Università di Udine, Facoltà di Scienze della Formazione

Corso di Informatica Applicata alla Didattica

(Giorgio T. Bagni)

Appunti: computabilità e macchine di Turing

1. COMPUTABILITÀ

1.1. Problemi decidibili e funzioni computabili

La nozione di problema decidibile si collega al concetto di algoritmo.

Definizione 1. Diremo *decidibile* un problema per il quale esiste un algoritmo (quindi una procedura eseguibile con un numero finito di passi) in grado di risolverlo.

Alla nozione di problema decidibile si collega quella di *funzione computabile*.

Definizione 2. Consideriamo una funzione **N**→**N**, $n \to f(n)$. Essa viene detta *computabile* se esiste, per ogni naturale n, un procedimento mediante il quale calcolare $f(n)$ *in un numero finito di passaggi*.

Non è difficile fornire esempi di funzioni computabili.

Esempio 1. Le funzioni **N**→**N**:

$$f(n) = \sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+...+n$$

$$f(n) = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n = n!$$

sono computabili: i loro valori possono infatti essere calcolati, per ogni n naturale, rispettivamente mediante:

- $n-1$ addizioni,
- $n-1$ moltiplicazioni.

Osservazione. Assai meno agevole è immaginare casi di funzioni non computabili. Non ci occuperemo di questo aspetto.

1.2. Una macchina per calcolare

Da alcuni decenni, le macchine per il calcolo automatico sono entrate a far parte della quotidianità: non sembra possibile individuare un settore dell'attività umana in cui non siano utilizzati i moderni strumenti di calcolo, dalle più semplici calcolatrici tascabili, in grado di eseguire appena le quattro operazioni aritmetiche, ai grandi elaboratori.

Il funzionamento di una calcolatrice tascabile, visto dalla parte dell'utente, appare semplicissimo: è sufficiente, ad esempio, digitare le cifre di due addendi, intervallati dal segno "+", per essere in grado di ottenere, grazie al tasto con il simbolo "=", il risultato dell'addizione, in un'impercettibile attimo.

Ma questa semplicità è soltanto apparente. In effetti, il funzionamento di una calcolatrice tascabile (come di ogni macchina per eseguire operazioni o algoritmi) coinvolge alcune questioni teoriche che sono riassunte ed esaminate nella branca della logica matematica che si occupa della *computazione*.

In questa sezione presenteremo una selezione di questioni inerenti alla teoria della computazione, partendo dalla presentazione della *macchina di Turing*, ideata nel 1936 dal matematico inglese Alan Turing (1912–1954), una macchina astratta in grado di eseguire le operazioni descritte in qualsiasi algoritmo.

Una macchina di Turing è costituita da:

- un nastro rettilineo (*unità di memoria*), di lunghezza infinita in entrambe le direzioni, suddiviso sequenzialmente in *celle*, ciascuna delle quali può recare impresso un simbolo, tratto da un apposito *alfabeto*, costituito da un numero finito di simboli;
- una testina di lettura e di scrittura, in grado di muoversi lungo il nastro di una cella (a sinistra o a destra) per volta, di leggere i simboli dell'alfabeto contenuti in ciascuna cella, di scrivere e di cancellare simboli dell'alfabeto nelle celle del nastro;
- un'*unità aritmetica* che esegua le operazioni aritmetiche elementari;
- un'*unità di controllo*, in grado di stabilire le modalità di funzionamento della macchina dopo ogni operazione.

Il funzionamento dell'unità di controllo (e dunque il funzionamento dell'intera nostra macchina) è regolato da un *programma* specifico rispetto all'algoritmo che la macchina stessa è chiamata ad eseguire. Il programma è costituito da una sequenza ordinata di istruzioni numerate, tratte dalla seguente lista:

istruzione D	la testina si sposta verso destra;
istruzione S	la testina si sposta verso sinistra;
istruzione N	la testina non si sposta;
istruzione α	la testina cancella il simbolo attualmente nella cella di lettura e sostituisce ad esso il simbolo α;
istruzione S*k*	il programma prosegue con la *k*-esima istruzione;
istruzione Sα*k*	il programma prosegue con la *k*-esima istruzione se e solo se il simbolo attualmente nella cella di lettura è α;
istruzione A	arresto.

Il funzionamento di una macchina di Turing, convenzionalmente, prevede che la testina sia inizialmente collocata in corrispondenza della cella non vuota più a sinistra di una parola (o di un'istruzione) scritta sul nastro; l'unità di controllo della macchina inizia allora ad eseguire la prima istruzione del programma e (a meno che l'istruzione in esecuzione non sia il *salto*, S*k*, o il *salto condizionato* Sα*k*) passa ad eseguire, sequenzialmente, le istruzioni successive.

Esempio 2. Consideriamo una macchina di Turing con la testina posizionata in corrispondenza della cella non vuota più a sinistra di una parola (o di un'istruzione) scritta sul nastro.

Desideriamo che tale macchina si sposti progressivamente a destra cancellando, di volta in volta, tutti i simboli presenti nelle celle e scrivendo, in ogni cella, il simbolo α. Tutto ciò dovrà accadere finché la testina non leggerà, in una cella, il simbolo β: a questo punto il funzionamento della macchina di Turing dovrà arrestarsi.

Il programma è il seguente:

(istruzione 1)	α
(istruzione 2)	D
(istruzione 3)	Sβ5
(istruzione 4)	S1
(istruzione 5)	A

---

2. LA TESI DI CHURCH E IL PROBLEMA DELL'ARRESTO

2.1. La tesi di Church

L'importanza attribuita alle macchine di Turing è da far risalire alla celebre *tesi di Church*, enunciata nel 1936:

Tesi di Church. Ogni algoritmo può essere eseguito da una macchina di Turing.

In effetti, tutti gli algoritmi conosciuti sono eseguibili da una macchina di Turing; ma non possiamo dimenticare che la definizione di algoritmo come *sequenza ordinata di istruzioni, ciascuna delle quali è descritta precisamente* è soltanto discorsiva.

Notiamo che la realizzazione pratica di una macchina di Turing non comporta eccessive difficoltà: sono state costruite macchine particolari, dette *macchine di Turing universali*, in grado di imitare il funzionamento di qualsiasi macchina di Turing (M.L. Minsky nel 1967 ha descritto la costruzione di macchine di questo tipo).

Ma la constatata versatilità di una macchina di Turing non deve far pensare che il funzionamento di una tale macchina sia del tutto esente da problemi.

2.2. Il problema dell'arresto

Tra i problemi *algoritmicamente non risolubili*, ovvero per i quali non può essere predisposto un algoritmo efficace, il più noto è il *problema dell'arresto* di una generale macchina di Turing. Per alcune macchine di Turing, operanti su nastri contenenti particolari successioni di simboli, non è possibile predisporre un algoritmo in grado di provocare l'arresto della macchina.

Proponiamo una elementare descrizione del problema dell'arresto.

Sia M una macchina di Turing *qualsiasi*, operante su di un nastro *qualsiasi*. Ammettiamo che esista un algoritmo in grado di determinare l'arresto di M in corrispondenza di un simbolo α, riportato in una cella del proprio nastro. Dovrebbe allora esistere una seconda macchina di Turing, che chiameremo *macchina informatrice* T, capace di informarci dell'avvenuto arresto di M; sul proprio nastro, la macchina T dovrà riportare una completa descrizione *m* della macchina M.

Le modalità di funzionamento della macchina informatrice T possono ad esempio essere così stabilite:

- in caso di arresto di M in corrispondenza di un simbolo α, T ci informa di ciò arrestandosi in corrispondenza del simbolo 1 (diverso da α) del proprio nastro;
- se invece M non si arresta in corrispondenza di un simbolo α, T ci informa di ciò arrestandosi in corrispondenza del simbolo α del proprio nastro.

Applichiamo ora la macchina informatrice T a T stessa: ovvero, sul nastro di T riportiamo la descrizione *t* di T. Come funzionerebbe, in tale situazione, la macchina informatrice T? Applicando quanto precedentemente stabilito, otteniamo le possibilità seguenti:

- se T si arresta in corrispondenza di α, la macchina informatrice, che è T stessa, si dovrebbe arrestare in corrispondenza del simbolo 1 (diverso da α);
- se T non si arresta in corrispondenza di α, la macchina informatrice, che è T stessa, si dovrebbe arrestare in corrispondenza del simbolo α.

Si tratta di una contraddizione: ciò conferma che il problema dell'arresto non può considerarsi risolto per una qualsiasi macchina di Turing M, ovvero è *algoritmicamente non risolubile*.

Osservazione. Si può obiettare che le modalità di funzionamento sopra stabilite per la macchina informatrice T sono tutt'altro che obbligatorie. Giustissimo: potrebbe effettivamente esistere una macchina informatrice T' il cui funzionamento *non* si basa sulle convenzioni sopra segnalate per la macchina T. Ma possiamo però immaginare (perché no?) un'ulteriore macchina T" in grado di convertire il funzionamento di T' nel funzionamento di T e dunque la contraddizione sopra segnalata non può essere evitata.

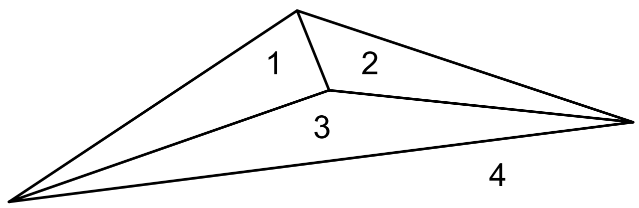
2.3. Il problema dei quattro colori e la ricerca informatica

Frequentemente, nella storia della matematica, sviluppi molto importanti sorgono dall'approfondimento di problemi apparentemente banali, marginali, o dall'analisi di situazioni pratiche. Un celebre esempio di questo genere è il *problema dei quattro colori*, una questione che ha visto impegnati i matematici dalla metà del XIX secolo ad oggi.

Una semplice osservazione sta alla base del nostro problema: per distinguere chiaramente i paesi rappresentati in una carta geografica è opportuno che gli stati confinanti siano colorati con colori differenti. Ebbene, in una carta geografica qualsiasi, *qual è il minimo numero di colori necessario per poter ottenere una colorazione corretta?* Ovvero: di quanti colori dobbiamo disporre per poter colorare una carta geografica in modo che due paesi aventi in comune un tratto di confine siano colorati diversamente?

La questione sorge nel 1852: Francis Guthrie, uno studente inglese, propone il problema al fratello Frederick, e suggerisce che il numero minimo di colori sia *quattro*: Frederick Guthrie indica la questione ad uno dei propri insegnanti, Augustus De Morgan (1806–1871), che interpella William Rowan Hamilton (1805–1865). Nel giro di pochi anni, la questione viene proposta ai soci della London Mathematical Society, per iniziativa di Arthur Cayley (1821–1895). Da allora, molti abili matematici si sono impegnati nella trattazione rigorosa del problema della colorazione delle carte geografiche, con alterna fortuna, ma con risultati spesso molto interessanti, fino alle conclusioni ottenute recentemente mediante l'uso degli elaboratori elettronici.

Immediata è la dimostrazione che una carta geografica qualunque *non* può essere colorata con soli *tre* colori: per colorare correttamente la semplice carta illustrata nella figura seguente, ad esempio, tre soli colori non sono sufficienti. Infatti, dopo avere colorato le tre parti (confinanti) in cui viene suddiviso il triangolo, un *quarto* colore deve essere impiegato per colorare la parte di piano esterna al triangolo stesso.



In modo un po' più complicato è possibile provare che *cinque* colori sono sufficienti per una corretta colorazione di una carta geografica qualsiasi (questa affermazione viene indicata con la denominazione di *teorema dei cinque colori*). Dunque, il numero minimo di colori per la colorazione di una carta geografica è maggiore di tre e non è maggiore di cinque. Resta aperto il problema: *quattro o cinque colori?*

Quattro colori *potrebbero* essere sufficienti per colorare una carta qualsiasi: questa affermazione viene indicata con la denominazione di *congettura dei quattro colori*.

Alfred Kempe, un avvocato londinese appassionato di matematica, nel 1879 pubblica un'elegante dimostrazione della congettura dei quattro colori. Ma l'illusione di avere chiuso il problema è effimera: nel 1890 Percy Heawood individua un errore nella dimostrazione di Kempe (i casi considerati dal brillante avvocato non sono sufficienti a garantire che *ogni* carta geografica sia colorabile con soli quattro colori). E tra annunciate dimostrazione e clamorose smentite si finisce per giungere alle ricerche condotte, nella seconda metà del XX secolo, sulla base di procedure e di mezzi propri dell'informatica.

Nel 1976, Kenneth Appel e Wolfgang Haken dell'Università dell'Illinois riescono a verificare la congettura dei quattro colori impiegando alcuni potenti elaboratori. Dal punto di vista concettuale, il procedimento impiegato non si discosta molto da quello introdotto da Kempe un secolo prima: grazie a complicate procedure (dette "di scaricamento") vengono esaminate le possibilità non considerate da Kempe, che danno origine ad un elevatissimo numero di casi.

La dimostrazione di Appel e di Haken non ha però soddisfatto tutti i settori del mondo matematico. Non è la correttezza dei presupposti ad essere messa in discussione; ma la "dimostrazione" proposta è articolata sull'esame automatico di un numero incredibilmente grande di situazioni, e tale "dimostrazione" non può essere ripercorsa e controllata se non mediante l'impiego di un elaboratore. Se dunque il problema dei quattro colori può dirsi praticamente risolto, resta l'assenza di una "dimostrazione" tradizionale, di una prova "umana" e non "elettronica" della celebre congettura. Né si è certi dell'esistenza di una tale dimostrazione.

Se la verifica di Kenneth e di Haken resterà la sola dimostrazione per il "teorema dei quattro colori" (possiamo chiamarlo così? Qualche matematico preferisce il meno impegnativo "congettura verificata"), la matematica alle soglie del terzo millennio avrà forse individuato una nuova classe di problemi la cui soluzione dovrà essere affidata prevalentemente (o addirittura esclusivamente) al calcolo automatico.

Concludiamo quindi con una domanda dalle molte importanti implicazioni: possiamo ancora parlare di *matematica in senso stretto* nelle situazioni in cui si rivela indispensabile una decisiva, presenza dell'elaboratore elettronico? A ciascuno il compito di dare una personale risposta a tale quesito.