

Università di Udine, Facoltà di Scienze della Formazione
Corso di Storia della Scienza (13)
Gli insiemi
e i fondamenti della matematica



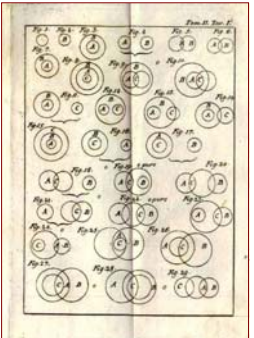
**Universitas
Studiorum
Utinensis**

Giorgio T. Bagni
 Dipartimento di Matematica e Informatica
 Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Preistoria: i diagrammi di **Eulero nelle
Lettere ad una Principessa d'Alemagna**

Curiosità "cronologica":

- **Leonhard Euler** (1707-1783) nel 1772 visualizzava alcuni sillogismi...
- con una rappresentazione per gli **insiemi** (rivista da John Venn, 1834-1923) che saranno introdotti **un secolo più tardi** da Cantor.



Insiemi nell'Ottocento

- Dunque una "sensibilità intuitiva" per gli insiemi è presente anche prima dell'Ottocento.
- Il termine "insieme" (*Menge*) in senso matematico compare forse per la prima volta in un libretto di **Bernhard Bolzano** (1781 -1848), *Paradoxien des Unendlichen* (Paradossi dell'Infinito), pubblicato postumo a Lipsia nel 1851.
- Ma l'opera di Bolzano non riguarda propriamente gli insiemi come oggetti di studio, bensì l'infinito (più tardi ci occuperemo ancora di Bolzano).
- Sarà **Georg Cantor** (1845-1918), alcuni decenni dopo, ad occuparsi specificamente degli insiemi.

Insieme Un concetto fondamentale...



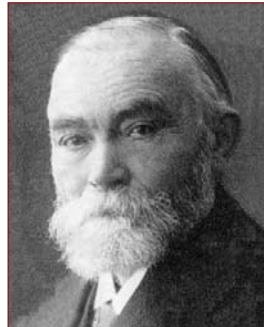
- Scriveva **Georg Cantor** dal 1879:
- Una varietà (un aggregato, un **insieme**) di elementi è ben definita quando, "sulla base della sua definizione e del principio logico del terzo escluso", sia sempre "**determinato se un qualunque oggetto è, o no, elemento della varietà**".

Insieme ...senza definizione!



- L'insieme è un **concetto primitivo**, con un forte "corredo" assiomatico.
- L'originale **teoria ingenua degli insiemi** si basa sul **principio di comprensione**: data una qualsiasi proprietà $F(x)$, è lecito costruire l'insieme: $\{x | F(x)\}$.
- Alla fine del XIX secolo nessuno dubitava di ciò.

**Gottlob Frege:
un grande logico**



- **Gottlob Frege** (1848-1925) è un gigante della Logica, il padre del calcolo dei predicati.
- Nel 1902 sta per essere pubblicata la seconda parte di *Grundgesetze der Arithmetik*.
- Ma un trentenne logico inglese scrive una lettera a Frege...

Bertrand Russell (1872-1970) con una definizione manda in crisi i fondamenti



- Ripetiamo: all'inizio del Novecento non erano note **restrizioni** al tipo di elementi che possono appartenere ad un insieme.
- Ma ecco la definizione di Russell: un insieme si dice **normale** se (e solo se) esso ha la proprietà di **non contenere se stesso come elemento**.

Approfondiamo la definizione di insieme normale

- Se ad un insieme possono appartenere elementi di qualsiasi tipo (per il principio di comprensione), ha senso parlare di insiemi che **appartengono come elementi a se stessi**.
- Ad esempio, l'insieme I di tutte le "idee" è un'idea. Quindi: $I \in I$.
- Un insieme per il quale **non** si verifica questa (inusuale) situazione si dice **insieme normale**.
- Quindi, ad esempio, l'insieme dei numeri naturali è un insieme normale: $N = \{0; 1; 2; \dots\}$ e $N \notin \{0; 1; 2; \dots\}$.
- Invece l'"insieme delle idee" non sarebbe normale.

Nota: che cosa sono le antinomie? L'Antinomia di Epimenide

- **"Io sto mentendo"**.
- Così commentava Alberto Magno (1193-1280):
- "Dico **insolubili** le proposizioni formate in modo tale che, qualunque parte sia data, da essa segue l'opposto. Ad esempio, qualcuno giura che giura il falso; o egli giura il vero, oppure no. Se egli giura che giura il falso, e giura il vero, cioè che giura il falso, egli non giura il falso, ma era stato dato che giurasse il falso. Se invece egli non giura il falso, e giura che giura il falso, egli non giura il vero; quindi giura il falso, perché altrimenti non giurerebbe il vero quando giura che giura il falso".

Nota: che cosa sono le antinomie? Mandano in crisi una teoria intera...

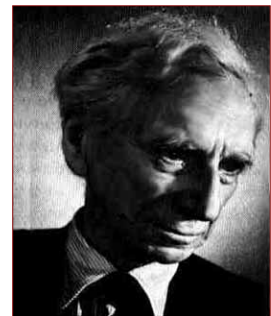
- Se in una teoria è presente un'antinomia, in quella teoria viene a manifestarsi un'**inevitabile contraddizione**.
- E la presenza di una contraddizione rende paradossalmente "dimostrabile" ogni proposizione di quella teoria (teorema "dello Pseudo-Scoto": *ex falso quodlibet*).
- Dunque in presenza di un'antinomia **la validità della teoria risulta compromessa!**
- L'Antinomia del Mentitore è un'antinomia semantica, collegata ad usi e significati del linguaggio.

Torniamo agli insiemi normali: l'Antinomia di Russell

- Sia N l'insieme avente per elementi tutti (e soltanto) gli insiemi normali. Rispondiamo: **N è normale?**
- 1) N non normale (contiene se stesso come elemento). Ma N è costituito da tutti e soltanto gli insiemi normali, che non contengono se stesso come elemento; perciò se N appartiene a N , N non può contenere se stesso come elemento. **Contraddizione**.
- 2) N normale (non contiene se stesso come elemento). Allora N risulterebbe essere un insieme normale e, di conseguenza, dovrebbe appartenere a N . **Anche questa seconda risposta è contraddittoria**.

Formalizziamo nel linguaggio insiemistico l'Antinomia di Russell

- $N = \{I: I \notin I\}$
[definizione di N :
il "principio di comprensione" la rende lecita!]
- $N \in N \Rightarrow N \notin N$
[contraddizione]
- $N \notin N \Rightarrow N \in N$
[contraddizione]
- **La contraddizione è inevitabile!**



Il paradosso del Barbiere

- In un paese, uno degli abitanti è il barbiere e rade **tutti (e soltanto) coloro che non si radono da sé**.
- Si chiede: in quel paese, chi rade il barbiere?
- Ammettiamo che **il barbiere si rada da sé**; ma allora è proprio il barbiere che lo rade, mentre avevamo affermato che il barbiere rade soltanto coloro che non si radono da sé! Questa risposta è contraddittoria.
- Ammettiamo allora che **il barbiere non si rada da sé**; ma in tale caso dovrebbe essere proprio il barbiere a raderlo, in quanto avevamo affermato che il barbiere rade tutti coloro che non si radono da sé. Ed anche questa seconda risposta si rivela contraddittoria.

L'annotazione di Gottlob Frege

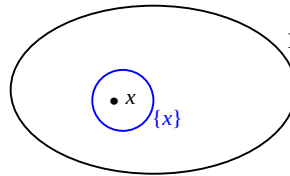
- “Ad un autore poco è più sgradito del fatto che, dopo aver completato un lavoro, venga scosso uno dei fondamenti della costruzione. Sono stato messo in questa situazione da una lettera del Signor Russell, quando la stampa di questo volume era completata.
- Non comprendo come l’Aritmetica possa venir fondata, e come i numeri possano venir inseriti nella trattazione quali oggetti logici, **se non è permesso parlare in ogni caso di una classe**. E se no, come si riconoscono i casi che fanno eccezione?
- «Solatium miseris, socios habuisse malorum»: qui non è in causa il mio metodo di fondazione, ma la stessa possibilità di una fondazione logica dell’Aritmetica”.

Per superare le antinomie: dalla Teoria degli Insiemi alla Teoria dei Tipi

- Tra il 1910 ed il 1913, a Cambridge, Russell e **Alfred North Whitehead** (1861-1947) pubblicarono i tre volumi dei *Principia Mathematica*, opera considerata come il naturale proseguimento ed il perfezionamento dei lavori di Frege, contenente la **Teoria dei Tipi**.
- Oggetti tipo 0: elementi.
- Oggetti tipo 1: insiemi di oggetti di tipo 0.
- Oggetti tipo 2: insiemi di oggetti di tipo 1.
- Oggetti tipo k : insiemi di oggetti di tipo $k-1$ ($k \in \mathbb{Z}^+$).
- L’**appartenenza** viene definita solo **per oggetti di tipi successivi**: **dunque $I \in I$ non ha senso**.

Per superare le antinomie: dalla Teoria degli Insiemi alla Teoria dei Tipi

- Didatticamente è fondamentale considerare la differenza tra:
- **appartenenza**: $x \in I$
- **inclusione**: $\{x\} \subseteq I$
- **appartenenza all’insieme delle parti**: $\{x\} \in \wp(I)$
- L’appartenza coinvolge oggetti **di tipo diverso**; l’inclusione si definisce tra oggetti **dello stesso tipo**.



Per superare le antinomie: dalla Teoria degli Insiemi alla Teoria dei Tipi

- La Teoria dei Tipi **non** ha però risolto il problema di una fondazione non contraddittoria della Teoria degli Insiemi.
- Restano infatti molti punti delicati: che cosa sono gli “elementi” da cui si parte? Da quale definizione vengono introdotti? l’insieme privo di elementi, $\emptyset$, di che tipo è? etc.
- Lo stesso Russell cercò di semplificare la Teoria dei Tipi, ma senza ottenere i successi sperati.
- Nel 1908 **Ernest Zermelo** (1871-1953) introdusse una teoria assiomatica per gli insiemi, rielaborata nel 1922 da **Fraenkel** (la **teoria ZF**).

Il principio di comprensione viene sostituito da un nuovo assioma

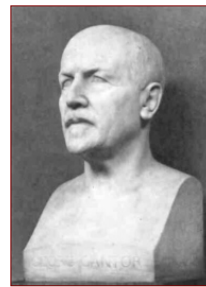


- **Zermelo** sostituisce il principio di comprensione con un assioma più ristretto:
- Si ammette l’esistenza di un insieme formato dagli oggetti che godono di una proprietà $F(x)$ **solo se questi oggetti sono elementi di un insieme dato**.
- Non più: $\{x \mid F(x)\}$
ma: $\{x \in I \mid F(x)\}$

Il contributo della Teoria degli Insiemi: una riflessione sui fondamenti?

- Il contributo della Teoria degli Insiemi non si esaurisce in una riflessione sui fondamenti.
- Ricorda E. Giusti: “Sarà bene sgombrare il campo da un possibile equivoco: gli insiemi entrano in matematica solo in quanto **insiemi infiniti**. Finché si ha a che fare con una collezione finita di elementi, l’eventuale uso del termine *insieme* non testimonia altro che l’ingresso di una parola del linguaggio comune nel discorso matematico”.
- Dovremo quindi occuparci dell’**infinito** non solo l’aristotelico **infinito potenziale**, ma il nuovo **infinito attuale**.

Cantor e l’infinito **attuale**



- Cardinalità o **potenza** dell’insieme finito I è il “numero” dei suoi elementi.
- Ogni J in corrispondenza biunivoca con I ha la potenza di I .
- Parliamo di insiemi **infiniti**: qual è la potenza di $\mathbb{N}$?
- La risposta “infinito” sarebbe poco significativa: **Cantor riesce a “contare oltre l’infinito”...**

Cantor e l’infinito **attuale**

- Anche $\mathbb{Z}$ ha la **potenza del numerabile**, perché può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$:

0	1	2	3	4	5	6	...	($\mathbb{N}$)
0	1	-1	2	-2	3	-3	...	($\mathbb{Z}$)
- Anche $\mathbb{Q}$ può essere messo in corrispondenza biunivoca con $\mathbb{N}$ e quindi ha la **potenza del numerabile**.
- Ciò può apparire sorprendente. In ambito didattico sono infatti diffuse due pericolose misconcezioni:
 - quella secondo la quale i naturali sono la metà degli interi, mentre i razionali sono ancor più numerosi;
 - oppure quella secondo la quale esiste **un solo infinito**.

**A tutti grazie
dell’attenzione**

