Università di Udine, Facoltà di Scienze della Formazione

Corso di Storia della Scienza (5)
Breve storia della logica

Universitas Studiorum Utinensis

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Due tradizioni logiche

- **Aristotele** indicava i tre principi logici fondamentali:
- *principio di non contraddizione*: una proposizione e la sua negazione non sono contemporaneamente vere;
- *principio di identità*: una proposizione è uguale (equivale) a se stessa;
- *principio del terzo escluso*: tra una proposizione e la sua negazione almeno una è vera.
- La logica aristotelica prevedeva l'analisi di **alcuni tipi di proposizioni** (universali, particolari, affermative, negative) e lo studio dei **sillogismi**. Inizieremo però con la presentazione moderna della **logica megarico-stoica** che **non diversificava le proposizioni.**

Logica proposizionale
Verità e falsità

- Diremo **enunciato** o **proposizione** un'affermazione che assume uno ed un solo valore di verità, **vero** o **falso**.
- Tale caratteristica è tutt'altro che banale: infatti non tutte le affermazioni assumono incontestabilmente uno ed un solo valore di verità.
- Alcuni enunciati sono costituiti da una sola affermazione («Atene è in Grecia») e sono detti enunciati **atomici**.
- Nella logica proposizionale prescinderemo dalla "struttura interna" degli enunciati. Questa nostra scelta verrà superata con la **logica dei predicati**.

Logica proposizionale
Verità e falsità

- Enunciati più complicati sono costituiti da più affermazioni, collegate da opportune parole (**connettivi**) come *o*, *e*, *se… allora…*, *se e solo se*.
- I connettivi collegano gli enunciati senza riguardo al significato che possono assumere quelli: l'unica caratteristica che viene indicata nella loro definizione è quale valore di verità abbia l'enunciato composto a partire soltanto dai valori di verità assegnati agli enunciati componenti.
- Le **tavole di verità** riassumono (in versione moderna) le definizioni dei connettivi.

Logica proposizionale
Connettivi

I connettivi formalizzano alcune parole e sono oggi indicati da opportuni simboli:

- $\neg A$ formalizza **non** A
- $A \wedge B$ formalizza A **e** B
- $A \vee B$ formalizza A **o** B
- $A \rightarrow B$ formalizza **se** A **allora** B
- $A \leftrightarrow B$ formalizza **se** A **allora** B **e se** B **allora** A

(Talvolta "non" viene indicato come "operatore" e non come "connettivo" in quanto, a differenza degli altri connettivi, non collega due enunciati ma opera su di un solo enunciato).

Nella tabella (tavola di verità) sono riassunte le definizioni dei connettivi:

A	B	¬A	A∧B	A∨B	A→B	A↔B
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

Esempio. Tavola di verità dell'enunciato composto: $\neg[(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)]$:

A	B	A∧B	¬B	A∧¬B	(A∧B)∨(A∧¬B)	¬[(A∧B)∨(A∧¬B)]
V	V	V	F	F	V	F
V	F	F	V	V	V	F
F	V	F	F	F	F	V
F	F	F	V	F	F	V

I valori di verità di $\neg[(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)]$ corrispondono a quelli di $\neg A$.

Oltre la logica proposizionale. Dalla sillogistica al calcolo dei predicati

- Nell'ambito della logica degli enunciati (ovvero nella tradizione megarico-storica) le due frasi:
  Atene è in Grecia
  Tutti i quadrati hanno quattro lati
  non presentano alcuna differenza sostanziale.
- Si tratta di due enunciati (peraltro veri), e dicendo ciò non si fa riferimento alla loro ben **diversa struttura**:
- il primo di essi è evidentemente riferito ad un **singolo** soggetto (Atene), al quale viene attribuita una certa proprietà (quella di trovarsi in Grecia);
- L'altro coinvolge **tutti** i quadrati (ha molti soggetti) e ad essi riferisce la proprietà di avere quattro lati.

Oltre la logica proposizionale Proposizioni universali e particolari

- La **logica dei predicati** (o **calcolo dei predicati**) contiene come parte propria la logica degli enunciati.
- Nella logica dei predicati si utilizzano frasi del tipo:
  Esiste (almeno) un x che verifica la proprietà P
  Per ogni y è verificata la proprietà Q
- Per formalizzare la prima frase usiamo modernamente un **quantificatore esistenziale** che garantisce l'esistenza di un oggetto che verifica la proprietà; per la seconda si usa un **quantificatore universale** che garantisca il rispetto della proprietà da parte di tutti gli oggetti di una totalità.

Oltre la logica proposizionale Le proposizioni secondo Aristotele

- **Universale affermativa**
  ad esempio: *Tutti gli orsi sono vertebrati*
- **Particolare affermativa**
  ad esempio: *Alcuni uccelli sono rapaci*
- **Universale negativa**
  ad esempio: *Tutti gli orsi non sono pesci*
  (ovvero: *Nessun orso è un pesce*)
- **Particolare negativa**
  ad esempio: *Alcuni uccelli non sono rapaci*

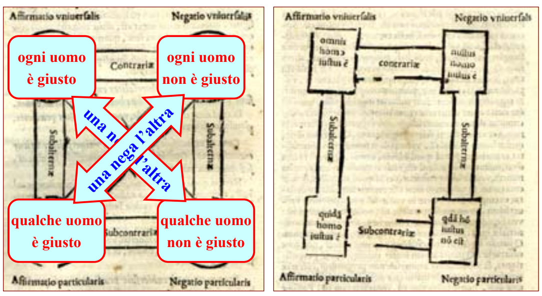
Oltre la logica proposizionale Simbologia moderna: quantificatori

- Il simbolo $\exists x$ P significa che esiste (almeno) un *x* che verifica la P. $\exists$ è detto **quantificatore esistenziale**.
- Il simbolo $\forall x$ P significa che per ogni *x* è verificata la proprietà P. $\forall$ è detto **quantificatore universale**.
- Ciascun quantificatore può essere espresso mediante l'altro e l'operatore di negazione $\neg$; ad esempio, dire che esiste almeno un *x* per cui è verificata la proprietà P equivale a dire che non per ogni *x* per la proprietà P risulta non verificata. In simboli:
- **$\exists x$ P equivale a: $\neg(\forall x\,(\neg \mathrm{P}))$**
- **$\forall x$ P equivale a: $\neg(\exists x\,(\neg \mathrm{P}))$**

Oltre la logica proposizionale Ancora sulle proposizioni quantificate

- Quanto ora notato consente di precisare alcune importanti osservazioni riguardanti la negazione di una frase quantificata, che riassumiamo così (ricordiamo che l'enunciato $\neg(\neg A)$ equivale ad A):
- la negazione di: $\exists x$ P è: $\neg(\neg(\forall x\,(\neg \mathrm{P})))$
  ovvero è: **$\forall x\,(\neg \mathrm{P})$**
- la negazione di: $\forall x$ P è: $\neg(\neg(\exists x\,(\neg \mathrm{P})))$
  ovvero è: **$\exists x\,(\neg \mathrm{P})$**
- Spesso, invece, sentiamo dire che la negazione di *Tutti i C sono D* è (ahimé!) *Nessun C è D…*
  (mentre dovrebbe essere: *Esiste un C che non è D*!)

Il quadrato logico (o "di Psello") fa parte della storia della logica



Un salto di millenni: Peirce e le tre forme di inferenza. La deduzione

- Nel 1878 **C.S. Peirce** (1834-1914) illustrò i tre tipi di inferenza con un celebre esempio: disponiamo di un sacco con l'etichetta "Fagioli bianchi". Ciò significa che contiene soltanto fagioli bianchi (*regola*): se estraessimo una manciata di fagioli dal sacco (*caso*), constateremmo che sarebbero tutti bianchi (*risultato*).
- Questa struttura è detta **deduzione**.

Regola **Tutti i fagioli in questo sacco sono bianchi**
Caso **Questi fagioli provengono da questo sacco**
↓
Risultato **Questi fagioli sono bianchi**

Induzione

- La deduzione non "aumenta la conoscenza", ma tiene conto delle conseguenze della situazione (regola-caso).
- Illustriamo l'**induzione**: non conosciamo il contenuto del sacco (non c'è etichetta); per scoprirlo estraiamo una manciata del contenuto (*caso*) e notiamo che si tratta di fagioli bianchi (*risultato*). Questo ci fa supporre che il sacco contenga soltanto fagioli bianchi (*regola*). La regola generalizza il caso sperimentale, ma non siamo certi della sua validità:

Caso **Questi fagioli provengono da questo sacco**
Risultato **Questi fagioli sono bianchi**
↓
Regola **Tutti i fagioli di questo sacco sono bianchi (?)**

Dall'induzione all'abduzione

- Per aumentare l'affidabilità di quanto supposto possiamo ripetere l'operazione: ogni volta che estraiamo una nuova manciata di fagioli bianchi aumenta il grado di affidabilità della supposizione fatta, ma non potremmo essere sicuri della sua validità finché non avremo controllato tutti i fagioli del sacco.
- Esaminiamo infine il caso dell'**abduzione**: vediamo una manciata di fagioli bianchi (non ne conosciamo la provenienza) su di un tavolo (*risultato*) e, accanto, un sacco con l'etichetta "Fagioli bianchi" (*regola*).
- Supponiamo allora che i fagioli sul tavolo provengano proprio da quel sacco, ossia che costituiscano un *caso* di questa regola.

Abduzione

- La struttura logica è la seguente:

Risultato **Questi fagioli sono bianchi**
Regola **Tutti i fagioli di questo sacco sono bianchi**
↓
Caso **Questi fagioli provengono da questo sacco (?)**

- L'abduzione è ovviamente rischiosa in quanto il risultato (i fagioli bianchi sul tavolo) potrebbe essere un caso della regola che conosciamo…
- …ma potrebbe anche essere un caso di **altre regole** (ad esempio i fagioli potrebbero essere stati collocati sul tavolo da qualcuno per qualche altro motivo, ma non provenire dal sacco).

Inferenza e congetture

- Nel passato l'induzione "incompleta" (cioè quella basata soltanto sulla generalizzazione di uno o più casi particolari) era considerata una tecnica dimostrativa accettabile, mentre consente solo la formulazione (peraltro importante!) di **congetture**.
- **L'applicazione in matematica dell'induzione incompleta può essere causa di errori**. Ad esempio, per i naturali n, con $0<n<20$, almeno uno dei numeri $6n\pm1$ è primo; ma la generalizzazione di questa iniziale regolarità sarebbe errata:
- infatti per $n = 20$ entrambi i numeri $6\cdot20\pm1$ sono composti ($119 = 7\cdot17$ e $121 = 11\cdot11$).
- I numeri primi forniscono esempi interessanti…

Inferenze deduttive e induttive: un cenno all'aritmetica dei primi

Un numero intero maggiore di 1:

- si dice **primo** se gli unici suoi divisori sono se stesso e l'unità: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …
- si dice **composto** se non è primo: $4=2\cdot2$, $6=2\cdot3$, $8=2\cdot2\cdot2$, …
- Per trovare i primi minori di un k useremo tra poco il **Crivello di Eratostene** (276-195 a.C.).
- Possiamo chiederci: **"quanti" sono i numeri primi?**
- La risposta è in uno splendido teorema di Euclide.

Una dimostrazione di rara eleganza: la dimostrazione per assurdo

- Vogliamo dimostrare che:
  se A (ipotesi) allora B (tesi)
- La “dimostrazione per assurdo” consiste nel negare la tesi (supporre che non sia vera) e da ciò dedurre una conseguenza assurda (oppure contraria a quanto era stato ammesso per ipotesi).
- La tesi, dunque, **non può non essere vera**
  e quindi (tertium non datur)... **è vera!**
- Euclide è un maestro nell’applicazione di questa tecnica logica. Come vedremo, uno dei suoi più eleganti risultati è dimostrato per assurdo.

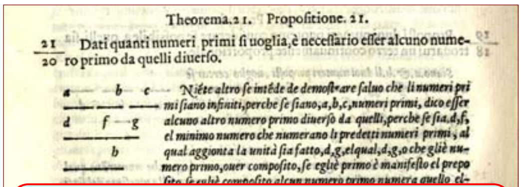
Paul Erdös (1913-1997): “A 10 anni conobbi la dimostrazione di Euclide… e mi innamorai!”

- **I primi sono infiniti.**
- Se fossero solo 2, 3… n, A = $2\cdot3\cdot\ldots\cdot n+1$, composto, avrebbe un divisore p (primo) in comune con B = $2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$. Ma se un numero divide A e B divide anche la differenza A–B. Tale p sarebbe anche divisore di A–B = 1, **assurdo!**

Se i primi fossero solo 2, 3, 5 il numero A = $2\cdot3\cdot5+1$ = 31 sarebbe composto (non è primo) e, come ogni composto, avrebbe un divisore primo, dunque: 2, 3 o 5, ad es. 3. Ma 3 è divisore anche di B = $2\cdot3\cdot5$ = 30 e se 3 dividesse sia A che B dovrebbe dividere anche A–B = 1…

Attenzione: Euclide non afferma che i numeri primi sono infiniti!

- Gli *Elementi* esaminati sono curati da **Tartaglia** (1569).


Theorema. 21. Propositione. 21.
21/20 Dati quanti numeri primi si uoglia, è necessario esser alcuno numero primo da quelli diuerso.
Niẽte altro se intẽde de demostrare saluo che li numeri primi siano infiniti, perche se siano, a, b, c, numeri primi, dico esser alcuno altro numero primo diuerso da quelli, perche se sia, d, f, el minimo numero che numerano li predetti numeri primi, al qual aggionta la unità sia fatto, d, g, el qual, d, g, o che gliè numero primo, ouer composito, se gliè primo è manifesto el preposito, se gliè composito alcun numero primo numera quello el-

Il teorema originale di Euclide è formulato così: “Assegnata una qualsiasi quantità di numeri primi, esiste un numero primo diverso da quelli dati”

Mai Euclide avrebbe trattato un’infinità attuale di numeri primi!

- La concezione dell’infinito in Euclide è **potenziale, non attuale**.
- Il teorema di Euclide è un capolavoro di eleganza.
  ed è un capolavoro di coerenza.
- Il teorema che abbiamo illustrato è stato pubblicato **nel XIX secolo da E.E. Kummer**. La dimostrazione è molto simile a quella euclidea, ma…
- … il contesto socio-culturale in cui i teoremi sono stati elaborati è ben diverso!
- Anche nel “crivello di Eratostene” non si fa riferimento a “infiniti” numeri primi.

Nota. Il crivello: i primi da 2 a 24

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~
7	~~8~~	~~9~~	~~10~~	11	~~12~~
13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~
19	~~20~~	~~21~~	~~22~~	23	~~24~~

- Quando non ci sono più numeri da “scartare”… **tutti quelli che restano sono numeri primi!**

A tutti grazie dell’attenzione