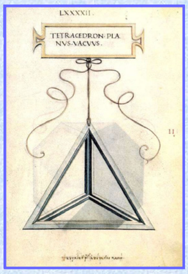
Il ragionamento diagrammatico
Segni, logica, algebra lineare…



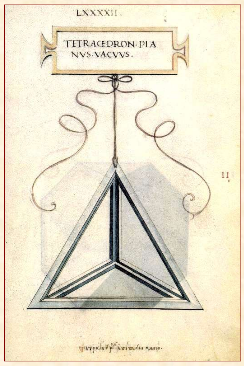
Giorgio T. Bagni

Facoltà di Scienze della Formazione
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Sommario

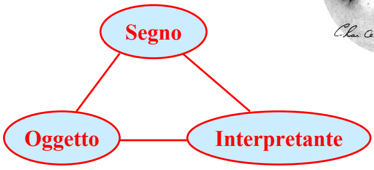
Il ragionamento diagrammatico

- **Charles Sanders Peirce**
  La semiosi illimitata
- **Matematica e segni**
  Diagrammi, abduzione
- **Algebra e diagrammi**
  Tra vettori e matrici
- **Diagrammi ed efficacia**
  Beth e i tableaux



Peirce e la semiosi illimitata
Due diverse interpretazioni

- Il **triangolo semiotico** è alla base dell'approccio peirceano:



- L'**oggetto** è rappresentato da un **segno** (*icona*, *indice* o *simbolo* a seconda che si abbia una rassomiglianza, una connessione causale o una convenzione) e suscita un **interpretante**, cioè una reazione in chi interpreta.

Peirce e la semiosi illimitata
Due diverse interpretazioni

- Per Peirce il segno non fa conoscere direttamente un (nuovo) oggetto; quest'ultimo deve essere già in qualche modo accessibile all'interprete, in modo che il segno porti ulteriore informazione su di esso e susciti un interpretante (in questo senso c'è un riferimento al **circolo ermeneutico** e alla presenza di **presupposizioni**).
- L'interpretante non è dunque una sorta di realtà da contemplare per comprendere il segno e quindi per conoscere l'oggetto. Fondamentale è l'aspetto attivo, inferenziale: Peirce introduce il segno come mediazione fra l'oggetto e l'interpretante.

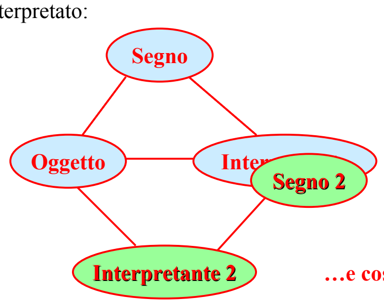
Peirce e la semiosi illimitata
Due diverse interpretazioni

- Ad esempio:

- Non si confonda l'**interprete** (chi percepisce il segno, in questo caso chi sente abbaiare il cane) con l'**interpretante**, cioè la sua reazione (lo spavento, il grido "attenti al cane").

Peirce e la semiosi illimitata
Due diverse interpretazioni

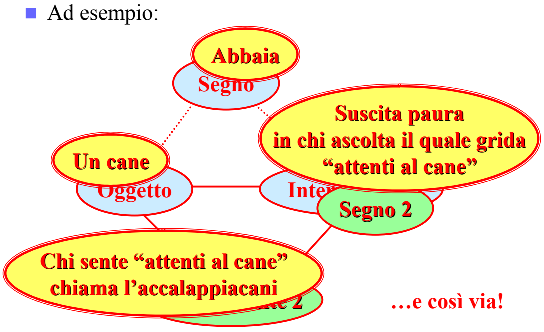
- Ma l'interpretante è a sua volta un segno e può essere interpretato:



…e così via!

Peirce e la semiosi illimitata
Due diverse interpretazioni

- Ad esempio:

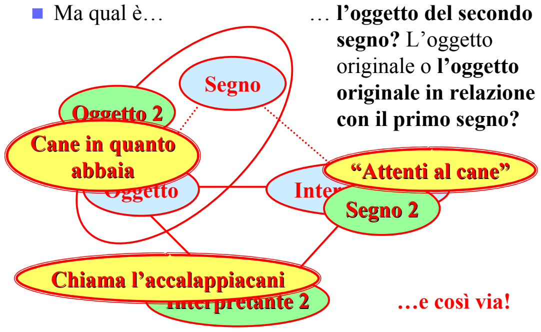


…e così via!

Peirce e la semiosi illimitata
Due diverse interpretazioni

- Ma qual è…

… **l’oggetto del secondo segno?** L’oggetto originale o **l’oggetto originale in relazione con il primo segno?**



…e così via!

Peirce e la semiosi illimitata
Due diverse interpretazioni

- In Peirce (*Grammatica speculativa*) si trovano passi che possono condurre a entrambe le interpretazioni.
- Non riteniamo che le due modalità siano alternative:

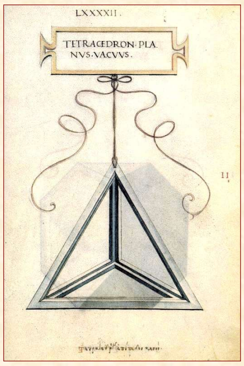
1. la prima sottolinea il fatto che **un segno non corrisponde a un significato unico, “bloccato”, ma porta a considerare altri segni mediante i quali il significato stesso si arricchisce progressivamente.**
2. la seconda sottolinea che **l’oggetto rappresentato si lega in termini decisivi con i vari segni.**

- Infine, per la didattica della matematica è importante la potenziale **presenza di più interpreti.**

Sommario

Il ragionamento diagrammatico

- **Charles Sanders Peirce**
  La semiosi illimitata
- **Matematica e segni**
  Diagrammi, abduzione
- **Algebra e diagrammi**
  Tra vettori e matrici
- **Diagrammi ed efficacia**
  Beth e i tableaux



Tre categorie “faneroscopiche”
(o fenomenologiche – da φανερóν)

- **Primità, secondità** e **terzità** riprendono le categorie kantiane della possibilità, dell’esistenza e della necessità, anche se (Peirce, 1992, *Categorie*, Laterza, Roma-Bari) assumono una portata più vasta.
- Sono nello stesso tempo modalità in cui si organizza la nostra attività conoscitiva e categorie della realtà.
- Sono categorie che ritroviamo a ogni livello del reale, della nostra esperienza e delle scienze.
- **Primità:** pure qualità e possibilità, spirito.
- **Secondità:** realizzazione, esperienza, materia.
- **Terzità:** mediazione, segno, razionalizzazione.

Tre categorie “faneroscopiche”
(o fenomenologiche – da φανερóν)

- La **Primità** come categoria dell’esperienza è un *feeling*, non ancora individuato come appartenente a un ben preciso esistente. È la categoria del presente immediato, dell’immediatamente dato.
- La **Secondità** è collegata a ciò che accade e che quasi vincola il soggetto. È la categoria dell’appena percepito, dunque del passato.
- La **Terzità** riprende la mediazione, l’interpretazione, la ragione; sintetizza gli aspetti precedenti (pura qualità e fatto), ma non si riduce ad essi. Può collegarsi al futuro, in quanto una finalità influisce sull’azione con la mediazione della coscienza.

Matematica e segni
nella semiotica peirceana

- L'icona si collega alla primità, l'indice alla secondità, il simbolo alla terzità.
- **Il simbolo ha un ruolo molto importante: è un segno convenzionale che denota l'oggetto in virtù di una relazione di carattere mentale.** Esso si collega al contesto culturale in cui è elaborato e possiede un'intrinseca significazione cognitiva di cui le icone e gli indici sono privi (Peirce, 1980, *Semiotica*, Einaudi, Torino).
- **Il simbolo si basa però essenzialmente sull'aspetto convenzionale**, che non rispecchia l'**universalità** e dalla **certezza** dell'**inferenza matematica.**

Matematica e segni
nella semiotica peirceana

- «Le parole, sebbene indubitabilmente necessarie al pensiero già sviluppato, giocano un ruolo solo secondario nel processo; mentre il **diagramma**, o icona, che può venire manipolato e sul quale si possono fare esperimenti, è importantissimo. […] A cosa servono questi diagrammi? Servono per compierci sopra esperimenti. […] **Non esiste ragionamento che non abbia la natura del ragionamento diagrammatico, o matematico**; e dunque non dobbiamo ammettere alcun concetto che non sia suscettibile di venire rappresentato in forma diagrammatica» (Peirce, MS 956).

Matematica e segni
nella semiotica peirceana

- Il **diagramma** rappresenta iconicamente la relazione matematica: l'icona costituita dal diagramma trasmette una caratteristica generale, pur essendo un soggetto individuale e osservabile (sul quale il matematico può operare per ottenere ulteriori caratteristiche generali del diagramma stesso).
- Rimane tuttavia **il problema dell'individualità dell'oggetto sul quale si sviluppa la dimostrazione contrapposta all'universalità delle conclusioni.**
- Una dimostrazione matematica, con la sua fondamentale universalità, non può ridursi a un diagramma iconico.

Matematica e segni
nella semiotica peirceana

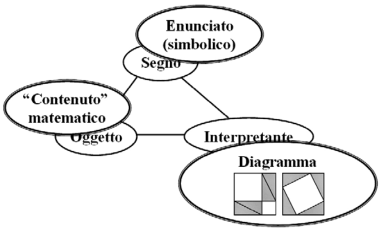
- Il punto è che il diagramma ha le caratteristiche di un'icona, ma **dovrà associarsi (come ogni segno segno) a un interpretante** e questo è **simbolico ed è generale.** Possiamo dunque riassumere:
- Il diagramma-icona tracciato per dimostrare ad esempio un teorema geometrico **è interpretante dell'enunciato simbolico** che traduce secondo alcune convenzioni (un'intenzione, dice Peirce).
- Questo diagamma-icona **determina infine un nuovo interpretante simbolico e universale** quando è recepito alla luce della stessa intenzione convenzionale.

Una fase iconica
tra due momenti simbolici

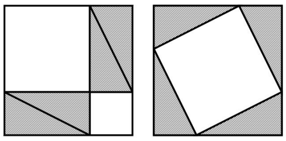
- L'icona è dunque **una fase transitoria fra due momenti simbolici**: le caratteristiche di somiglianza dell'icona rendono possibile operare attraverso di essa sulla forma generale.
- Peirce dunque si riferisce al fare matematica come ad un processo semiotico che coinvolge, in alternanza e successivamente, sia **simboli** che **icone**.
- L'aspetto didattico però può collocarsi in questo quadro teorico con caratteristiche specifiche: in particolare, **il ruolo dell'indice potrà essere rivalutato didatticamente.**
- Teniamo per ora presente che…

Una fase iconica
tra due momenti simbolici

- «**Pure icone – così come puri indici o puri simboli – non si danno nella realtà attuale.** Esse rimangono un limite del pensiero-segno, carattere più o meno predominante in un oggetto effettivo, ma mai del tutto privo di mescolanza con le altre due entità della partizione semiotica. […] Un diagramma matematico è essenzialmente iconico nel suo rappresentare la configurazione relazionale degli elementi in questione, ma necessita tuttavia di indici per ancorarsi agli elementi raffigurati, e non può prescindere da un carattere simbolico che gli permetta di proporsi quale garante di una legge generale» (Marietti, 2001, p. 36).

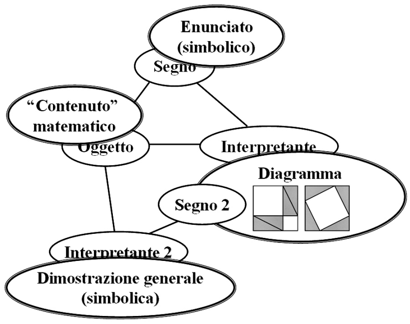


- **Diagramma:** il quadrato a sinistra e il quadrato a



destra sono congruenti e il confronto delle loro scomposizioni verificare il teorema **(per questo caso).**

Una fase iconica
tra due momenti simbolici

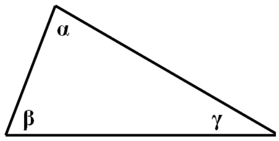


Aristotele
e i teoremi geometrici

- **Aristotele** afferma: (*Metafisica* Θ 9, 1051 a 21-24):
- «I teoremi di geometria si dimostrano per mezzo dell'atto, infatti si dimostrano operando delle divisioni nelle figure. Se queste divisioni fossero già operate, quei teoremi sarebbero immediatamente evidenti; invece sono contenute nelle figure solo in potenza».
- Ancora Aristotele (*Metafisica* Θ 9, 1051 a 25-27):
- «Perché gli angoli del triangolo assommano a due retti? Perché gli angoli intorno a un punto su di una retta sono due retti. Se, infatti, fosse già tracciata la parallela ad un lato del triangolo, alla semplice visione la cosa risulterebbe immediatamente evidente».

Aristotele
e i teoremi geometrici

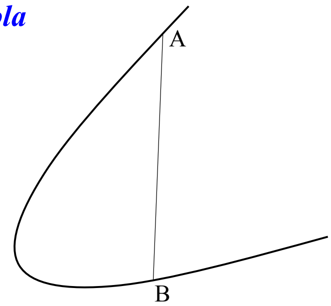
- Aristotele fa riferimento a questa figura:



- **Intervenendo creativamente** la dimostrazione risulta semplice, ricordando le congruenze degli angoli alterni interni e degli angoli corrispondenti formati da una coppia di parallele tagliate da una trasversale.

Archimede e la *Quadratura*
della parabola

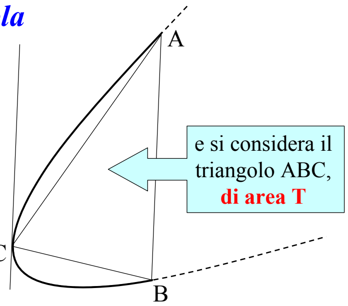
- Data una parabola e una sua corda AB, si voglia calcolare l'area del segmento parabolico delimitato.



- Si traccia la tangente alla parabola parallela ad AB e si chiama C il punto di tangenza.

Archimede e la *Quadratura*
della parabola

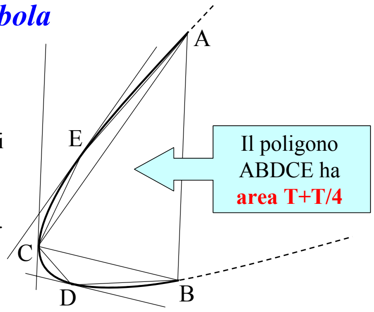
- Data una parabola e una sua corda AB, si voglia calcolare l'area del segmento parabolico delimitato.



- Si traccia la tangente alla parabola parallela ad AB e si chiama C il punto di tangenza.

Archimede e la *Quadratura della parabola*

- Si ripete la costruzione precedente sui segmenti parabolici delimitati da EC e CB.
- **Elemento cruciale:** i triangoli così ottenuti ACE, CBD hanno **area complessiva T/4** (essendo T l'area del triangolo ABC).



Archimede e la *Quadratura della parabola*

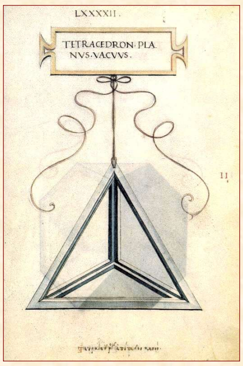
- Proseguendo così (con ulteriori costruzioni) si giunge alla serie modernamente scritta:

  T+T/4+T/16+… = T(1+1/4+1/16+…)
- Tale serie converge a **4T/3** (un riferimento a ciò, storicamente molto discusso, è nella Proposizione 23 della *Quadratura della Parabola*) e questa è l'area del segmento parabolico.
- Anche nel caso di questo celebre procedimento archimedeo (analogamente a quanto sopra visto per la dimostrazione riportata da Aristotele) **emerge il ruolo chiave del disegno!**

Sommario

Il ragionamento diagrammatico

- **Charles Sanders Peirce**
  La semiosi illimitata
- **Matematica e segni**
  Diagrammi, abduzione
- **Algebra e diagrammi**
  Tra vettori e matrici
- **Diagrammi ed efficacia**
  Beth e i tableaux



Che cos'è l'*algebra*?
Algebra cinese e carattere posizionale

- La disciplina che consente la risoluzione di **equazioni espresse mediante simboli specifici** risale al XVI sec. (a partire da Viète c'è la possibilità di parametrizzare, dunque di considerare non più un singolo problema ma una classe di problemi).
- Ma una disciplina espressa meno tecnicamente (algebra **sincopata**) può risalire al III secolo.
- L'espressione di problemi in forma **geometrica** risale al III sec. a.C. (algebra **geometrica**).
- E i problemi che noi oggi risolviamo algebricamente sono presenti a partire dal **II millennio a.C.**

Che cos'è l'*algebra*?
Algebra cinese e carattere posizionale

- In **Cina** l'algebra è presente dal II sec. a.C. in forma retorica o sincopata (ideogrammi monosillabici per quantità e operazioni) con un importante **"carattere posizionale"** (Needham 1959, p. 112).
- La **tavola da calcolo algebrica** cinese era impostata in modo che **determinate posizioni fossero occupate sempre da particolari tipi di grandezze** (incognite, potenze etc.)
- e tale convenzione può considerarsi un importante **artefatto secondario** (secondo Wartofsky) da abbinare all'artefatto primario, lo strumento vero e proprio.

Le formule algebriche e la classificazione peirceana

- Secondo **Peirce**, una formula algebrica «è un'icona, ed è resa tale dalle regole di commutazione, associazione e distribuzione dei simboli».
- Ciò « può sembrare a prima vista una classificazione arbitraria; perché potrebbe […] essere considerata come un segno convenzionale composto. Ma non è così: perché una proprietà altamente distintiva dell'icona è che **attraverso osservazione diretta di essa si possono scoprire riguardo al suo oggetto verità nuove oltre a quelle sufficienti a determinare la costruzione dell'icona stessa»** (Peirce, 2.279, *MS* 787).

Algebra cinese e carattere posizionale
La tavola da calcolo

termine noto
coeff. x
coeff. x^2

Nel presente studio esamineremo un esempio significativo di "calcolo mediante tabelle"

E si noti l'uso di bacchette!

- Ad esempio, questa tabella (*sangi*) indica l'equazione: $\mathbf{851x^2-3450x+2691=0}$ (si osservino i diversi colori e l'assenza dello zero).

Calcolo mediante tabelle: *Chiu Chang*, "nove capitoli sulle arti matematiche"

- Consideriamo il **problema** seguente che riprende, con variazioni numeriche, un problema del capitolo VIII (***Fang Cheng***) del ***Chiu Chang*** (precedente al I sec.):
- Cinque covoni di grano di tipo A aggiunti a tre covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 19 sheng. Tre covoni di grano di tipo A aggiunti a due covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 12 sheng. Quali rendimenti hanno un covone di grano di tipo A e un covone di grano di tipo B?
- **Oggi** indicheremmo rispettivamente con x e con y (in sheng) i rendimenti di un covone di tipo A e di un covone di tipo B ed imposteremmo un sistema…

Il problema del *Chiu Chang* porta ad un sistema lineare

- Consideriamo il sistema di equazioni lineari costituito da:

$$\begin{cases} 5x+3y=19 \\ 3x+2y=12 \end{cases}$$

- Riportiamo in una tabella i coefficienti e i termini noti.

5	3	19
3	2	12

- Operiamo ora per modificare la tabella sapendo che:

Regole: (1) si possono variare **in proporzione** tutti i termini delle righe e **(2)** a una riga si può sostituire la riga ottenuta **sommando** o **sottraendo i termini** corrispondenti di due righe.

Il problema del *Chiu Chang* porta ad un sistema lineare

Una possibilità è operare sulle righe per rendere uguali i primi elementi:

1	0	2
0	1	3

mcm = 15

- moltiplichiamo la prima riga per 3,
- e la seconda per 5.
- Ora alla seconda riga sottraiamo la prima,
- moltiplichiamo questa seconda riga per 9
- e alla prima riga sottraiamo la seconda.
- Infine si divide la prima riga per 15 e la seconda per 9.

Il problema del *Chiu Chang* porta ad un sistema lineare

- Eravamo partiti da un sistema di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 5x+3y=19 \\ 3x+2y=12 \end{cases}$$

- e siamo pervenuti alla sua soluzione:

$$\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

1	0	**2**
0	**1**	**3**
coeff. di x	**coeff. di y**	**rendim. (sheng)**

- Un'esperienza didattica è stata realizzata nella Scuola Media (2005).

Riflessioni sull'algebra cinese
Diagrammi e gioco

- Una rappresentazione come quella ottenuta mediante le bacchette sulla tavola da calcolo è costituita da un complesso di segni, relazioni spaziali, regole incorporate.
- Ma gli allievi si accostano ad essa come ad un **gioco**.
- Dunque **potrebbe essere il gioco stesso (che, per l'allievo, è dotato di significato di per se stesso, in quanto "gioco nuovo") a conferire significato al procedimento algebrico!**
- **"Per esprimere le relazioni algebriche non sono sempre indispensabili i tipici segni dell'algebra"** (Steinbring, 2002, p. 20).

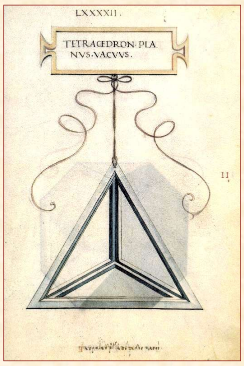
Riflessioni sull'algebra cinese
Diagrammatic thinking

- L'aspetto fondamentale è l'approccio alle regole di elaborazione delle tabelle.
- Gli allievi applicano delle regole "grafiche", fortemente legate alla disposizione iconica degli elementi nello spazio della tavola da calcolo.
- Con Peirce ripetiamo: «una proprietà altamente distintiva dell'icona è che **attraverso osservazione diretta di essa si possono scoprire riguardo al suo oggetto verità nuove oltre a quelle sufficienti a determinare la costruzione dell'icona stessa»** (Peirce, 2.279, *MS* 787).
- E non dimentichiamo la concretezza dell'indice!

Sommario

Il ragionamento diagrammatico

- **Charles Sanders Peirce**
  La semiosi illimitata
- **Matematica e segni**
  Diagrammi, abduzione
- **Algebra e diagrammi**
  Tra vettori e matrici
- **Diagrammi ed efficacia**
  Beth e i tableaux



Evert W. Beth (1908-1964)
e il metodo dei tableaux

- Con il **metodo dei tableaux** è possibile confutare una proposizione composta (mostrare che è falsa comunque si diano i valori di verità alle componenti).
- Si costruisce un grafo ad albero con la proposizione da confutare nel primo nodo e le regole seguenti:

Regola α

- $X \wedge Y$
  $\downarrow$
- X
  Y

Regola β

- $X \vee Y$
  $\downarrow$
  $|\quad|$
- $X \quad Y$

- Un ramo si dice **chiuso** se contiene una proposizione e la negata.
- Una confutazione è completa quando **tutti i suoi rami sono chiusi.**

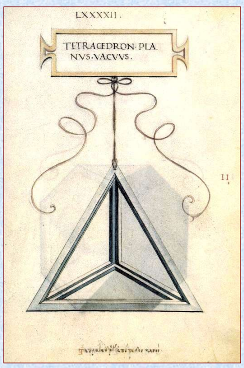
Riassumendo: segni e ragionamento diagrammatico

- La scelta di procedere graficamente si rivela decisiva per accorpare casi non singolarmente significativi e quindi per ottenere la semplificazione del procedimento.
- **Nella costruzione del tableau, così vicina ad un approccio diagrammatico, può essere evidenziata una vera e propria fase "creativa"?**
- Più in generale: potremmo dire che l'opzione di ricorrere al metodo dei tableau, con questa sua importante componente grafica, è assimilabile ad una **presupposizione** (ad una scelta interpretativa)?

Riassumendo: segni e ragionamento diagrammatico

- La costruzione di un tableau semantico (almeno al semplice livello di calcolo delle proposizioni) non sembra essere l'elemento indispensabile che consente il salto di qualità tale da consentire il raggiungimento di un risultato. Ma **la stessa possibilità di semplificare il procedimento risolutivo può essere (didatticamente, e non solo) decisiva.**
- Se la presenza di una presupposizione sottolinea una scelta (metodologica) che si suppone utile per affrontare una situazione, **l'adozione di un approccio diagrammatico potrebbe essere assimilata ad una presupposizione.**

A tutti grazie dell'attenzione



Grazie a Dick Rorty (1931–2007)