Università di Udine, Facoltà di Scienze della Formazione

Corso di Storia della Scienza (18)
Calcolo pratico e uso di artefatti presso Indiani, Arabi e nell'Europa medievale

Universitas Studiorum Utinensis

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Le radici della matematica hindu

- L'esordio della matematica indiana si colloca intorno all'**800 a.C.**, sebbene la civiltà in India sia più antica.
- Gli scavi di Mohenjo Daro documentano l'esistenza in India di una raffinata civiltà nel periodo dei costruttori delle piramidi egiziane, ma non ci è pervenuto alcun documento matematico indiano risalente a tale epoca.
- Tra le più antiche fonti matematiche indiane troviamo **i *Sulvasutra* (tra 600 a C. e 200 d.C.)**, nome riferito alle corde con le quali gli agrimensori indiani, analogamente ai loro colleghi egiziani, erano soliti misurare il terreno, contenenti terne pitagoriche:

  3, 4, 5 5, 12, 13 8, 15,17 12, 35, 37

Le radici della matematica hindu

- Non approfondiremo la questione dell'originalità della matematica indiana, contrapposta ad una sua dipendenza dalla matematica greca (Boyer, 1982).
- Nell'opera *Aryabhatiya* (499) di Aryabhata (nato nel 476) sono descritti molti procedimenti aritmetici e geometrici, ma **spesso senza giustificazione.**
- Numerosi risultati, inoltre, sono inesatti: circa la metà delle regole geometriche suggerite è errata.
- L'aritmetica indiana assunse importanza primaria per l'**introduzione del sistema posizionale** (sebbene non tutti gli storici siano certi della consapevolezza, da parte degli Hindu, della sua importanza).

Le radici della matematica hindu

- Il sistema di numerazione indiano subì numerosi cambiamenti prima di assumere la forma definitiva, **diffusa in Europa attraverso la mediazione araba.**
- L'aritmetica indiana si basava su tecniche non molto diverse da quelle in uso oggi. Nei calcoli astronomici erano impiegate le **frazioni con base sessagesimale.** I rapporti di numeri (positivi) erano indicati con una scrittura simile alla nostra, senza il trattino separatore.
- Gli Indiani elaborarono metodi per l'esecuzione pratica delle operazioni aritmetiche. Notevole diffusione nell'Europa medievale ebbe, come vedremo, la **moltiplicazione per graticola** (o gelosia).

India: un problema da *Lilavati* (Bhaskara, 1114-1185)

- Un quinto di uno sciame di api si posò su di un fior di cadamba, un terzo su di un fior di silinda, tre volte la differenza di questi due numeri di api volò tra gli altri fiori del giardino e rimase solo un'ape, che si librò nell'aria, attirata dal profumo di un gelsomino. Dimmi ora tu, bella **Lilavati**, qual era il numero delle api?
- Fior di cadamba: 1/5; silinda: 1/3: altri: 3(1/3–1/5)
- Totale: 1/5+1/3+3(1/3–1/5) = 14/15
- Un'ape corrisponde a: 1–14/15 = 1/15
- Quindi: **in totale ci sono 15 api**.

Storia e geografia della Matematica

- Abbiamo ricordato l'**India** e parleremo degli **Arabi**…

Matematica greca

212 a.C.: Roma conquista Siracusa; morte di Archimede

Matematica romana (pressoché insignificante; tuttavia si mantiene viva la tradizione ellenistica)

(524: morte di Boezio)

Collegamento: Matematica araba

1202: pubblicazione del "Liber Abaci" di Fibonacci

Sviluppo della Matematica nell'Europa occidentale: dal Medioevo ai giorni nostri

2000: ...

Il mondo arabo : Al-Kuwarizmi

- "Dopo la grande stagione della scienza greca, la Matematica conobbe un periodo di declino, anche se meno oscuro di quanto si è talvolta portati a pensare. **Gli Arabi non si limitarono a tramandare la memoria dei testi greci e le loro conoscenze matematiche e astronomiche rivelano elementi di originalità**" (U. Bottazzini).
- **Mohammed Ibn Musa Al-Kuwarizmi** (VIII secolo), di origine persiana, scrisse ***Al-jabr wal mukabalah***, nella quale sviluppò la teoria delle equazioni, particolarmente di quelle di secondo grado
- Il procedimento generale per la soluzione delle equazioni di secondo grado è di derivazione indiana.

Al-Kuwarizmi

- Non considerava le radici negative e classificava *impossibili* le radici immaginarie.
- Il limite più rilevante della sua opera è l'**assenza di una notazione simbolica**.
- Al-Kuwarizmi quindi deve essere considerato ancora nell'ambito dell'**algebra retorica** (nella quale tutte le espressioni algebriche erano indicate mediante parole).

Il mondo arabo : Khayyam

- **Omar Khayyam** scrisse un'*Algebra* (1100?), caratterizzata da un'esposizione piana dei procedimenti risolutivi delle equazioni.
- Come Al-Kuwarizmi, anche Khayyam teneva conto soltanto delle radici positive.
- Gli Arabi si occuparono di **equazioni indeterminate** (**Al-Karchi**, morto nel 1029, scrisse *Al-Facri*, vicino all'*Aritmetica* diofantea).
- Alcuni tentarono di provare che $x^3+y^3 = z^3$ non ammette soluzioni intere non nulle, anticipando le ricerche sull'**ultimo teorema di Fermat**.

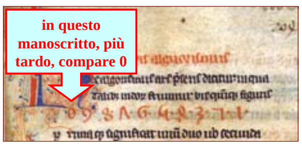
Un numero "insignificante", ma enormemente importante: la storia del meraviglioso zero

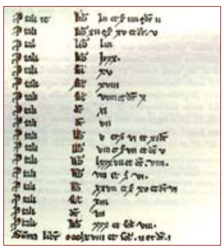
- Presso i Greci ed i Romani non esisteva lo zero... perché **non serviva**!
- Greci e Romani scrivevano i numeri in forma **additiva**: un simbolo aveva solo un valore (X = 10):
- **X**II = 12   CC**X** = 210   M**XX**VIII = 1028   etc.

Nessuna unità   Nessun centinaio

- Lo zero non doveva indicare i posti **vuoti**. Nell'anno 876 d.C. comparirà in India (o presso i Maya).

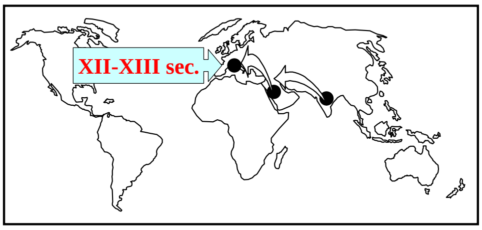
Gli Arabi e la notazione numerica posizionale





- Le cifre indo-arabe in un manoscritto spagnolo (976).
- Le cifre indo-arabe nel manoscritto del *Codice Magliabechiano* del *Liber Abaci* di Fibonacci (opera originariamente pubblicata nel 1202).

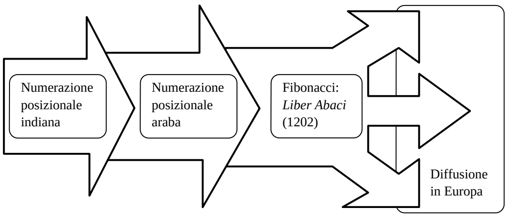
La notazione numerica posizionale dall'India verso l'Europa



- L'origine della notazione numerica posizionale (oggi detta "araba" o "indo-araba") è **indiana**.
- Raggiunge l'Europa attraverso la mediazione **araba**.

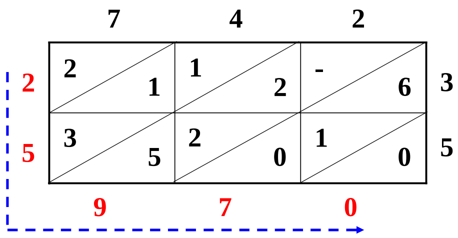
La notazione posizionale in Europa

- Una figura chiave:
  Leonardo da Pisa…
  detto **Fibonacci** (1170?-1250), autore del ***Liber Abaci*** (1202).



La notazione posizionale e il calcolo: come si moltiplicava nel Medioevo?

- Medioevo: si diffondono tecniche di calcolo pratico.
- La moltiplicazione **per graticola** ha origini indo-arabe.
- Eseguiamo la moltiplicazione: **742 × 35 = 25970**

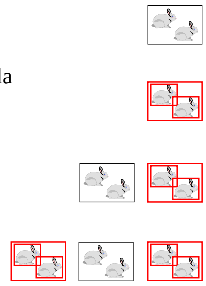


Torniamo a Fibonacci: i coniglietti

- Immaginiamo di possedere una coppia di giovanissimi conigli.
- **Dopo un mese** di vita essa diviene feconda e, da quel momento in poi, genera **una nuova coppia di coniglietti al mese**.
- Ogni nuova coppia di coniglietti si comporterà allo stesso modo: dopo un primo mese di attesa, genererà una nuova coppia di coniglietti al mese, tutti i mesi.
- Seguiamo l'evoluzione del gruppo di coniglietti: facciamo attenzione al numero di coppie che avremo a disposizione, mese dopo mese.

I coniglietti di Fibonacci

- All'inizio abbiamo solo una coppia, A, non feconda;
- dopo **un mese**, abbiamo ancora la sola coppia A, che è divenuta feconda;
- dopo **due** mesi, A (che resta) ha generato una nuova coppia B, inizialmente non feconda;
- dopo **tre** mesi, A ha generato C, inizialmente non feconda, e B è diventata feconda…



I coniglietti di Fibonacci

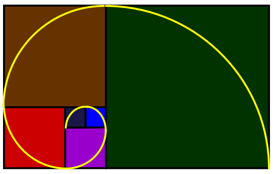
- Se contiamo, mese dopo mese, il numero delle coppie di coniglietti, troveremo la **successione di Fibonacci**; fu il matematico francese Edouard Lucas (1842-1891) che propose tale denominazione:
  1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; …
- I calcoli diventano sempre più fastidiosi; come potremmo scrivere una "regola" che ci aiuti a calcolare con facilità i termini di tale successione?
- Insomma: **quante saranno le coppie di coniglietti ad un mese considerato?**

I coniglietti di Fibonacci

- Ci saranno, ovviamente, **tutte le coppie del mese precedente** (i coniglietti sono immortali!).
- Ci saranno poi le coppie "neonate": quante? Una per ogni coppia feconda (nel mese precedente al mese considerato). Ma le coppie di coniglietti diventano feconde dopo un mese di "attesa". Quindi il numero di coppie in età feconda al momento considerato è il numero delle **coppie presenti due mesi prima**.
- Quindi: **il numero a_n di coppie al mese n-esimo è la somma del numero delle coppie presenti nei due mesi precedenti.**
- $a_0 = 1$; $a_1 = 1$; $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ $\quad n \in \mathbb{N}$

I coniglietti di Fibonacci

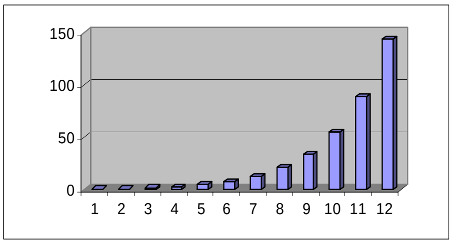
- La successione di numeri: **1, 1, 2, 3, 5, 8, 15, …** si ritrova in molte applicazioni.
- Ad esempio consente di tassellare un piano con una sequenza di quadrati due soli dei quali con lati uguali:



- una sequenza strettamente imparentata con la **spirale**!

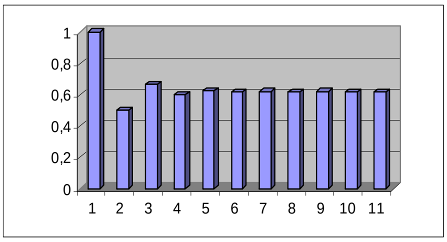
I coniglietti di Fibonacci

- Possiamo anche rappresentare in un grafico l'andamento della nostra “popolazione” per i primi mesi (consideriamo, ad esempio, il primo anno):



I coniglietti di Fibonacci

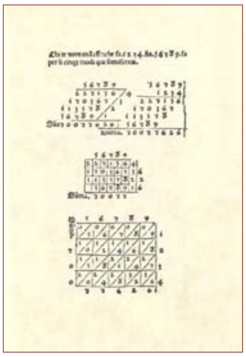
- Se esaminiamo il rapporto tra il numero di coppie al mese *n*-esimo e al mese (*n*+1)-esimo, troviamo che al crescere di *n* tale rapporto **tende a “stabilizzarsi”** intorno ad un valore di poco superiore a 0,6:



Scienza e società nel Medioevo

- La storia dei manuali di aritmetica risale dunque ad alcuni secoli prima dell’introduzione della stampa a caratteri mobili.
- Questa determinò il rapido diffondersi dei manuali. Due decenni dopo la pubblicazione della *Bibbia* di Gutenberg a Magonza (1456), nel 1478 vide la luce a Treviso **il primo libro di matematica a stampa pubblicato al mondo**, *Larte de labbacho* (anonimo).
- Altri manuali di aritmetica pratica furono in seguito pubblicati in Europa: nel 1483, a Bamberg (Baviera) e a Padova; e l’anno seguente un lavoro di Pietro Borghi fu stampato a Venezia.

Scienza e società nel Medioevo



A tutti grazie dell’attenzione