciascuno di tali gruppi, una diversa parola.

Il testo del problema è il seguente:

> Il Sig. Piero è un negoziante. Egli acquista 625 *x* a 500 lire ciascuna e le vende tutte per un totale di 480 000 lire. Qual è il guadagno per ciascuna *x*?

Alla lettera *x* sono state sostituite, per i tre gruppi di allievi, le tre "parole":

- *matite*
- *orettole*
- *przetqzyw*

La scelta di queste "parole" (le virgolette sono d'obbligo, *matite* a parte) era così motivata: il contesto descritto dal problema è facilmente immaginabile, in tutti i suoi dettagli, quando alla *x* è sostituita la parola *matite*. Diversa, invece, viene ad essere la situazione con *orettole* (che cosa sono queste benedette *orettole*? Da quale negoziante, nella mia esperienza, ho potuto acquistare delle *orettole*?). Eppure *orettole* è una parola "credibile", che "suona bene". Potrebbe esserci qualcosa che, in italiano, viene indicato da questa parola. La terza scelta, *przetqzyw*, sembra eludere ogni residua possibilità: *non* esiste alcun *przetqzyw*. O, comunque, non posso immaginarlo.

Ecco i risultati (nella categoria E sono state raggruppate le risposte esatte, a parte gli errori di calcolo; nella categoria N quelle non esatte; le percentuali sono arrotondate all'unità):

• *matite*	E:	56%	N:	44%
• *orettole*	E:	53%	N:	47%
• *przetqzyw*	E:	59%	N:	41%

[1] Confermiamo ancora una volta che il livello scolastico non deve essere considerato una "barriera" nella ricerca in didattica della matematica: risultati sperimentali ottenuti a livello di scuola elementare, ad esempio, sono interessanti (e in questo caso: illuminanti!) in senso generale.

Queste percentuali possono apparire davvero sorprendenti, alla luce delle considerazioni esposte poco sopra: a parte lievissime differenze, statisticamente del tutto insignificanti, esse possono essere infatti considerate *le stesse*.

Dunque, la ben diversa "immaginabilità" dei dettagli delle situazioni rappresentate *non* ha influito sulle percentuali di successo nella risoluzione del problema (o: "dei problemi"). Che cosa è accaduto, allora? Dobbiamo arguire che gli allievi *non* hanno fatto ricorso a modelli, che essi hanno rinunciato ad "immaginare" le situazioni descritte?

Sarebbe del tutto errato adottare sbrigativamente spiegazioni di questo genere. Riteniamo infatti che gli allievi *abbiano* fatto ricorso a modelli, indubbiamente; ma resta il fatto che la presenza di un elemento in parte o del tutto sconosciuto (*orettole*, *przetqzyw*) *non* li ha minimamente turbati. Non ha, insomma, modificato le loro strategie risolutive (e, quindi, le percentuali dei successi ottenuti). Possiamo notare che le situazioni descritte e immaginate, nei tre casi esaminati, avevano lo stesso grado di "complessità": si trattava, in tutti i tre casi, di una (innocua) situazione *concreta*, dell'acquisto di un "qualcosa" (non importa di "che cosa") da parte di un negoziante.

Non proponiamo al lettore una vera e propria "conclusione": abbiamo già ricordato che la ricerca è tuttora in corso e sarebbe perciò arbitrario e pericoloso azzardare soluzioni categoriche. Vogliamo soltanto ribadire che la possibilità di immaginare una situazione *in tutti i suoi dettagli* non appare decisiva per l'impostazione della corretta risoluzione di un problema.

Concludiamo con un'osservazione di B. D'Amore e di B. Martini:

«Quando si risolve un problema il cui testo è dato per iscritto, per prima cosa ci si fa un modello mentale della situazione descritta dal testo, … o, almeno, così si usa dire... È lecito chiedersi fino a che punto sia necessario farsi modelli mentali *dettagliati* delle situazioni descritte nei testi quando si vogliono risolvere problemi» (D'Amore & Martini, 1997, p. 156).

A ciascun insegnante lasciamo il compito di dare una risposta.

3.2. UN ESEMPIO CRUCIALE: GLI INSIEMI

3.2.1. Rappresentazione e registri semiotici

Gli oggetti matematici non esistono concretamente e la loro espressione richiede l'uso di registri semiotici (Duval, 1995): non ci sono concetti senza segni (Vygotsky, 1962), dunque insegnanti ed allievi devono rappresentare gli oggetti matematici. La prima introduzione didattica della nozione di insieme è basata su descrizioni verbali, ma naturalmente diversi registri possono essere usati per rappresentare la nozione di insieme (per quanto riguarda la dicotomia tra oggetti e concetti si veda: D'Amore, 2001, dove l'Autore sottolinea che una rappresentazione semiotica richiede il riferimento ad un particolare registro rappresentativo).

Per quanto riguarda le rappresentazioni visuali degli insiemi, i diagrammi di Eulero (1772) sono stati introdotti da Leonhard Euler (1707-1783) e ripresi (1881) da John Venn (1834-1923) per esprimere le relazioni tra insiemi (con riferimento a diversi campi di applicazione, i diagrammi di Johnston illustrano la logica preposizionale e sono equivalenti alle tavole di verità). Faremo riferimento ad essi con la denominazione *diagrammi di Eulero-Venn*.

Esamineremo alcune caratteristiche di queste rappresentazioni, in particolare di quelle visuali, sulla base dei dati di due esperienze. Scopo della ricerca è di mostrare che i registri rappresentativi non possono essere considerati assolutamente, ma sono concettualmente collegati e dipendono da vari aspetti culturali (un'analisi storica è in: Bagni, in stampa-b).

Il *paradosso cognitivo del pensiero matematico* è precisato da R. Duval (1993), il quale sottolinea che l'apprendimento matematico è concettuale ma l'attività con gli oggetti matematici coinvolge rappresentazioni semiotiche. È dunque necessario distinguere l'oggetto matematico (pur senza, con ciò, indicarne un'esistenza in senso platonistico: Bagni, in stampa-a) dalle sue singole rappresentazioni; la presenza di diversi registri è importante per il funzionamento cognitivo della mente umana (Duval, 1995), dunque lo studio delle rappresentazioni è centrale nella ricerca in didattica.

Per quanto riguarda le connessioni tra l'esperienza umana ed i sistemi matematici formali, nella tradizione piagetiana, la distinzione tra strutture fisiche e mentali si college spesso alla distinzione tra il significato, interno, e il significante, esterno; l'interazione tra i due livelli (dei quali uno è osservabile) è ciclica: l'attività mentale può avere luogo indipendentemente da quella fisica, ma le stesse strutture mentali possono essere considerate il prodotto di azioni fisiche (Kaput, 1993). Non considereremo la distinzione tra strutture interne (mentali) ed rappresentazioni esterne in termini di opposizione.

È inoltre necessario tenere conto delle connessioni tra esperienze spaziali e temporali (ad esempio i movimenti corporei), la cui importanza è stata sottolineata da molte ricerche, e l'attività di simbolizzazione (Radford, 2002 e 2003; per quanto riguarda l'*embodied cognition* il riferimento è a: Lakoff & Núñez, 2000). Tali considerazioni potranno essere riprese nell'interpretazione dei diagrammi di Eulero-Venn da parte degli allievi.

L’uso di sistemi di rappresentazione (sia tradizionali che nuovi) implica la loro *legittimazione*, con i due aspetti, mutuamente connessi, politico ed epistemologico (Godino & Batanero, 1994).

Per quanto riguarda l’approccio strumentale di P. Rabardel, se ci riferiamo ad un oggetto simbolico come ad un artefatto (ad esempio: i diagrammi di Eulero-Venn), per poterlo considerare uno strumento è necessaria un’attività costruttiva da parte del soggetto, la quale dipende da vari aspetti concettuali e sociali (Rabardel, 1995): ciò conferma come sia impossibile riferirsi ad una rappresentazione formale in un dato registro in termini assoluti.

3.2.2. Rappresentazione di insiemi

> “È davvero un pregiudizio pensare che le figure siano meno rigorose (…), scambiando il disegno usato come simbolismo col disegno volto a produrre un certo effetto visivo”.
>
> Ludwig Wittgenstein (1982, p. 138)

La presentazione didattica dei primi elementi della teoria intuitiva degli insiemi propone situazioni interessanti. Si utilizzano più registri rappresentativi: *verbali* (ad esempio le parole “insieme”, “elemento”, “appartenenza”, “insieme vuoto”, “sottoinsieme”, “inclusione”, “unione”, “intersezione” etc. e le relative definizioni, quando ci sono); *simbolici* (le lettere maiuscole e minuscole, le varie parentesi, i simboli “$\in$”, “$\subseteq$”,“$\varnothing$”, “$\cup$”, “$\cap$” etc.), *visuali* (i diagrammi di Eulero-Venn etc.).

Come premesso, ci occuperemo principalmente di rappresentazioni visuali, in particolare dei diagrammi di Eulero-Venn. Certamente quando un allievo traccia una linea curva per racchiudere una collezione di oggetti compie un’azione importante e significativa: ma il significato di una rappresentazione non può essere svincolato dall’uso (seguendo ad esempio: Wittgenstein, 1982) e tale osservazione, come vedremo, sarà alla base di difficoltà interpretative anche notevoli.

Importante è inoltre sottolineare che i diagrammi di Eulero-Venn non possono essere confusi con lo stesso concetto di insieme (Freudenthal, 1983): il passaggio dalla prima considerazione di elementi collegati tra loro alla corretta nozione di insieme è tutt’altro che semplice (Radford, 2002 e 2003). Le seguenti annotazioni di R. Ferro (che potrebbero essere ricondotte al concetto di “sostanzialità” nell’accezione di: Casari, 1964, p. 21) saranno importanti per la nostra ricerca:

> “Mediante i diagrammi si evoca l’appartenenza di un elemento, indicato da un punto, ad una collezione. Ma come proporre la situazione se l’elemento indicato dal punto è a sua volta una collezione o se la collezione indicata da una regione è pensata come elemento? L’idea di indicare un elemento con una regione interna non va bene perché fa confondere l’appartenenza con la relazione di sottocollezione, che è tutt’altro” (Ferro, 1993, p. 1086).

È dunque fondamentale considerare la differenza tra *appartenenza* ($x \in \mathrm{I}$) e *inclusione* ($\{x\} \subseteq \mathrm{I}$, cioè appartenenza all’insieme delle parti: $\{x\} \in \wp(\mathrm{I})$); tale differenza, in genere chiara quando le espressioni sono verbali o simboliche, dovrebbe emergere anche per le rappresentazioni visuali.

[Si noti che $a \in b$ e $a \subseteq b$ non sono situazioni alternative. Ad esempio, se consideriamo i numeri naturali secondo l’introduzione di von Neumann, 0 viene fatto corrispondere a $\varnothing$, 1 a $\{\varnothing\}$, 2 a $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, 3 a $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ etc.; si verifica che risulta per $a<b$ sia $a \in b$ che $a \subseteq b$. Segnaliamo inoltre che si definisce *insieme transitivo* un insieme a tale che $\forall x\ (x \in a \rightarrow x \subseteq a)$]

Presenteremo due esperienze collegate a diversi livelli scolastici: la prima (A) riguarderà l’introduzione degli insiemi ad allievi di 11 anni e ci consentirà di mettere a fuoco elementi utili per l’interpretazione della seconda (B), collegata ad allievi di 15 anni (in Italia: primo biennio della scuola secondaria superiore).

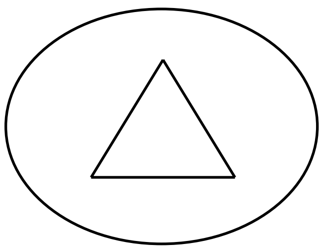
3.2.3. Una prima esperienza

Iniziamo con la descrizione di una breve esperienza in cui sono coinvolte due allieve di 11 anni e l’insegnante. L’esperienza ha avuto luogo durante una lezione, in classe, in situazione non valutativa.

L’insegnante scrive alla lavagna:

Rappresenta graficamente l’insieme costituito dai lati di un triangolo

S. (*alla lavagna, disegna un triangolo e lo racchiude con una linea ellittica*): “Ecco”.



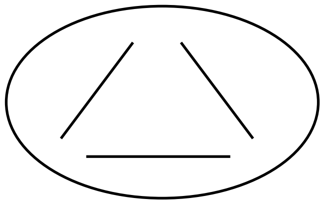
Insegnante: “Non è sbagliato, hai fatto un bel disegno. Però guardando potrebbe essere un insieme con un elemento solo”.

S.: “Perché uno? Ho fatto tre lati”.

Insegnante: “Sì, ma fanno parte del triangolo: è un triangolo che ti viene in mente, tutta la figura, non i tre lati”.

G. (*interviene dal posto*): “Eh, anch’io ci vedo il triangolo e no i tre lati!”.

S. (*un po’ contrariata, rivolgendosi alla compagna*): “Già, e cosa devo fare? Devo romperlo?” (*cancella il triangolo e ridisegna i tre lati separati*).



G.: “No, così non è un triangolo, l’esercizio diceva triangolo”.

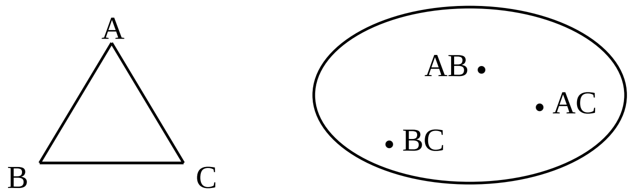
Insegnante (*rivolta a S.*): “Momento, la tua risposta andava bene se si interpreta bene la figura. Provi a pensare a un’altra rappresentazione?”

S.: “Ancora con quei disegni lì?”

Insegnante: “Sì, coi diagrammi di Eulero-Venn”.

S. (*dopo qualche secondo*): “Mm, no”.

Insegnante: “Senti, cerco di darti un’idea. Ti ricordi che quando facciamo geometria usiamo le lettere per dare i nomi ai punti e ai lati? Proviamo anche qui. Eh, ti va?”. (*Disegna alla lavagna le figure seguenti*).



G.: “Secondo me è questo disegno che va bene perché si vede che ce ne hai tre”.

S. (*perplessa*): “Sì però dentro non c’è mica scritto che quelli lì sono i lati, cioè come faccio a saperlo, devo guardare fuori...”

Fermiamoci qui. Come accennato, la breve esperienza descritta, pur essendo limitata ad uno scambio di battute, è utile per introdurre il problema. Alcuni spunti sono interessanti: le tre rappresentazioni proposte differiscono tra di loro soprattutto per quello che potremo chiamare il grado di *verosimiglianza* rispetto alla situazione geometrica rappresentata:

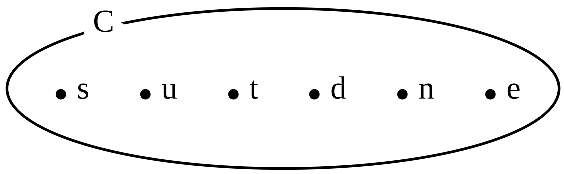
- nella prima rappresentazione, gli elementi dell'insieme sono disegnati, *riprodotti* come segmenti e come lati di un triangolo, più che semplicemente rappresentati;
- nella seconda, gli elementi restano segmenti, ma vengono disegnati in una reciproca posizione che non corrisponde a quella dei lati di un triangolo;
- nella terza gli elementi sono rappresentati solamente da punti: la loro interpretazione come lati di un triangolo richiede una figura esplicativa, esterna alla rappresentazione.

Significativa è inoltre l'osservazione dell'insegnante secondo la quale le rappresentazioni devono essere interpretate ("la tua risposta andava bene se si interpreta bene la figura"). Approfondiremo queste tematiche esaminando la seconda esperienza.

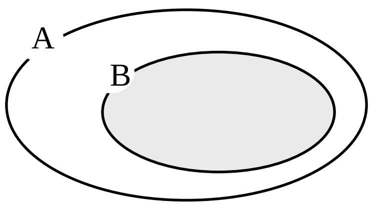
3.2.4. Una seconda esperienza

K., 15 anni, frequenta il primo anno del corso di Ginnasio-Liceo Classico (IV ginnasio, a Treviso). Il suo profitto è medio-alto in tutte le materie. Per valutare l'esperienza sarà utile conoscere alcune caratteristiche dell'insegnamento (ci baseremo sul libro di testo di K.). Tra gli argomenti introdotti nella classe di K. segnaliamo:

- elementi, insiemi, appartenenza: (dal libro di testo di K.) "In matematica si usa la parola *insieme* per indicare un raggruppamento, una raccolta, una collezione di *elementi*: questi possono essere oggetti, individui, simboli, numeri, figure geometriche etc. Riterremo che gli elementi di un insieme siano ben definiti e distinti tra loro. (...) Generalmente gli insiemi si indicano con lettere maiuscole; gli elementi di un insieme si indicano con lettere minuscole. La scrittura $a \in A$ si legge *a appartiene ad A*";
- i diagrammi di Eulero-Venn: (dal libro di testo di K.) "Si dà una rappresentazione geometrica: si delimita con una linea chiusa una regione del piano e si rappresentano gli elementi dell'insieme mediante punti all'interno di tale regione (eventualmente indicando il nome di ciascun elemento accanto al punto che lo rappresenta)"; riportiamo l'esempio riguardante l'insieme C delle consonanti della parola *studente*:



- sottoinsiemi, inclusione: (dal libro di testo di K.) “Considerati due insiemi A e B si dice che B è un sottoinsieme di A quando ogni elemento di B appartiene anche ad A. In simboli si scrive $B \subseteq A$ che si legge *B è contenuto in A o è uguale ad A* o *B è incluso in A o è uguale ad A*”; riportiamo l’esempio indicato:



- insieme delle parti: (dal libro di testo di K.) “Dato un insieme A si definisce insieme delle parti di A quell’insieme, indicato con $\wp$(A), che ha per elementi tutti i possibili sottoinsiemi di A. (...) In generale, se A contiene *n* elementi, $\wp$(A) ha 2^n elementi”.

Prima di proseguire ci sembrano opportune due osservazioni: innanzitutto va sottolineato l’uso ambiguo del termine *contiene*: parlando di sottoinsiemi si equiparano esplicitamente le espressioni *è incluso* ed *è contenuto*; ma parlando dell’insieme delle parti si afferma: *se A contiene n elementi, $\wp$(A) ha 2^n elementi* e si utilizza il termine *contiene* con riferimento all’appartenenza. Inoltre è interessante notare l’uso leggermente diverso dei diagrammi di Eulero-Venn nei due esempi riportati: nel primo, gli elementi sono indicati da alcuni (singoli) punti, ben evidenziati e con il nome dell’elemento rappresentato a fianco; nel secondo, invece, i singoli elementi non sono specificati: tutti i punti della parte di piano interna alla linea chiusa potrebbero essere considerati elementi dell’insieme.

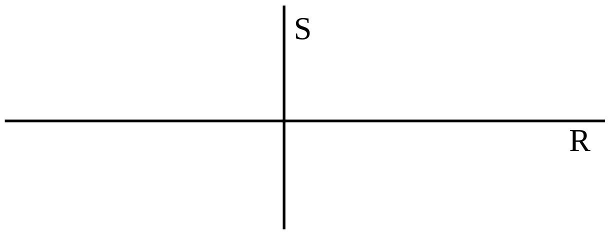
Nel corso delle lezioni, a K. erano stati presentati esempi collegati ad insiemi di oggetti e di numeri; non raramente è stata indicata la rappresentazione visuale con i diagrammi di Eulero-Venn. Erano stati proposti esempi riguardanti figure geometriche in generale, per illustrare la nozione di sottoinsieme (ad esempio: l’insieme dei quadrati è sottoinsieme dell’insieme dei rettangoli, il quale è sottoinsieme dell’insieme dei parallelogrammi etc.).

Durante un’esercitazione orale in classe (non in un’occasione di valutazione), a K. è stato proposto l’esercizio seguente:

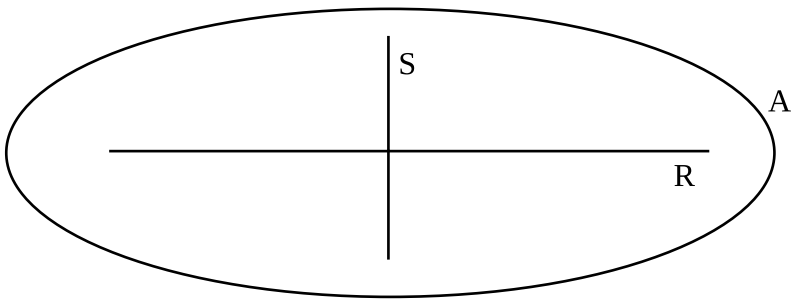
> *I è l’insieme dei punti del piano. R è l’insieme dei punti di una retta data nel piano.*
> *S è l’insieme dei punti di una retta data nel piano perpendicolare alla precedente.*
> *A è l’insieme che ha per elementi R e S.*
> *A appartiene all’insieme delle parti di I?*

La traccia dell’esercizio, dettata dallo sperimentatore (che interveniva alla lezione ma non era l’insegnante di matematica nella classe di K.), è stata scritta sulla lavagna dall’allieva. K. è stata poi lasciata libera di procedere per la sua risoluzione.

K. (senza parlare) traccia sulla lavagna due rette perpendicolari e le contrassegna con R e S.



Subito dopo, K. racchiude quanto tracciato con una linea ellittica e scrive “A”.



K.: “Questo è l’insieme A”. (*Rilegge velocemente la traccia dell’esercizio*). “Adesso guardiamo se appartiene all’insieme delle parti di I”.

K. (*dopo aver guardato lo sperimentatore*): “delle parti di I contiene tutti i sottoinsiemi. Le figure sono fatte di punti e quindi tutte le figure sono elementi dell’insieme delle parti di I”.

K. (*dopo dieci secondi*)*:* "A contiene le due rette… e allora è una figura del piano" (*indica le rette*).

K. (*fissa lo sperimentatore*): "Sì, sì, A è un elemento dell'insieme delle parti".

Iniziamo ad esaminare il ragionamento di K. dal punto di vista della sua espressione verbale:

- "L'insieme delle parti di I *contiene* i sottoinsiemi di I".
- "Tutte le figure del piano sono degli elementi dell'insieme delle parti di I".
- "A *contiene* le due rette ed *è una figura del piano*".
- "Dunque A è un elemento dell'insieme delle parti di I".

Qui emerge l'ambiguità del termine *contiene*: nella prima frase K. si riferisce ad una situazione di appartenenza; ma nella terza frase dice "A *contiene* le due rette" e in base a ciò "*è una figura del piano*": dunque intende: $R \subseteq A$ e $S \subseteq A$. Possiamo quindi confermare l'impressione già segnalata a proposito della potenziale problematicità dell'uso di un termine il cui significato non sia stato sufficientemente chiarito.

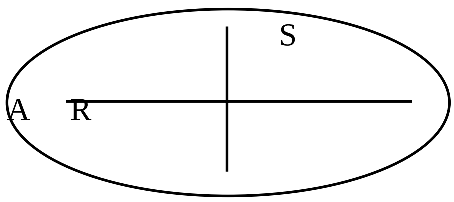
Osserviamo che non è questa l'unica situazione di termini che in matematica possono assumere significati diversi: ad esempio, talvolta il *pari* è riferito all'uguaglianza (*è pari a...*) e talvolta agli interi multipli di due. Queste diverse accezioni (a parte i chiari collegamenti tra di esse: un numero pari di oggetti può essere diviso in due parti uguali) non creano però occasioni di malinteso. Inoltre nel caso del termine *contiene* riferito all'appartenenza e all'inclusione sono disponibili sinonimi efficaci (cioè tali da non causare ambiguità).

Cerchiamo di capire perché in una prima fase K. ha utilizzato il termine *contiene* con riferimento all'appartenenza e successivamente per indicare l'inclusione. Che cosa ha indotto K. a fare ciò? Ripercorriamo brevemente le fasi della risoluzione con particolare riferimento ai registri rappresentativi coinvolti:

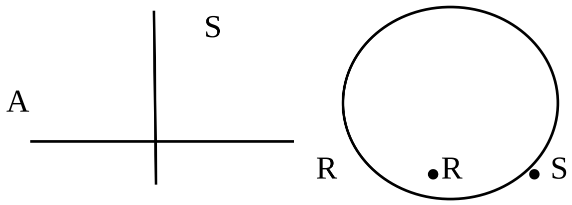
- l'esercizio dato è espresso verbalmente;
- subito K. traduce la situazione in un registro visuale e traccia le due rette;
- in tale registro K. accorpa le rette tracciando attorno ad esse una linea ellittica;
- poi continua a riferirsi a quanto tracciato e parla dell'insieme A dicendo "le due rette".

L'uso (precipitoso?) di un registro visuale sembra quindi aver impedito a K. di apprezzare la sfumatura chiave: A è l'insieme che ha *per elementi* i due oggetti R e S. Invece K. fa riferimento all'intera "figura" A = R∪S: le rette perpendicolari tracciate hanno forse indotto l'allieva a considerare una *figura unica* (ed il termine *contiene* viene collegato all'inclusione).

È essenziale rilevare che durante la propria risoluzione K. ha costruito l'insieme A in un registro visuale, ma utilizzando tale registro (cioè interpretando i diagrammi di Eulero-Venn) impropriamente. Sottolineiamo infatti che quello di K. è *un* uso del registro visuale, ben diverso, ad esempio, da quello corretto dei diagrammi di Eulero-Venn: ma il fatto di usare una rappresentazione *legittimata* (riprendiamo il termine da: Radford, 2002) induce l'allieva a trarre dai diagrammi disegnati alcune conclusioni che si rivelano inesatte.



Questa situazione (alla quale evidentemente K. si riferisce) ha indotto l'allieva a considerare R, S come sottoinsiemi di A. In questo caso il diagramma di Eulero-Venn è utilizzato in modo improprio.



La situazione illustrata a lato (in cui il diagramma di Eulero-Venn viene utilizzato adeguatamente) suggerirebbe invece il corretto riferimento all'appartenenza di R e di S all'insieme A.

La rappresentazione alla quale fa riferimento K. è impropria perché la rappresentazione geometrica delle rette perpendicolari non è rilevante rispetto al concetto di insieme: la scelta di stabilire una relazione tra gli elementi dell'insieme è arbitraria.

Anticipiamo un'osservazione che riprenderemo: con quanto notato non vogliamo sostenere che l'uso del registro visuale sia controproducente. Ma ribadiamo che, nella situazione in esame, sarebbe stato preferibile per K. evitare il ricorso ad un registro visuale *il cui uso improprio (o non sufficientemente chiarito) ha portato ad un errore*.

Quale avrebbe potuto essere una strategia per raggiungere il risultato esatto? A parte l'uso corretto dei diagrammi di Eulero-Venn, a cui abbiamo sopra fatto cenno, una possibilità è la seguente: invece di passare subito ad un registro visuale, K. avrebbe dunque potuto mantenere il riferimento alla traccia dell'esercizio (espressa verbalmente) e costruire l'insieme A solo sulla base di quanto indicato in tale traccia.

Proponiamo la prosecuzione dell'esperienza:

Sperim.: “Torniamo un po’ alle definizioni”. (*Cancella il disegno alla lavagna e scrive*):

$$\{R; S\} \in \wp(I) \quad \text{significa} \quad \{R; S\} \subseteq I \quad \text{e ciò significa} \quad R \in I \text{ e } S \in I$$

Sperim.: “Adesso pensa: è vero o non è vero che R appartiene a I e S appartiene a I?”
K.: “I è il piano e R e S sono delle rette” (*sta per disegnarle ancora*).
Sperim.: “No per favore, non disegnare per adesso. Hai detto che I è il piano, ecco, puoi dirlo meglio, insomma puoi essere più precisa?”
K. (*dopo alcuni secondi, rilegge la traccia dell’esercizio*): “Beh, I sarebbe l’insieme di punti, dei punti del piano. Sì, cioè non è una cosa da sola, è un insieme, si scrive con la maiuscola”.
Sperim.: “un insieme di... che cosa?”
K.: “Mm, punti. Punti del piano”.
Sperim. (*indica l’ultima parte di quanto precedentemente scritto alla lavagna:* $R \in I$ *e* $S \in I$): “Allora R e S, sono elementi di I?”
K. (*dopo alcuni secondi, un po’ incerta*): “Ah no, già, è vero, R e S sarebbero insiemi, mica elementi. Anche loro si scrivono con la maiuscola”.

L’argomentazione non appare convincente (né convinta): sembra basata su di un’alternativa tra “insiemi” ed “elementi” e non evidenzia il fatto più semplice: R e S *non sono punti del piano e pertanto non appartengono a I*. In particolare il fatto che R, S (e I) siano “scritti con le maiuscole” è poco significativo per la risoluzione. Ciò rende opportuna un’annotazione: l’uso tradizionale delle lettere minuscole per gli elementi e delle lettere maiuscole per gli insiemi può avere alcune controindicazioni importanti. Si rischia una suddivisione degli oggetti matematici in due categorie separate: dal punto di vista didattico una tale distinzione può essere inizialmente utile, ma l’appartenenza di un insieme ad un altro (ad esempio quando si considera l’insieme delle parti) può determinare dei conflitti con le tradizioni di notazione simbolica. Si potrebbe addirittura giungere alla formazione di una pericolosa misconcezione secondo la quale *un insieme non può appartenere ad un altro insieme*.

Notiamo tuttavia che la presenza di lunghe “catene” di oggetti matematici del tipo $a \in b \in c$... è piuttosto rara, nei testi di matematica (a parte testi specifici di teoria degli insiemi) e ancora più rara nei testi scolastici. Dunque il tradizionale impiego delle lettere minuscole per gli elementi e delle maiuscole per gli insiemi può essere accettabile, se adeguatamente chiarito.

Nonostante il tentativo messo in atto nella seconda parte dell’esperienza, K. non sembra trovarsi a proprio agio nell’applicare formalmente le definizioni (l’allieva tende a riprendere il registro visuale). I registri visuali appaiono concreti, rassicuranti, aderenti all’esempio considerato: l’argomento ha a che vedere con oggetti geometrici, uno dei settori tradizionalmente associati all’uso di registri visuali (per i fenomeni di settorializzazione: Schoenfeld, 1986). I registri simbolici sono invece più generali (anche se non raramente si usano simboli con un valore implicito: si pensi alla differenza tra x e x_0, a n per indicare un naturale, a p per un numero primo etc.) e richiedono una più impegnativa astrazione.

3.2.5. Conclusioni: tra concretezza e astrazione

Come anticipato, non intendiamo scoraggiare l’uso dei registri visuali (né delle altre forme di rappresentazione). Ma l’uso di un registro non è neutro, naturale, bensì è fondato su convenzioni, tradizioni, norme: lo stesso significato di un linguaggio può essere basato sull’uso (Wittgenstein, 1999) e tutto ciò deve essere considerato dall’insegnante.

Per quanto riguarda i diagrammi di Eulero-Venn, è necessario tenere conto delle connessioni tra l’azione con la quale gli allievi racchiudono alcuni elementi con una linea ellittica e la formazione del concetto di insieme (Radford, 2002 e 2003). Questa operazione porta ad una rappresentazione visuale, ma è collegata a molti aspetti, ad esempio simbolici, e tali connessioni devono essere analizzate e studiate. L’uso di un registro collega altri aspetti concettuali, e ciò vale in generale: ad esempio, i registri verbali fanno riferimento alle parole e dunque ai significati di tali parole, significati che coinvolgono ovviamente altri registri.

Non c’è un solo registro rappresentativo di un tipo considerato: ad esempio ci sono diversi registri visuali e, più propriamente, diversi modi di proporre e di intendere la stessa rappresentazione. Una rappresentazione non può dunque essere considerata in termini assoluti: la sua legittimazione deve fare riferimento ad un contesto.

Tornando ai registri visuali, una rappresentazione non è sempre esatta: i diagrammi di Eulero-Venn operano in ambito visuale, ma coinvolgono aspetti collegati alla simbolizzazione (quando indichiamo un elemento non ne proponiamo la rappresentazione accurata). Se inconsciamente ci riferiamo ad una qualche esattezza della rappresentazione rischiamo di introdurre implicitamente relazioni improprie tra gli elementi dell’insieme considerato.

Spesso le rappresentazioni si chiariscono facendo riferimento all’uso (citiamo ancora: Wittgenstein, 1999): dunque suggeriamo un’adeguata negoziazione dei significati che coinvolga insegnante e allievi. Ciò può essere riferito ad ogni tipo di rappresentazione: i significati dei termini devono essere fissati senza ambiguità, i simboli usati e le loro caratteristiche (ad esempio:

lettere minuscole e maiuscole) devono essere chiariti. Un uso superficiale o scorretto di termini, simboli e rappresentazioni visuali può rivelarsi didatticamente pericoloso e causare la formazione di ostacoli e di misconcezioni.

> "In primo luogo il nostro linguaggio descrive un'immagine. che cosa si debba fare di quest'immagine, in qual modo la si debba impiegare, rimane oscuro. Ma è chiaro che, se vogliamo comprendere il senso di quello che diciamo, dobbiamo esplorare l'immagine. Ma l'immagine sembra risparmiarci questa fatica; allude già a un impiego determinato. Così si beffa di noi".
>
> Ludwig Wittgenstein (1999, p. 244)

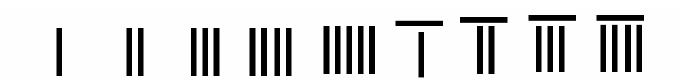
3.3. APPRENDIMENTO E ARTEFATTI

3.3.1. Un'esperienza interculturale

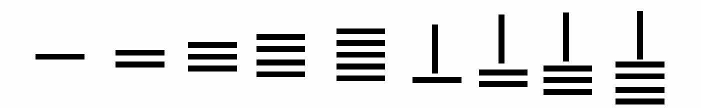
L'impostazione interculturale può essere particolarmente produttiva in ambito didattico: essa non prevede infatti un semplice accostamento di esperienze derivanti dalle diverse culture, bensì è basata su di un'efficace interazione, su di un confronto paritetico che porti alla valorizzazione delle differenze (ci basiamo su quanto illustrato in: Cipollari & Portera, 2004).

Nel presente lavoro proporremo un'esperienza didattica basata sull'uso di artefatti derivati dalla tradizione della matematica cinese.

La tradizionale indicazione cinese di numeri mediante bastoncini è spontaneamente riferibile alle dita della mano. Secondo tale interpretazione, però, dopo le 5 unità (corrispondenti a 5 dita) è necessario ricorrere all'altra mano, indicando che è stata già considerata una mano completa:



Nel raggiungere il 10 dobbiamo affrontare una situazione importante: per non restare bloccati (avendo esaurito le dita delle mani) introdurremo le decine che si potrebbero indicare mediante le stesse disposizioni di bacchette usate per le unità, spostate più a sinistra. Per evitare malintesi, tuttavia, i Cinesi utilizzavano per le decine delle disposizioni (*Heng*) diverse da quelle per le unità (*Tsung*):



Per le centinaia le disposizioni usate erano *Tsung*, per le migliaia *Heng* etc.

Fino al XII sec. lo zero era indicato da uno spazio vuoto (proprio questa assenza ha reso opportuno l'uso di due gruppi diversi di simboli). Dal 200 a.C. i Cinesi indicarono anche numeri negativi distinguendo il colore delle bacchette, rosse e nere.

Le bacchette erano un ausilio per il calcolo: esse davano la possibilità di formare praticamente i "numerali-bacchette" su di una superficie piana (la tavola da calcolo aritmetica, quadrettata, in cui le operazioni erano eseguite sfruttando le caratteristiche della notazione posizionale) e di cancellare facilmente i numeri che non servivano più. L'uso delle bacchette tramonta nella tarda epoca Ming (1368-1644) quando furono soppiantate dall'abaco.

3.3.2. Il quadro teorico

> "Ogni giorno impariamo un linguaggio comune, certe parole ci vengono insegnate mostrandoci oggetti etc., e in connessione con essi escogitiamo una certa immagine. Poi, gradatamente, modifichiamo l'uso delle parole e, quanto più lo modifichiamo, tanto meno appropriata diventa quell'immagine, fino a diventare assolutamente ridicola. (…) Abbiamo bisogno di qualcosa di più dell'immagine giusta, abbiamo bisogno di sapere come la si usa".
>
> Ludwig Wittgenstein (1982, p. 19)

Un'applicazione delle bacchette da calcolo nel campo della ricerca in didattica della matematica richiede la precisazione di un quadro teorico: ci rifaremo a quanto proposto da Bartolini Bussi, Mariotti e Ferri (in stampa) che si basa sui lavori di Vygotskij (1974 e 1987), di Bachtin (1979 e 1988), di Engestroem (1990) e di Wartofsky (1979). In particolare, Vygotskij riconosce funzioni di mediazione agli strumenti tecnici e psicologici (segni o strumenti di mediazione semiotica: Vygotskij, 1974). Wartofsky (1979) identifica gli strumenti tecnici come *artefatti primari*; gli *artefatti secondari* sono usati per fissare e trasmettere le modalità di azione.

Le bacchette da calcolo sono considerate, in prima lettura, artefatti primari; regole e convenzioni rappresentative corrispondono ad artefatti secondari; una teoria matematica è un *artefatto terziario* che organizza gli artefatti secondari. Si può supporre (Bartolini Bussi, 2002; Bartolini Bussi & Boni, 2003) che gli aspetti pratico, rappresentativo e teorico siano incorporati (potenzialmente) nell'attività che si svolge con l'artefatto che, in tale modo, acquista caratteristiche di *polisemia* (Engestroem, 1990).

Didatticamente significativo è che l'uso degli artefatti primari richieda la loro manipolazione (Vygotskij, 1987, p. 45). L'importanza degli aspetti corporei si accorda con la recente posizione della scienza cognitiva basata sui lavori di Lakoff, Johnson e Núñez (Lakoff & Núñez, 2000), secondo la quale la formazione di idee matematiche si basa sull'esperienza sensoriale-motoria (Mariotti, 2005).

3.3.3. Matematica cinese e carattere posizionale

I problemi che noi oggi risolviamo algebricamente sono presenti in alcune tradizioni matematiche a partire dal II millennio a.C., ad esempio presso i Babilonesi. In Cina l'algebra è presente dal II sec. a.C. in forma retorica o sincopata (ideogrammi monosillabici per quantità e operazioni) con un importante "carattere posizionale" (Needham 1959, p. 112; Martzloff, 1987). La tavola di calcolo in versione algebrica era impostata in modo che determinate posizioni fossero occupate sempre da particolari tipi di grandezze (incognite, potenze etc.) e tale convenzione può considerarsi un artefatto secondario. Venne introdotto così un sistema che implicò la "registrazione di modelli matematici" (Needham, 1959, p. 113).

Storicamente, il carattere posizionale dell'algebra cinese ha avuto conseguenze diverse: da un lato, pose implicitamente l'accento sull'importanza dell'impostazione matriciale (ma il concetto di determinante fu sviluppato piuttosto tardi, nel 1683, dal giapponese Seki Kowa); parallelamente, però, determinò l'inibizione dello sviluppo di un simbolismo algebrico.

Nel presente lavoro si esamina il problema seguente che riprende, con variazioni numeriche, un problema del capitolo VIII (*Fang Cheng*) del *Chiu Chang* (opera precedente al I sec.):

Cinque covoni di grano di tipo A aggiunti a tre covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 19 sheng. Tre covoni di grano di tipo A aggiunti a due covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 12 sheng. Quali rendimenti hanno un covone di grano di tipo A e un covone di grano di tipo B?

Esso porta al sistema di equazioni lineari che, nella nostra notazione moderna, sarebbe scritto:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

Coefficienti e termini noti sono riportati in una tabella a due righe e tre colonne che viene modificata secondo le regole seguenti:

(1) si possono variare in proporzione i termini delle righe;
(2) a una riga si può sostituire la riga ottenuta sommando o sottraendo i termini corrispondenti di due righe.

Riportiamo una possibile soluzione del sistema ottenuta con in metodo ora indicato:

5	3	19
3	2	12

15	9	57
3	2	12

15	9	57
15	10	60

15	9	57
0	1	3

15	9	57
0	9	27

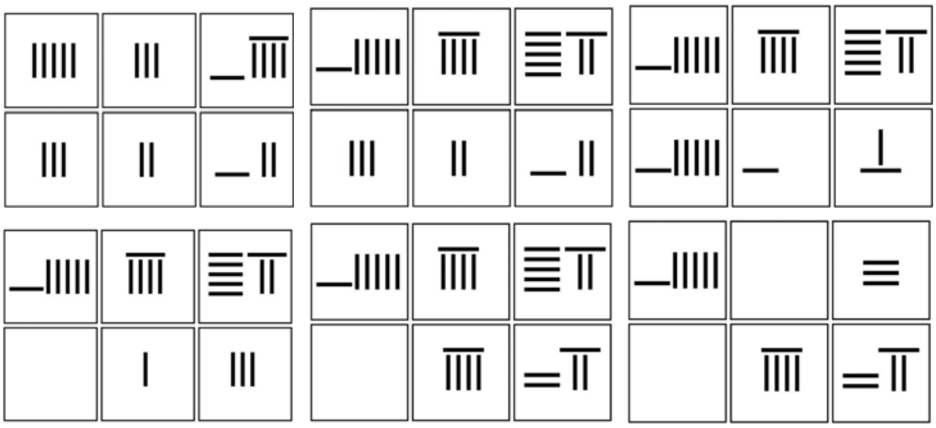
15	0	30
0	9	27

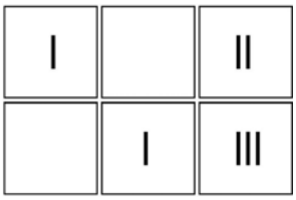
1	0	2
0	1	3

corrispondente alla soluzione: $x = 2$ e $y = 3$

Il procedimento risolutivo può essere riprodotto con le bacchette da calcolo e ciò risulta significativo nella pratica didattica: innanzitutto la realizzazione del procedimento si mantiene aderente alla tradizione storica anche dal punto di vista pratico; anticipiamo inoltre che la manipolazione delle bacchette determina situazioni interessanti.

Come vedremo, infatti, gli allievi possono accostarsi ad alcune proprietà di invarianza delle equazioni in modo intuitivo; i coefficienti nulli corrispondono ad un'assenza fisica di "disturbo".





corrispondente alla soluzione: $x = 2$ e $y = 3$

Naturalmente quella ora riportata è soltanto una delle (molte) possibili soluzioni derivanti dall'applicazione del procedimento. Mediante l'esame di una situazione sperimentale verificheremo quale sarà la scelta degli allievi.

Osserviamo che l'insegnante ha un ruolo importante per la presentazione delle modalità di uso (artefatto secondario) dell'artefatto primario: il rapporto degli artefatti è essenziale in quanto non esiste un solo "modo di usare" lo strumento considerato. L'insegnante dunque suggerisce scopi e strategie: l'elemento cruciale è ottenere la "sparizione" di una delle incognite, e l'assenza fisica di bacchette nella casella corrispondente al coefficiente nullo potrà essere importante.

3.3.4. Una ricerca sperimentale

Una prima verifica sperimentale è stata condotta in una scuola secondaria inferiore (a Treviso, I classe di una scuola media, allievi di 11-12 anni) ed ha consentito di notare che l'uso degli artefatti primari, bacchette e tavola da calcolo (strumenti tecnici), collegato a quello di artefatti secondari (convenzioni e modalità per variare le righe della tabella: strumenti psicologici) può agevolare lo studente nell'accostamento alla risoluzione di sistemi lineari con metodi di eliminazione.

Al momento dell'esperienza gli allievi non avevano trattato i numeri negativi né le equazioni. Solo alcuni di essi avevano qualche esperienza (risalente alla scuola primaria) con semplici esercizi del tipo: "indovina un numero sapendo che…" L'esperienza si è svolta in aula, durante un'ora di lezione, alla presenza dell'insegnante di matematica e dello sperimentatore (che non è mai intervenuto).

Era stata precedentemente introdotta alla classe la rappresentazione dei numeri mediante le bacchette da calcolo; gli allievi hanno avuto occasione di esercitarsi.

In una tabella corredata con etichette, realizzata su di un banco, era stato poi rappresentato il problema: "due pacchetti uguali contengono, in tutto, quattro biscotti. Quanti biscotti ci sono in ciascun pacchetto?" Era stato poi mostrato che dividendo per 2 i numeri in tutte le caselle della tabella si ottiene la soluzione.

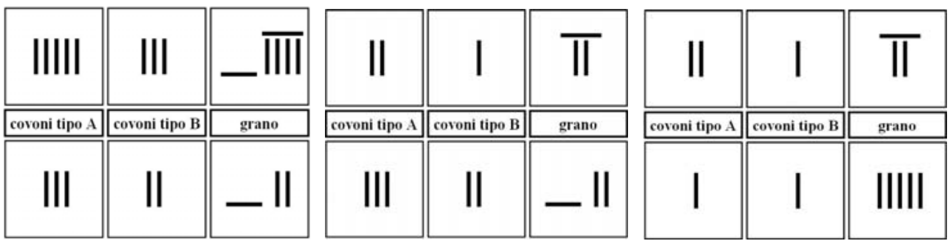
Gli allievi sono stati suddivisi in sei gruppi di tre. È stato quindi proposto il problema precedentemente esaminato: con le bacchette è stata realizzata la disposizione iniziale affermando che essa "rappresentava i dati". Sono state poi illustrate (anche con esempi) le regole che permettono di modificare tale disposizione.

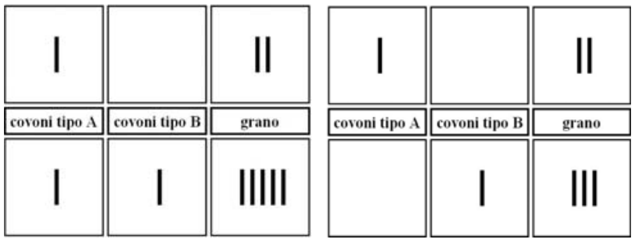
Durante la risoluzione, il ruolo dell'insegnante è stato di controllo (passando tra i vari gruppi): ha segnalato eventuali errori, ma non ha dato suggerimenti.

Come ricordato, il problema tratto dal *Chiu Chang* descritto nel paragrafo IV porta al sistema di equazioni lineari che, nella nostra notazione moderna, è così espresso:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

Dopo alcuni tentativi, l'allieva S., in collaborazione con F. (il terzo componente del gruppo non ha svolto un ruolo attivo) ha impostato la seguente risoluzione.





dunque: $x = 2$ e $y = 3$

Significativi sono alcuni ampi gesti con le mani mediante i quali le allieve hanno indicato le varie righe dicendo:

“Adesso posso fare questi meno quelli”.

Indicativa, inoltre, è una frase pronunciata da F. (l’allieva che ha più attivamente collaborato con S.):

“Si riesce quando due diventano uguali”.

Possiamo notare che S. e F. hanno utilizzato solamente la regola che consente di sottrarre una riga dall’altra. Ma tale modo di procedere non è sempre applicabile (ricordiamo che gli allievi non avevano trattato i numeri negativi). Un secondo problema è stato allora proposto allo stesso gruppo:

Quattro covoni di grano di tipo A aggiunti a un covone di grano di tipo B hanno il rendimento di 6 sheng. Due covoni di grano di tipo A aggiunti a tre covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 8 sheng. Quali rendimenti hanno un covone di grano di tipo A e un covone di grano di tipo B?

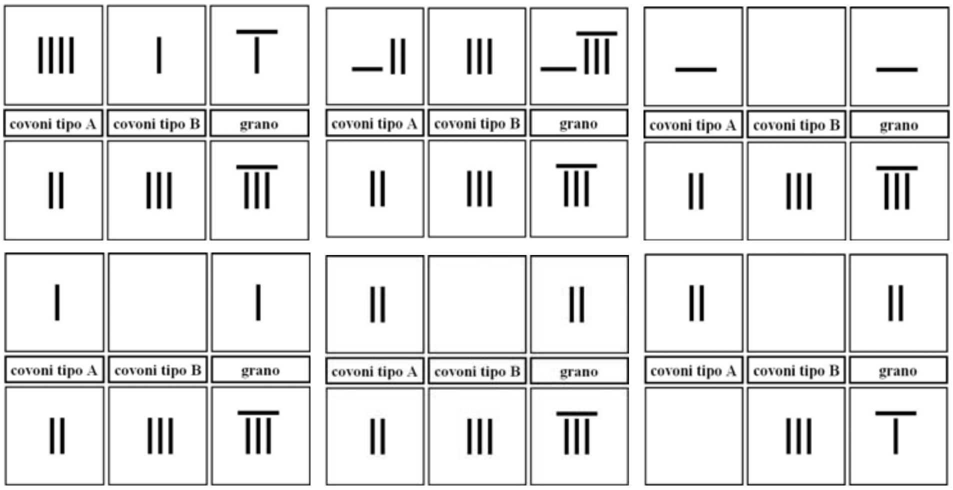
Dopo una fase di perplessità con osservazioni del tipo:

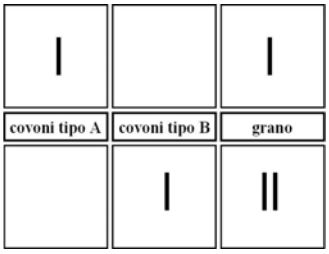
“Non si può togliere questi da quelli, non ce ne sono abbastanza”,

l’allieva S. applica la regola che consente di moltiplicare gli elementi di una riga per $k>0$ (in questo caso: la prima riga per $k = 3$). F. ribadisce:

“Sì, sì, bisogna far diventare questo uguale a questi!”

indicando le diverse righe, e il procedimento può quindi proseguire e concludersi.





corrispondente alla soluzione: $x = 1$ e $y = 2$

3.3.5. Conclusioni

> “Una delle ragioni per cui si paragona la matematica a un gioco è che si vuol mostrare che essa è, in un certo senso, arbitraria (…). ‘Una regola diversa avrebbe adempiuto alla stessa funzione’, si potrebbe osservare. Quale funzione? Ciò suggerisce che non c’è nulla nell’oggetto del gioco che determina questa regola”.
>
> Ludwig Wittgenstein (1982, pp. 147-148)

L’esperienza descritta può essere considerata un’importante occasione interculturale per un accostamento critico alla matematica cinese e al contesto nell’ambito del quale si è prodotta, ma assume significati notevoli anche dal particolare punto di vista della didattica della matematica.

Sebbene questa prima esperienza sia ancora piuttosto limitata e consenta solo di indicare considerazioni parziali (ulteriori verifiche sperimentali sono in corso), l’uso frequente da parte degli allievi di espressioni deittiche (“questi”, "quelli") accompagnato da una marcata componente gestuale è interessante (Steinbring, 2002). Inoltre gli allievi hanno dato la preferenza alle modalità d'uso (artefatto secondario) più direttamente legate alla presenza fisica dei bastoncini.

I dati finora esaminati sembrano suggerire che l'uso degli artefatti primari (bacchette e tavola da calcolo) collegato a quello di artefatti secondari (modalità per variare la tabella) possa agevolare la messa a punto di strategie risolutive, dunque l'accostamento agli artefatti terziari basati sulle attività con tali artefatti primari e secondari (si noti a tale riguardo che i Cinesi risolvevano sistemi di due equazioni in due incognite anche con altri metodi riassumibili in formule, ma il ruolo delle bacchette non appare in tali casi particolarmente significativo: Needham 1959 e Martzloff, 1987).

Nota H. Steinbring:

"Per esprimere le relazioni algebriche non sono sempre indispensabili tipici segni dell'algebra" (Steinbring, 2002, p. 20, la traduzione è nostra).

Una rappresentazione esterna come quella ottenuta mediante le bacchette sulla tavola da calcolo è costituita da un complesso di segni, relazioni spaziali, regole incorporate o comunque associate all'artefatto primario; ma particolarmente significativo è il contesto nell'ambito del quale gli allievi si accostano ad essa (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri & Garuti, 1997; Radford, 2002, 2003): tale contesto ha la caratteristica del gioco, più che della rappresentazione astratta.

Una traccia importante da esplorare è quindi la seguente: il contesto del gioco può favorire la costituzione di significati in termini più incisivi di quanto non faccia la rappresentazione astratta (algebrica)? Infatti il procedimento introdotto non è un artefatto secondario essenziale per garantire un evidente funzionamento dell'artefatto primario, come potrebbero essere ad esempio alcune indicazioni d'uso per realizzare una circonferenza mediante un compasso. Da questo punto di vista, le "regole" esaminate potrebbero essere considerate convenzionali, arbitrarie. Potrebbe dunque essere il gioco stesso (che, per l'allievo, è dotato di significato di per se stesso, in quanto gioco nuovo da "esplorare") a conferire significato al procedimento algebrico (un parallelo interessante potrebbe essere condotto sulla base di: Wittgenstein, 1982 e 1999; si veda inoltre: Penco, 2004).

Ulteriori studi potranno chiarire se l'uso di bacchette e tavola da calcolo possa introdurre la risoluzione di sistemi con metodi di eliminazione e, più in generale, suggerire o sottolineare l'importanza dell'impostazione matriciale. Indichiamo inoltre una possibilità di semplificare l'artefatto secondario considerato: ad esempio, l'uso delle originali disposizioni *Tsung* e *Heng* non è indispensabile per la realizzazione pratica dell'esperienza e può essere, ad esempio, ridotto ad un semplice impiego di bastoncini in numero sufficiente per indicare le cifre (che potrebbero essere espresse un ordine determinato dalla notazione decimale). Naturalmente l'aspetto interculturale dell'esperienza suggerisce di mantenere il riferimento all'artefatto secondario originale.

> "Non facciamo distinzione tra l'avere significato e il non averlo, bensì tra l'essere usato e il non esserlo. Questa è una cosa molto importante, da tener presente quando si solleva il problema se la matematica sia soltanto un gioco fatto con simboli o se dipenda dal significato dei propri segni. Il problema svanisce quando si cessa di pensare al significato come a qualcosa che è nella mente (…). Il problema di conferire un significato indipendentemente dall'applicazione semplicemente non si pone".
>
> Ludwig Wittgenstein (1982, p. 231)

BIBLIOGRAFIA DEL CAPITOLO 3

Arrigo, G. & D'Amore, B. (1992), *Infiniti*, Angeli, Milano.

Bachtin, M. (1979), *Estetica e romanzo*, Einaudi, Torino.

Bachtin, M. (1988), *L'autore e l'eroe. Teoria letteraria e scienze umane*, Einaudi, Torino.

Bagni, G.T. (1998a), L'infinitesimo. Infinitesimo potenziale ed infinitesimo attuale nelle concezioni degli studenti della scuola secondaria superiore: *L'educazione matematica*, in via di pubblicazione.

Bagni, G.T. (1998b), *Limite e visualizzazione: una ricerca sperimentale*, in via di pubblicazione.

Bagni, G.T. (in stampa-a), Cognition and representations of two major concepts of set theory, *Educational Studies in Mathematics*.

Bagni, G.T. (in stampa-b), Historical roots of limit notion. Development of its representative registers and cognitive development, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*.

Barth, B.-M. (1990), *L'apprendimento dell'astrazione*, La Scuola, Brescia (prima edizione: Paris, 1987).

Bartolini Bussi, M.G. & Boni, F. (2003), Instruments for semiotic mediation in primary school classrooms, *For the Learning of Mathematics*, 23(2), 12-19.

Bartolini Bussi, M.G., Mariotti, M.A. & Ferri, F. (in stampa), *Semiotic mediation in primary school: Dürer's glass*.

Bartolini Bussi, M.G. (2002), The theoretical dimension of mathematics: a challenge for didacticians, *Proc. 2000 (24th) Annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, Montreal, 21-31.

Boero, P. (1989), *Campi semantici nell'insegnamento-apprendimento della matematica: riflessioni su problemi di concettualizzazione e mediazione linguistica connessi ad esperienze di innovazione curricolare*, esposto oralmente a Pisa, sessione n. 6 del Seminario Nazionale di Ricerca in Didattica della Matematica, maggio 1989.

Bostock, D. (1972-1973), Aristotle, Zeno and the potential infinite, *Proceedings of the Aristotelian Society*, 73.

Bottazzini, U. (1990), *Il flauto di Hilbert. Storia della matematica moderna e contemporanea*, UTET, Torino.

Bottazzini, U.; Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L. (1992), *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.

Boyer, C.B. (1982), *Storia della matematica*, Mondadori, Milano.

Brousseau, G. (1986), Fondaments et méthods de la didactique des mathématiques: *Recherches en didactique del mathématiques*, 7, 2, 33-115.

Casari, E. (1964), *Questioni di filosofia della matematica*, Feltrinelli, Milano.

Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, La Penseé Sauvage, Grenoble.

Cipollari, G. & Portera, A. (2004), *Cultura, culture, intercultura*, IRRE Marche, Ancona.

D'Amore, B. & Sandri, P. (1993), Una classificazione dei problemi cosiddetti impossibili, *La Matematica e la sua didattica*, 3, 344-347.

D'Amore, B. & Frabboni, F. (1996), *Didattica generale e didattiche disciplinari*, Angeli, Milano.

D'Amore, B. & Giovannoni, L. (1997), Coinvolgere gli allievi nella costruzione del sapere matematico: *La matematica e la sua didattica*, 4, 360-399.

D'Amore, B. & Martini, B. (1997), Contratto didattico, modelli mentali e modelli intuitivi nella risoluzione di problemi scolastici standard: *La matematica e la sua didattica*, 2, 150-175.

D'Amore, B. & Sandri, P. (1997), *Risposte degli allievi a problemi di tipo scolastico standard con un dato mancante* (in via di pubblicazione).

D'Amore, B. (1993), *Problemi*, Angeli, Milano.

D'Amore, B. (1997a), Bibliografia in progress sul tema: "l'infinito in didattica della matematica": *La matematica e la sua didattica*, 3, 289-305.

D'Amore, B. (1997b), Matite – Orettole – Przxetqzyw. Le immagini mentali dei testi delle situazioni-problema influenzano davvero la risoluzione?:

L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate (in via di pubblicazione).
D’Amore, B. (2001), Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution, *Scientia Paedagogica Experimentalis* 38-2, 143-168.
Duval, R. (1983), L’ostacle du dedoublement des objects mathématiques: *Educational Studies in Mathematics*, 14, 385-414.
Duval, R. (1993), Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée: *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg.
Duval, R. (1994), Les différents fonctionnements d’une figure dans une démarche géométrique: *Repres IREM*, 17, ottobre.
Duval, R. (1994), Les représentations graphiques: fonctionnement et conditions de leur apprentissage: *Actes de la Quarantesixieme Rencountre Internationale de la CIEAEM* (in via di pubblicazione).
Duval, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine*, Lang, Paris.
Duval, R. (1997), La compréhension des énoncés de problème de mathématisation: de la lecture à la résolution: D’Amore, B. & Gagatsis, A. (a cura di), *Didactics of Mathematics-Technology in Education*, Erasmus ICP-96-G-2011/11, 25-46, Thessaloniki.
Engestroem, Y. (1990), When is a tool? Multiple meanings of artifacts in human activity, in *Learning, working and imagining: twelwe studies in activity theory*, Orienta-Konsultit Oy, Helsinki, 171-195.
Euclide (1970), *Elementi*, Frajese, A. & Maccioni. L. (a cura di), UTET, Torino.
Ferro, R. (1993), La Teoria degli Insiemi, p. II, *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 16, 11-12, 1077-1099.
Fiori, C. & Pellegrino, C. (1997), Immagine della matematica tra concezione e divulgazione: *La matematica e la sua didattica*, 4, 426-443.
Fischbein, E. & Vergnaud, G. (1992), *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*, D’Amore, B. (a cura di), Pitagora, Bologna.
Fischbein, E. (1983), Intuition and proof: *For the Learning of Mathematics*, 3, 2, 9-24 (Intuizione e dimostrazione: Fischbein, E. & Vergnaud, G., 1992, *Matematica a scuola: teoria ed esperienze*, Pitagora, Bologna, 1-24).
Fischbein, E. (1985), Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari: Chini Artusi, L. (ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Zanichelli, Bologna, 122-132.
Fischbein, E. (1987), *Intuition in science and mathematics*, Riedel, Dodrecht.
Freudenthal, H. (1983), *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Reidel, Dordrecht.

Furinghetti, F. (1992), Luci ed ombre dell’approccio “intuitivo”: Furinghetti, F. (ed.), *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto,* Atti del II Internucleo della Scuola superiore, CNR, Tecnologie e innovazioni didattiche, 13, 83-96.

Furinghetti, F. (1993), Images of Mathematics outside the community of mathematicians: evidence and explanations: *For the Learning of Mathematics*, 13, 2, 33-38.

Geymonat, L. (1970), *Storia del pensiero filosofico e scientifico*, Garzanti, Milano.

Godino, J. & Batanero, C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3, 325-355.

Hardy, G.H. & Wright, E.M. (1938), *An Introduction to the Theory of Numbers*, Clarendon Press, Oxford (quinta edizione, 1979).

Johnson-Laird, P.N. & Byrne, R.M.J. (1990), *Deduction*, Erlbaum, Hillsdale.

Johnson-Laird, P.N. (1988), *Modelli mentali*, Il Mulino, Bologna (prima edizione originale: 1983).

Kaldrimidou, M. (1987), *Images mentales et représentations en mathématiques chez les mathématiciens et les étudiants en mathématiques*, Thèse 3éme cycle, Université Paris 7, Paris.

Kaldrimidou, M. (1995), Lo status della visualizzazione presso gli studenti e gli insegnanti di matematica: *La matematica e la sua didattica*, 2, 181-194.

Kaput, J.J. (1993), The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience, Bieler, R.; Scholz, R.W., Strasser, R. & Winkelman, B. (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, 379-397, Kluwer, Dordrecht.

Kline, M. (1991), *Storia del pensiero matematico. I. Dall’Antichità al Settecento. II. Dal Settecento a oggi*, Einaudi, Torino.

Kosslyn, S.M. (1989), *Le immagini della mente*, Giunti, Firenze 1989 (prima edizione originale: 1983).

Lakoff, G. & Núñez, R. (2000), *Where Mathematics come from? How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York.

Mariotti, M.A., Bartolini Bussi, M.G., Boero, P., Ferri, F. & Garuti, R. (1997), Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, *Proceedings of PME-21*, Lathi, Finland, I, 180-195.

Mariotti, M.A. (2005), *La geometria in classe. Riflessioni sull’insegnamento e l’apprendimento della geometria*, Pitagora, Bologna.

Martzloff, J.-C. (1987), *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, Paris.

Needham, J. (1959), *Science and civilisation in China*, Cambridge University Press.

Paivio, A. (1986), *Mental representation: a dual coding approach*, Clarendon Press, Oxford.

Pellerey, M. & Orio, F. (1996), La dimensione affettiva e motivazionale nei processi di apprendimento della matematica: *ISRE*, 2, 52-73.

Penco, C. (2004), *Introduzione alla filosofia del linguaggio*, Laterza, Roma-Bari.

Polya, G. (1971), *La scoperta matematica*, I-II, Feltrinelli, Milano.

Presmeg, N.C. (1986), Visualization and mathematical giftedness: *Educational studies in mathematics*, 17, 297-311.

Rabardel, P. (1995), *Les hommes et les technologies: Approche cognitive des instruments contemporains*, A. Colin, Paris.

Radford, L. (2002), The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge, *For the Learning of Mathematics*, 22 (2), 14-23.

Radford, L. (2003), Gestures, speech and the sprouting of signs, *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.

Ribenboim, P. (1980), *The Book of Prime Number Records*, Springer Verlag, New York (seconda edizione, 1989).

Schoenfeld, A.H. (1986), On having and using Geometric knowledge: Hiebert, J. (a cura di), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*, 225-263, Erlbaum, Hillsdale.

Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.

Shama, G. & Dreyfus, T. (1991), Spontaneous strategies for visually presented linear programming problems: Furinghetti, F. (ed.), *Proceedings of PME XV*, Assisi, 3, 262-270.

Shepard, R.N. (1980), *Internal representations: studies in perception imagery and cognition*, Bradford, Montgomery.

Steinbring, H.: 2002, What makes a Sign a Mathematical Sign? An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction, *Paper presented to the Discussion Group on Semiotics at the 26th PME*

Tall, D. & Vinner, S. (1981), Concept image and concept definition in mathematics with particolar reference to limits and continuity: *Educational Studies in Mathematics* 12, 151-169.

Tall, D. (1980), The notion of infinity mesauring number and its relevance in the intuition of the infinity: *Educational Studies in Mathematics*, 11, 271-284.

Tall, D. (1985), Understanding the Calculus: *Mathematical Teaching*, 110, 49-53.

Tsamir, P. & Tirosh, D. (1992), Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity: *PME* XVI, 90-97, Durham.

Vergnaud, G. (1985), Psicologia cognitiva ed evolutiva. Ricerca in didattica della matematica: alcune questioni teoriche e metodologiche: Chini Artusi, L. (ed.), *Numeri e operazioni nella scuola di base*, Zanichelli-UMI, Bologna, 20-45.

Vergnaud, G. (1992), La teoria dei campi concettuali: *La matematica e la sua didattica*, VI, 1, 4-19.

Vergnaud, G. (1994), *Il bambino, la matematica e la realtà*, Armando, Roma (edizione originale: Lang, Berne 1981).

Vinner, S. (1992), Function concept as prototype for problems in mathematics: Harel, G. & Dubinsky, E. (a cura di), *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, 25, 195-213.

Vygotskij, L.S. (1974), *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori e altri scritti*, Giunti, Firenze.

Vygotskij, L.S. (1987), *Il processo cognitivo*, Boringhieri, Torino.

Vygotsky, L.S. (1962), *Thought and Language*, MIT Press, Cambridge.

Waldegg, G. (1993), La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction: *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*, 5, 19-36.

Wartofsky, M.: (1979), Perception, representation and the forms of action: towards an historical epistemology, *Models. Representation and the scientific understanding*, Reidel Publishing Company, 188-209.

Wittgenstein, L. (1982), *Lezioni sui fondamenti della matematica*, Boringhieri, Torino.

Wittgenstein, L. (1999), *Ricerche filosofiche*, Einaudi, Torino.

Zan, R. (1991-1992), I modelli concettuali di problema nei bambini della scuola elementare: *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 14 (7, 9), 659-677; 15 (1), 39-53.

Zan, R. (1995), Chi non riesce in matematica?: D'Amore, B. (a cura di), *Insegnare ad apprendere la matematica in aula: situazioni e prospettive*, Atti del IX Convegno Nazionale "Incontri con la Matematica", Castel San Pietro Terme, Pitagora, Bologna, 77-83.

❋❋❋