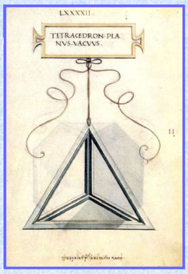
Pordenone

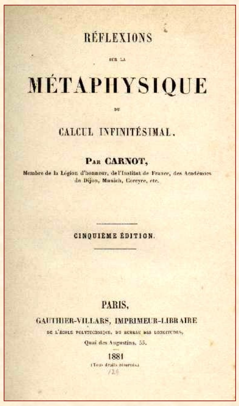
Corso di Matematica e Statistica – 2
Concetti di derivata e di integrale



Giorgio T. Bagni
Facoltà di Scienze della Formazione
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Sommario

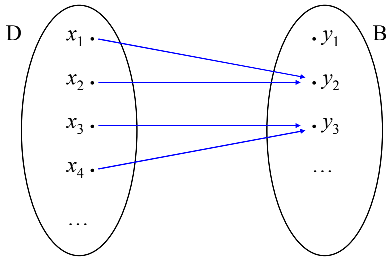
- **Un concetto chiave**: la funzione
- **Valutiamo le funzioni**: il concetto di limite
- **Le funzioni continue**: "senza staccare la penna"
- **Tangente e pendenza**: dalla derivata all'integrale
- **Riflessioni conclusive**: matematica e modelli



RÉFLEXIONS
SUR LA
MÉTAPHYSIQUE
DU
CALCUL INFINITÉSIMAL.
Par CARNOT,
CINQUIÈME ÉDITION.
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
1881

Un concetto chiave
la funzione

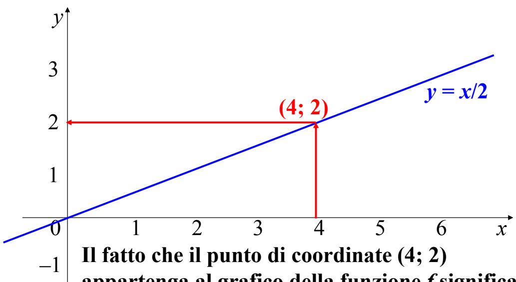
È necessario che ad ogni x appartenente a D corrisponda una e una sola y appartenente a B



Un concetto chiave
la funzione

- Le funzioni spesso collegano due insiemi di numeri reali (l'insieme dei numeri reali è indicato con **R**) e si rappresentano nel piano cartesiano.
- Ad esempio, la relazione che ad ogni numero reale x associa il numero reale $x/2$ à una funzione (la funzione "metà") e si indica:
- $f\colon\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$
  $f\colon\ x \to y = f(x)$
  $y = x/2$
- Spesso si "sintetizza" tutto ciò nella sola formula: $y = x/2$ (quando non c'è dubbio sulla natura di x, y)

Un concetto chiave
la funzione



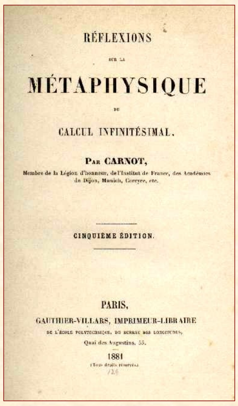
Il fatto che il punto di coordinate (4; 2) appartenga al grafico della funzione f significa che $f(4) = 2$ ovvero che $f\colon 4 \to 2$

Un concetto chiave
la funzione

- Quanto abbiamo mostrato finora ci consente di dire che un grafico cartesiano sintetizza completamente un'intera relazione tra insiemi di numeri reali.
- Proprio in questo **collegamento tra geometria (curva) e algebra (relazione tra numeri)** consiste la grande intuizione di Descartes.
- D'ora in avanti, dunque, potremo studiare le caratteristiche geometriche di una curva per analizzare le caratteristiche della funzione da essa rappresentata.

Sommario

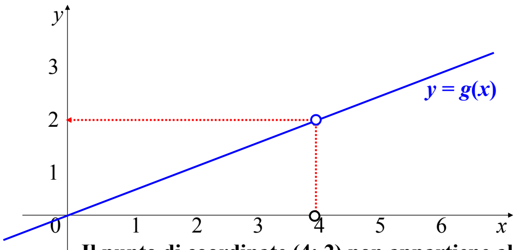
- **Un concetto chiave**: la funzione
- **Valutiamo le funzioni**: il concetto di limite
- **Le funzioni continue**: "senza staccare la penna"
- **Tangente e pendenza**: dalla derivata all'integrale
- **Riflessioni conclusive**: matematica e modelli


RÉFLEXIONS
SUR LA
MÉTAPHYSIQUE
DU
CALCUL INFINITÉSIMAL.
PAR CARNOT,
CINQUIÈME ÉDITION.
PARIS,
GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
1881

La tradizionale valutazione di una funzione "in un punto"

- Abbiamo prima presentato la funzione f che ad ogni x reale fa corrispondere $x/2$. Il suo dominio è tutti i numeri reali (cioè essa può essere calcolata per ogni valore di x).
- Consideriamo ora la nuova funzione g che a x fa corrispondere l'espressione $g(x) = [x(x-4)]/[2(x-4)]$.
- Si osservi che se $x \neq 4$ si può semplificare $g(x)$ ottenendo $x/2$; ma se $x = 4$ tale semplificazione non è possibile. Per $x = 4$ il valore $g(x)$ non esiste.
- Dunque mentre il dominio di f è tutto l'insieme **R**, quello di g è **R**–{4} (l'insieme dei reali diversi da 4).

La valutazione tradizionale di una funzione talvolta è poco significativa



Il punto di coordinate (4; 2) non appartiene al grafico della funzione g e ciò significa che $g(4)$ non è 2 ovvero che $g(4)$ non esiste

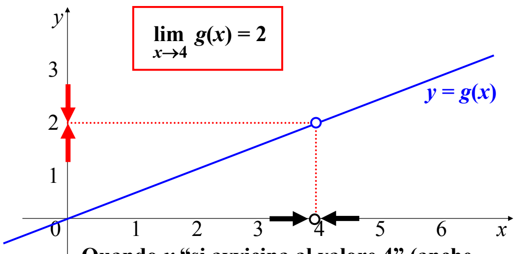
La valutazione tradizionale di una funzione talvolta è poco significativa

- Nel caso ora esaminato, dunque, **non è lecito** sostituire a x il valore 4.
- In altri termini, non è possibile valutare la funzione **nel punto** $x = 4$: tale punto non appartiene al dominio.
- Ma la funzione considerata mostra un'evidente regolarità **"nelle immediate vicinanze"** di $x = 4$.
- Si pone allora il problema di esprimere in modo matematicamente rigoroso tale regolarità:

  cioè di esprimere il fatto che **quando x "si avvicina al valore 4" (sull'asse delle x) la corrispondente y "si avvicina al valore 2" (sull'asse delle y).**

La valutazione tradizionale di una funzione talvolta è poco significativa

$$\lim_{x \to 4} g(x) = 2$$



Quando x "si avvicina al valore 4" (anche senza raggiungerlo), la corrispondente y "si avvicina al valore 2".

Un concetto chiave: il limite di una funzione

- L'espressione "x si avvicina al valore 4" induce l'impressione di un "movimento" (concezione *dinamica* del limite).
- È preferibile una concezione *statica* del limite, che può essere indotta da frasi come **"x si trova nelle immediate vicinanze del punto 4"**.
- In matematica (topologia) le "immediate vicinanze" di un punto si esprimono facendo riferimento all'**intorno di un punto**. Ad esempio, "intorno di 4":

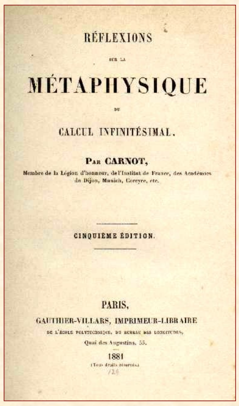
  4–ε 4 4+ε I(4) è identificato da $4-\varepsilon < x < 4+\varepsilon$

Un concetto chiave: il limite di una funzione

- Riassumendo: la tradizionale valutazione della funzione **"in un punto"** e il **limite** si occupano di problemi diversi:
- valutando la funzione "in un punto" ci si occupa di ciò che accade nel punto e ci si disinteressa di ciò che accade nelle sue immediate vicinanze.
- calcolando un limite ci si occupa di ciò che accade nelle immediate vicinanze di un punto e ci si disinteressa di quanto accade "nel punto".
- Naturalmente ciò non comporta che quanto si trova in tali modi non sia in qualche modo "coerente".

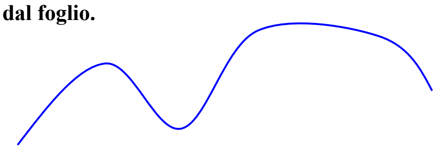
Sommario

- **Un concetto chiave**: la funzione
- **Valutiamo le funzioni**: il concetto di limite
- **Le funzioni continue**: "senza staccare la penna"
- **Tangente e pendenza**: dalla derivata all'integrale
- **Riflessioni conclusive**: matematica e modelli



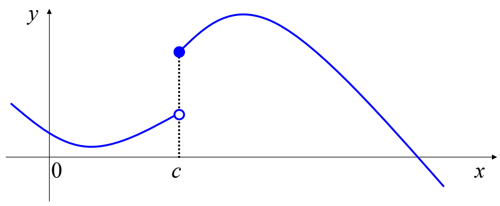
Un tipo particolare di funzione: la funzione continua

- **NATURA NON FACIT SALTUS…**
- Per alcune funzioni, una "minima" variazione della x causa una "minima" variazione delle corrispondenti y.
- Queste funzioni sono dette **continue**.
- Intuitivamente, una funzione è continua se il suo grafico può essere tracciato **senza staccare la penna dal foglio.**



Un tipo particolare di funzione: la funzione continua

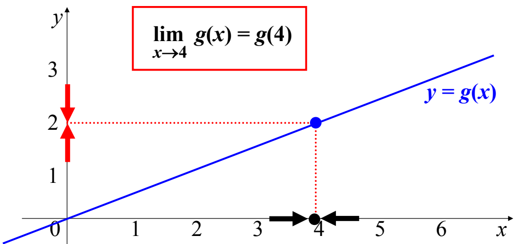
- Ma talvolta (per quanto riguarda le funzioni)… **NATURA FACIT SALTUS!**



- Funzioni come queste sono dette **DIScontinue.**.

Un tipo particolare di funzione: la funzione continua

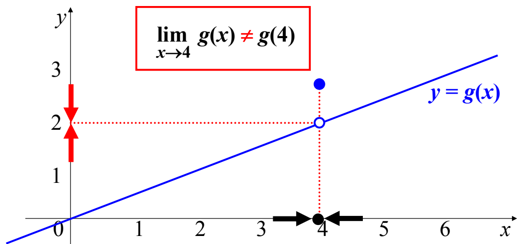
$$\lim_{x\to 4} g(x) = g(4)$$



Quando x "si avvicina al valore 4", la corrispondente y "si avvicina al valore assunto dalla funzione" in $x = 4$.

Un tipo particolare di funzione DIScontinua (ma non l'unico tipo!)

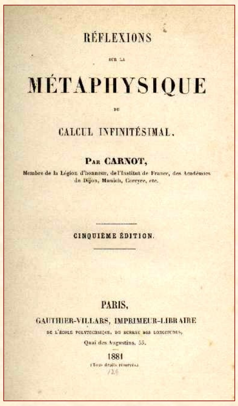
$$\lim_{x\to 4} g(x) \neq g(4)$$



Quando x "si avvicina al valore 4", la corrispondente y non "si avvicina al valore assunto dalla funzione" in $x = 4$.

Sommario

- **Un concetto chiave**: la funzione
- **Valutiamo le funzioni**: il concetto di limite
- **Le funzioni continue**: "senza staccare la penna"
- **Tangente e pendenza**: dalla derivata all'integrale
- **Riflessioni conclusive**: matematica e modelli


RÉFLEXIONS

SUR LA

MÉTAPHYSIQUE

DU

CALCUL INFINITÉSIMAL.

PAR CARNOT,

CINQUIÈME ÉDITION.

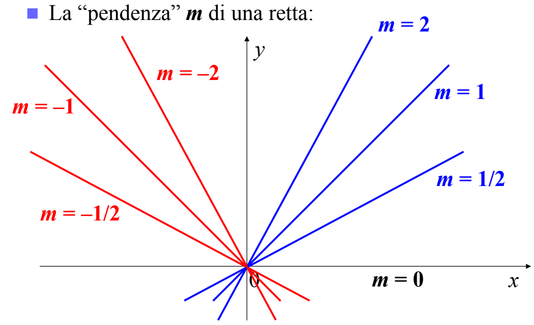
PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

1881

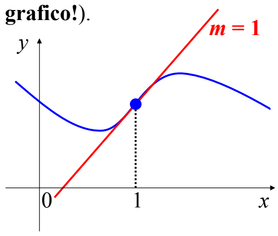
Tangente e pendenza: verso la derivata

- La "pendenza" ***m*** di una retta:



Tangente e pendenza: la derivata

- La **derivata di una funzione** consente di valutare la "pendenza" del grafico della funzione considerata in un qualsiasi suo punto (**ovvero della retta tangente al grafico!**).



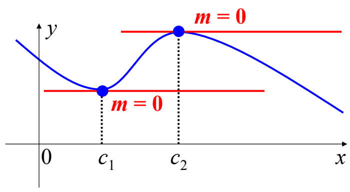
Funzione:
$y = -x^3+3x^2-2x+1$

Derivata:
$y' = -3x^2+6x-2$

Per $x = 1$ è $y' = 1$ e la tangente ha pendenza 1

Tangente e pendenza: la derivata

- La derivata consente di ottenere con pochi calcoli algebrici informazioni importanti sul grafico.
- Ad esempio, i punti per i quali la derivata di annulla sono **punti di stazionarietà** per la funzione (il grafico ha tangente orizzontale).



Una tavola di regole di derivazione

- Valgono le seguenti regole di derivazione (nelle ipotesi necessarie per garantire l'esistenza delle derivate in gioco):

- $\mathrm{D}[f(x)+g(x)] = \mathrm{D}f(x)+\mathrm{D}g(x)$
- $\mathrm{D}[f(x)g(x)] = f(x)\mathrm{D}g(x)+g(x)\mathrm{D}f(x)$
- $\mathrm{D}[kf(x)] = k\mathrm{D}f(x)$
- $\mathrm{D}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{g(x)\cdot \mathrm{D}f(x) - f(x)\cdot \mathrm{D}g(x)}{[g(x)]^2}$

Una tavola di regole di derivazione

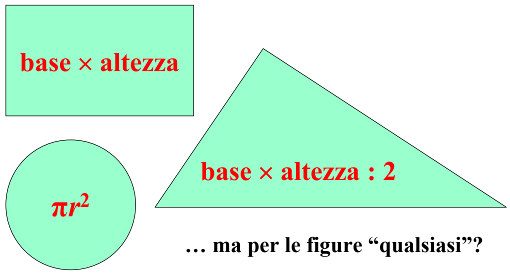
$\mathrm{D}k = 0$	con k costante
$\mathrm{D}x^n = n\cdot x^{n-1}$	n intero positivo, $x\in\mathbf{R}$
$\mathrm{D}x^a = a\cdot x^{a-1}$	a reale, $x\in\mathbf{R}^+$
$\mathrm{D}a^x = a^x\cdot\log_e a$	in particolare: $\mathrm{D}e^x = e^x$
$\mathrm{D}\log_b\lvert x\rvert = \dfrac{1}{x}\cdot\log_b e$	$b>0$, $b\neq 1$; in part.: $\mathrm{D}\log_e\lvert x\rvert = \dfrac{1}{x}$
$\mathrm{Dsen}x = \cos x$	$\mathrm{Dcos}x = -\mathrm{sen}x$
$\mathrm{Dtg}x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{Dcotg}x = -\dfrac{1}{\mathrm{sen}^2 x}$

Esempio di derivata

- Si voglia derivare la funzione espressa da $y = \text{sen}x+\cos x$
- Applicando le regole di derivazione si ha:
  $D(\text{sen}x+\cos x) =$
  $= D\text{sen}x+D\cos x =$
  $= \mathbf{\cos x - \text{sen}x}$
- La conoscenza di tale derivata ci consente di trovare, ad esempio, i punti a tangente orizzontale del diagramma cartesiano della funzione assegnata.
- Gli studenti sono invitati a fare ciò come esercizio…

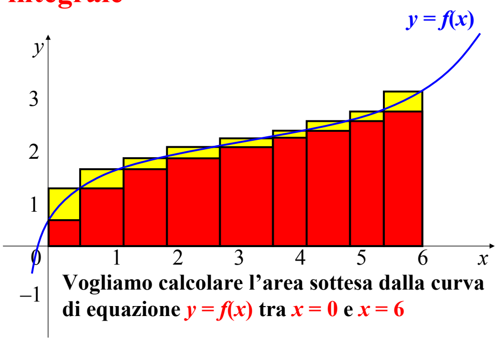
L'area di parti di piano "qualsiasi": l'integrale

- Calcoliamo facilmente l'area di figure **particolari:**



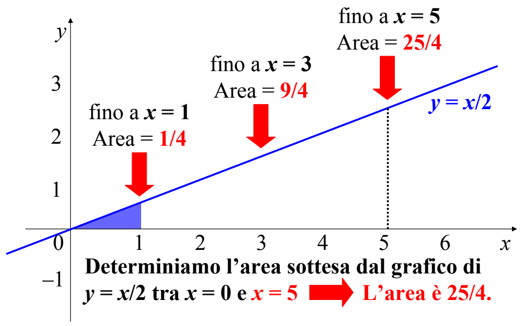
… ma per le figure "qualsiasi"?

L'area di parti di piano "qualsiasi": l'integrale



Vogliamo calcolare l'area sottesa dalla curva di equazione $y = f(x)$ tra $x = 0$ e $x = 6$

Un collegamento classico: la derivata e l'integrale



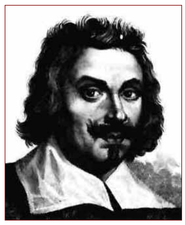
Determiniamo l'area sottesa dal grafico di $y = x/2$ tra $x = 0$ e $x = 5$ ➡ L'area è 25/4.

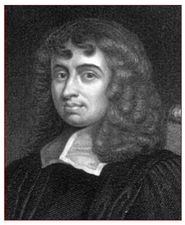
Un collegamento classico: la derivata e l'integrale

- Nel caso precedente:
- la funzione considerata è $\mathbf{y = x/2}$
- i valori dell'area sottesa dalla curva tra 0 e x corrispondono ai valori ottenuti dalla funzione $\boldsymbol{\varphi(x) = x^2/4}$ per i valori di x:
- $x = \mathbf{1}$ infatti: **Area = 1/4**
- $x = \mathbf{3}$ infatti: **Area = 9/4**
- $x = \mathbf{5}$ infatti: **Area = 25/4**
- **Se deriviamo la funzione $\varphi(x) = x^2/4$ otteniamo proprio la $y = x/2$.**
- **Questa non è una semplice coincidenza!**

Un collegamento classico: la derivata e l'integrale

- La derivazione e l'integrazione sono, dal punto di vista operativo, **operazioni inverse**.
- Ciò è stabilito dal **"teorema fondamentale del calcolo"**, detto teorema di **Torricelli-Barrow**.





Un collegamento classico: la derivata e l'integrale

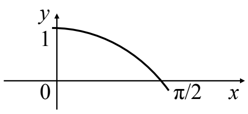
- Data la funzione f, la funzione Φ si dice **funzione primitiva** della f se, per ogni x del dominio, la derivata prima di Φ, calcolata in x, è $f(x)$:
  $\Phi'(x) = f(x)$
- Si dice **integrale indefinito** di f la più generale primitiva di f (si ricordi che se Φ è primitiva di f anche $\Phi+k$, con k costante, lo è: infatti la derivata di una costante è nulla):
  $$\int f(x)dx = \Phi(x)+k$$
- Ad esempio: $\int 2xdx = x^2+k$

Una tavola di integrazione…

- … è una tavola di derivazione "letta da destra a sinistra". Ad esempio:
- $Dx^2 = 2x$ dunque: $\int 2xdx = x^2+k$
- Per indicare l'area delle parti di piano si scrive **l'integrale definito**:
  $$\int_a^b f(x)dx = [\Phi(x)]_a^b$$
  dove il secondo membro indica: $\Phi(b) - \Phi(a)$

Esempio di integrale definito

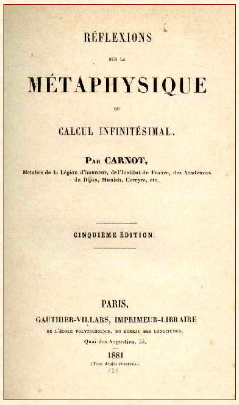
- Si voglia calcolare l'area della parte di piano cartesiano compresa tra il grafico di $y = \cos x$, l'asse delle ascisse tra 0 e $\pi/2$ e l'asse delle ordinate.



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\operatorname{sen} x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 = 1-0 = 1$$

Sommario

- **Un concetto chiave**: la funzione
- **Valutiamo le funzioni**: il concetto di limite
- **Le funzioni continue**: "senza staccare la penna"
- **Tangente e pendenza**: dalla derivata all'integrale
- **Riflessioni conclusive**: matematica e modelli


RÉFLEXIONS

SUR LA

MÉTAPHYSIQUE

DU

CALCUL INFINITÉSIMAL.

PAR CARNOT,

Membre de la Légion d'honneur, de l'Institut de France, des Académies de Dijon, Munich, Corcyre, etc.

CINQUIÈME ÉDITION.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

Quai des Augustins, 55.

1881

Il riassunto di un fenomeno nel linguaggio della matematica

- Il calcolo infinitesimale consente la modellizzazione matematica molti fenomeni naturali.
- Ma è la realtà con la quale veniamo a contatto, con i suoi vincoli, che ci ha portato a costruire strumenti di un certo tipo.
- Il linguaggio matematico nasce dall'uso, nel senso che si conforma, nell'evoluzione storica, a quella realtà che è stato condotto ad inquadrare. **L'uomo ha realizzato un calcolo differenziale e un calcolo integrale utili, e ciò non è certo un caso**: la "verità" dell'analisi si fonda e giunge quasi a coincidere con la forza vincolante delle sue stesse applicazioni.

Il riassunto di un fenomeno nel linguaggio della matematica

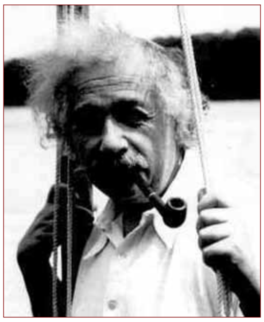
- È la matematica che abbiamo realizzato che, talvolta, ci ha messo in grado di "scoprire porzioni di realtà" inaccessibili ai nostri sensi.
- Ad esempio l'esistenza dell'anti-protone, scoperto sperimentalmente nel 1955, era stata teoricamente prevista con l'applicazione di procedimenti matematici fondati su di una corretta modellizzazione della realtà.
- **La nostra matematica *funziona*: essa ci mette in grado di procedere oltre l'esperito, in una sfera di possibili sviluppi collegati alla natura stessa.**

Matematica e natura secondo Galileo

- «La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi agli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne' quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile a intenderne umanamente parola».

Matematica e natura secondo Einstein

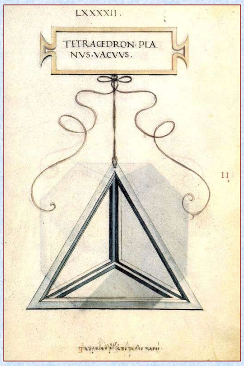
- «Il mondo empirico determina praticamente il sistema teorico, nonostante il fatto che non esista alcun ponte logico fra i fenomeni e i loro principi teorici», conferma Albert Einstein.



Matematica, il linguaggio della natura

- Non intendiamo negare tali affermazioni: **davvero la matematica deve essere considerata il linguaggio della natura.**
- Ma questa non è una proprietà inerente "metafisicamente" alla natura sensibile: **è l'uomo, dunque la forma più sofisticata dell'organizzazione della natura, l'artefice della matematica.**

A tutti grazie dell'attenzione



Alcuni esercizi

Funzioni

- (1) Dire, giustificando la risposta, se la relazione che ad ogni numero naturale associa il proprio quadrato naturale è una funzione.

  [R.: Sì]

- (2) Dire, giustificando la risposta, se la relazione che ad ogni numero naturale associa la propria radice quadrata naturale è una funzione.

  [R.: No, perché?]

Derivate

- (3) Derivare la funzione $y = x^3 + x - 5\pi$

  [R.: $3x^2+1$]

Alcuni esercizi

- (4) Trovare i punti di stazionarietà di $y = 3x^3 - x$

  [R.: (1/3; –2/9); (–1/3; 2/9)]

Integrali

- (5) Trovare con l'integrale l'area della parte limitata di piano tra i grafici di $y = 1$, $y = 0$ e $x = 2$

  [R.: 2]

- (6) Trovare con l'integrale l'area della parte limitata di piano tra i grafici di $y = x$, $y = 0$ e $x = 2$

  [R.: 2]

- (7) Trovare con l'integrale l'area della parte limitata di piano tra i grafici di $y = x^2$, $y = 0$ e $x = 1$

  [R.: 1/3]