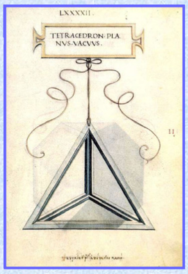
Pordenone

Corso di Matematica e Statistica – 3

Algebra delle matrici

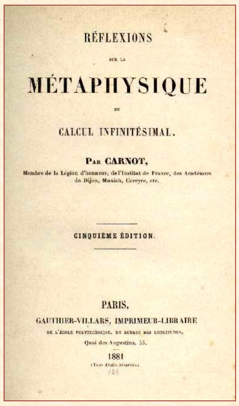


Giorgio T. Bagni

Facoltà di Scienze della Formazione
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Sommario

- **Nozione di matrice**: una tabella di numeri
- **Matrici e operazioni**: la somma
- **Matrici e operazioni**: il prodotto
- **Il determinante**: una funzione essenziale
- **Matrici e applicazioni**: i sistemi lineari


RÉFLEXIONS

SUR LA

MÉTAPHYSIQUE

DU

CALCUL INFINITÉSIMAL.

PAR CARNOT,

CINQUIÈME ÉDITION.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

1881

Una tabella rettangolare: la matrice

- Si dice *matrice m×n* una tabella rettangolare costituita da numeri reali disposti secondo *m* righe e *n* colonne.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}(m\times n)$$

- Data la matrice $\mathbf{A}(m\times n)$, si dice *matrice trasposta* la matrice $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(n\times m)$ ottenuta dalla $\mathbf{A}(m\times n)$ scambiando le righe con le colonne e viceversa.

Una tabella rettangolare: la matrice

- Una matrice $m\times n$ si dice **matrice nulla** se tutti i suoi elementi sono 0. La matrice nulla $m\times n$ si indica con la scrittura $\mathbf{0}(m\times n)$.
- Una matrice **quadrata** ha tante righe quante colonne
- Si dice **matrice unità** (o **matrice identità**) una matrice **quadrata** $\mathbf{I}(m\times m)$ tale che:

  $a_{ii} = 1$ per ogni i tale che $1\le i\le m$;

  $a_{ij} = 0$ con i diverso da j, per ogni i tale che $1\le i\le m$, per ogni j tale che $1\le j\le m$.

Una tabella rettangolare: la matrice

- Una matrice quadrata $\mathbf{A}(m\times m)$ si dice **simmetrica** se, per ogni i tale che $1\le i\le m$ e per ogni j tale che $1\le j\le m$ risulta:

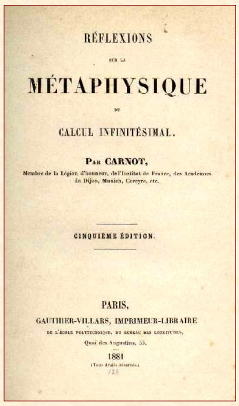
  $a_{ij} = a_{ji}$
- Se **A** è simmetrica, $\mathbf{A}(m\times n)= \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(n\times m)$.
- Una matrice quadrata $\mathbf{A}(m\times m)$ si dice **diagonale** se

  aij = 0

  con i diverso da j, per ogni i tale che $1\le i\le m$ e per ogni j tale che $1\le j\le m$.

Sommario

- **Nozione di matrice**: una tabella di numeri
- **Matrici e operazioni**: la somma
- **Matrici e operazioni**: il prodotto
- **Il determinante**: una funzione essenziale
- **Matrici e applicazioni**: i sistemi lineari



RÉFLEXIONS

SUR LA

MÉTAPHYSIQUE

DU

CALCUL INFINITÉSIMAL.

PAR CARNOT,

CINQUIÈME ÉDITION.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

1881

Operazioni con le matrici
La somma

- Date le matrici dello stesso tipo **A**(m×n) e **B**(m×n), si dice **somma** di tali matrici la matrice **C**(m×n) i cui elementi sono le somme degli elementi corrispondenti di **A**(m×n) e di **B**(m×n); ovvero, tale che:
  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
  per ogni i tale che $1 \le i \le m$ e per ogni j tale che $1 \le j \le n$.
- Ad esempio:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+5 & 7+1 \\ 1+0 & 4+2 & 0+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 8 \\ 1 & 6 & 9 \end{bmatrix}$$

L'addizione di matrici gode delle **proprietà**:

- è *interna* all'insieme delle matrici m×n: addizionando due matrici m×n si ottiene una matrice m×n;
- è *associativa*: per ogni terna di matrici dello stesso tipo **A**(m×n), **B**(m×n), **C**(m×n): (**A**+**B**)+**C** = **A**+(**B**+**C**)
- è *commutativa*: per ogni coppia di matrici dello stesso tipo **A**(m×n), **B**(m×n), risulta: **A**+**B** = **B**+**A**
- **0**(m×n) è *elemento neutro*;
- per ogni **A**(m×n), esiste una matrice –**A**(m×n) tale che **A**+(–**A**) = (–**A**)+**A** = **0**
  (**0** è la matrice nulla m×n); –**A**(m×n) si dice *matrice opposta* della **A**(m×n): gli elementi della matrice –**A**(m×n) sono gli opposti additivi dei corrispondenti elementi della **A**(m×n).

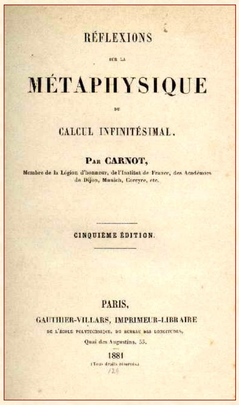
Operazioni con le matrici
Prodotto di una matrice per un reale

- Data la matrice **A**(m×n) e dato k reale, si dice **prodotto** di **A**(m×n) **per lo scalare** k la matrice **B**(m×n) i cui elementi sono i prodotti degli elementi corrispondenti di **A**(m×n) per k; ovvero, tale che:
  $b_{ij} = ka_{ij}$
  per ogni i tale che $1 \le i \le m$ e per ogni j tale che $1 \le j \le n$.
- Ad esempio:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 12 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 9 \\ 36 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

Sommario

- **Nozione di matrice**: una tabella di numeri
- **Matrici e operazioni**: la somma
- **Matrici e operazioni**: il prodotto
- **Il determinante**: una funzione essenziale
- **Matrici e applicazioni**: i sistemi lineari


RÉFLEXIONS
SUR LA
MÉTAPHYSIQUE
DU
CALCUL INFINITÉSIMAL.
PAR CARNOT,
Membre de la Légion d'honneur, de l'Institut de France, des Académies de Dijon, Munich, Corcyre, etc.
CINQUIÈME ÉDITION.
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES,
Quai des Augustins, 55.
1881
(Tous droits réservés.)

Operazioni con le matrici
Il prodotto

- Date la matrice **A**(1×p) ("matrice-riga") e la matrice **B**(p×1) ("matrice-colonna"), si dice prodotto **AB** la matrice **C**(1×1) costituita dal numero reale ottenuto moltiplicando, per ogni i tale che $1 \le i \le p$, l'elemento a_{ij} di **A** per l'elemento b_{ij} di **B** e sommando quindi i prodotti ottenuti.
- Ad esempio:

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = [6 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 3] = [11]$$

Operazioni con le matrici
Il prodotto

- Date le matrici **A**(m×p) e **B**(p×n), si dice **prodotto AB** la matrice **C**(m×n) tale che ogni elemento c_{ij} di **C** sia il prodotto della riga i-esima di **A** per la colonna j-esima di **B**.
- Ad esempio:

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 9 & 1 \\ 6 & 5 & 8 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot3+7\cdot6 & 2\cdot2+7\cdot5 & 2\cdot9+7\cdot8 & 2\cdot1+7\cdot4 \\ 3\cdot3+4\cdot6 & 3\cdot2+4\cdot5 & 3\cdot9+4\cdot8 & 3\cdot1+4\cdot4 \\ 1\cdot3+5\cdot6 & 1\cdot2+5\cdot5 & 1\cdot9+5\cdot8 & 1\cdot1+5\cdot4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 48 & 39 & 74 & 30 \\ 33 & 26 & 59 & 19 \\ 33 & 27 & 49 & 21 \end{bmatrix}$$

- La moltiplicazione di matrici gode delle proprietà seguenti:
- se tutte le operazioni indicate sono eseguibili (ovvero se il numero delle colonne del primo fattore è uguale al numero delle righe del secondo fattore, in tutte le moltiplicazioni considerate), la moltiplicazione di matrici è un'operazione **associativa**. Ovvero:

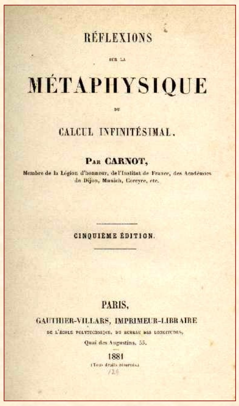
  $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$
- se tutte le operazioni indicate sono eseguibili, valgono le seguenti proprietà **distributive**:

  $\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$

  $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$
- la moltiplicazione di matrici **non è un'operazione commutativa**.

Sommario

- **Nozione di matrice**: una tabella di numeri
- **Matrici e operazioni**: la somma
- **Matrici e operazioni**: il prodotto
- **Il determinante**: una funzione essenziale
- **Matrici e applicazioni**: i sistemi lineari


RÉFLEXIONS

SUR LA

MÉTAPHYSIQUE

DU

CALCUL INFINITÉSIMAL.

PAR CARNOT,

CINQUIÈME ÉDITION.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

1881

Associamo ad una matrice un numero reale

- Sia $\mathbf{A} = [a_{11}]$ una matrice quadrata 1×1; diciamo **determinante** di **A** il reale a_{11} e scriviamo:

  $\det\mathbf{A} = a_{11}$
- Data la matrice quadrata $\mathbf{A}(m\times m)$ e considerato il suo elemento a_{ij} (appartenente alla riga i-esima ed alla colonna j-esima), si dice **complemento algebrico** A_{ij} dell'elemento a_{ij} il determinante della matrice $(m-1)\times(m-1)$ ottenuta dalla matrice **A** sopprimendo la riga i-esima e la colonna j-esima, moltiplicato per $(-1)^{i+j}$.

Associamo ad una matrice un numero reale

- Data la matrice quadrata $\mathbf{A}(m\times m)$, diciamo **determinante** di **A** il numero reale ottenuto moltiplicando tutti gli elementi di una (qualsiasi) riga o di una (qualsiasi) colonna di **A** per i rispettivi complementi algebrici, e sommando i prodotti così ricavati.
- La precedente definizione presuppone che il determinante **non vari al variare della particolare riga o colonna considerata per effettuarne praticamente il calcolo**. In effetti, è possibile dimostrare questa proprietà di invarianza.

Associamo ad una matrice un numero reale

- Esempio: data la matrice quadrata 2×2:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

- il determinante si calcola:

  $\det\mathbf{A} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} = 6\cdot 4 + 8\cdot(-7) = -32$
- Nel caso di una matrice 2×2 il determinante è sempre:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

Associamo ad una matrice un numero reale

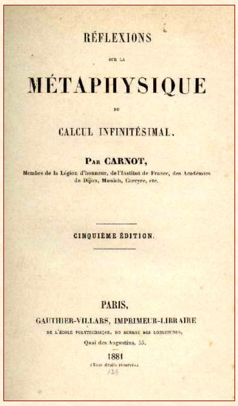
- Per il calcolo del determinante di una matrice quadrata A(3×3) esiste una regola pratica (a volte detta *regola di Sarrus*):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 \\ 4 & 9 \\ 6 & 7 \end{matrix}$$

- $\det\mathbf{A} = 3\cdot9\cdot8+1\cdot5\cdot6+2\cdot4\cdot7-6\cdot9\cdot2-7\cdot5\cdot3-8\cdot4\cdot1 = 57$

Sommario

- **Nozione di matrice**: una tabella di numeri
- **Matrici e operazioni**: la somma
- **Matrici e operazioni**: il prodotto
- **Il determinante**: una funzione essenziale
- **Matrici e applicazioni**: i sistemi lineari


RÉFLEXIONS

SUR LA

MÉTAPHYSIQUE

DU

CALCUL INFINITÉSIMAL.

PAR CARNOT,

CINQUIÈME ÉDITION.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

1881

Sistemi lineari e matrici

- Il sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

di m equazioni di primo grado nelle n incognite x_1, x_2, ..., x_n si dice **sistema lineare**; esso, considerando la matrice $\mathbf{A}(m \times n)$ e i vettori seguenti:

Sistemi lineari e matrici

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}$$

si può scrivere nella forma $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

- Una soluzione di un sistema è un vettore numerico che posto uguale al vettore delle incognite soddidfi tutte le equazioni.

Sistemi lineari e matrici

Un sistema lineare si dice:

- **possibile** (o compatibile) se ammette (almeno) una soluzione;
- **impossibile** (o incompatibile) se non ammette alcuna soluzione;

Un sistema lineare possibile si dice inoltre:

- **determinato** se ammette un'unica soluzione,;
- **indeterminato** se ammette più di una soluzione.

Si dimostra che se un sistema lineare ammette più di una soluzione, esso ammette *infinite* soluzioni.

Risoluzione di un sistema lineare Teorema di Cramer

- Dato il sistema lineare di m equazioni in m incognite:

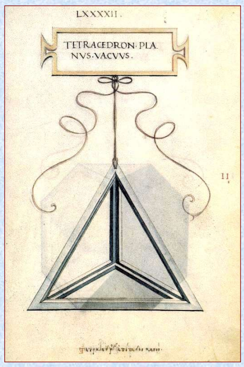
$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$

con la matrice dei coefficienti $\mathbf{A}(mm)$ non singolare (cioè con determinante non nullo), la sua unica soluzione è data da:

$$x_1 = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}}, \quad x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}}, \quad \ldots, \quad x_m = \frac{\det \mathbf{A}_m}{\det \mathbf{A}}$$

dove le $\mathbf{A}_i$ (con $1 \le i \le m$) sono le matrici ottenute sostituendo alla i-esima colonna della matrice dei coefficienti $\mathbf{A}$ il vettore-colonna $\mathbf{b}$ dei termini noti.

A tutti grazie dell'attenzione



Alcuni esercizi

Matrici

- (1) Addizionando lo scalare 0 a una matrice nulla si ottiene una matrice nulla: vero o falso?

  [R.: Falso, in quanto non ha senso addizionare uno scalare a una matrice]

- (2) Moltiplicando una matrice qualsiasi per lo scalare 0 si ottiene una matrice nulla: vero o falso?

  [R.: Vero]

Determinanti

- (3) Qual è determinante di una matrice unità?

  [R.: 1]

Alcuni esercizi

- (4) Condizione necessaria e sufficiente affinché una matrice abbia determinante 0 è che sia la matrice nulla. Vero o falso?

  [R.: Falso. La condizione è solo sufficiente]

Sistemi lineari

- (5) Il teorema di Cramer consente di risolvere solo i sistemi di 2 equazioni in 2 incognite. Vero o falso?

  [R.: Falso]

- (6) Esistono sistemi che non possono essere risolti con il teorema di Cramer?

  [R.: Sì. Può essere applicato solo ai sistemi che hanno matrice dei coefficienti con determinante non nullo]