

**Università di Udine, Facoltà di Scienze della Formazione**

**Corso di Informatica Applicata alla Didattica**

**(Giorgio T. Bagni)**

## **Esercizi sulla Computabilità**

1. *Esercizio risolto.* Si dica con quante operazioni aritmetiche può essere calcolata la funzione  $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  che ad ogni naturale  $n$  fa corrispondere il numero naturale:

$$f(n) = \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n i^2 = 1+2+3+\dots+n+1^2+2^2+3^2+\dots+n^2$$

In base a ciò, si dica se la funzione  $f$  è computabile.

*Risoluzione.* Assegnati il naturale  $n$ ,  $f(n)$  può essere calcolata con:

- $n-1$  addizioni;
- $n-1$  moltiplicazioni (per calcolare le seconde potenze di ogni  $i$ ,  $2 \leq i \leq n$ ) – eventualmente una di più se si vuole calcolare il quadrato di  $1 \dots$ ;
- $n-1$  addizioni;
- un'addizione, per aggiungere finalmente le due sommatorie.

Pertanto  $f(n)$  può essere calcolata con  $3n-2$  operazioni.

Ricordiamo che una funzione  $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ ,  $n \rightarrow f(n)$  viene detta computabile se esiste, per ogni naturale  $n$ , un procedimento mediante il quale calcolare  $f(n)$  in un numero finito di passaggi: pertanto l'assegnata funzione  $f$  è computabile. ■

2. Si dica con quante operazioni aritmetiche può essere calcolata la funzione  $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  che ad ogni naturale  $n$  fa corrispondere il numero naturale:

$$f(n) = 5 \cdot (n^2 + 5n + 7) + 1$$

In base a ciò, si dica se la  $f$  è computabile.

[6 operazioni; è computabile]

3. Si dica con quante operazioni aritmetiche può essere calcolata la funzione  $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  che ad ogni naturale  $n$  fa corrispondere il numero naturale:

$$f(n) = \sum_{i=1}^n (i^2 + i + 1)$$

In base a ciò, si dica se la funzione  $f$  è computabile.

4. Si dica con quante operazioni aritmetiche può essere calcolata la funzione  $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  che ad ogni naturale  $n$  fa corrispondere il numero naturale:

$$f(n) = \sum_{i=1}^n (2i^2 + 5)$$

In base a ciò, si dica se la funzione  $f$  è computabile.

6. Si dica con quante operazioni aritmetiche può essere calcolata la funzione  $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  che ad ogni naturale  $n$  fa corrispondere il numero naturale:

$$f(n) = \prod_{i=1}^n i + \prod_{i=1}^{n+1} (2i + 7)$$

In base a ciò, si dica se la funzione  $f$  è computabile.

7. *Esercizio risolto.* Si considerino le seguenti istruzioni:

<i>istruzione D</i>	la testina si sposta verso destra;
<i>istruzione S</i>	la testina si sposta verso sinistra;
<i>istruzione N</i>	la testina non si sposta;
<i>istruzione <math>\alpha</math></i>	la testina cancella il simbolo attualmente nella cella di lettura e sostituisce ad esso il simbolo $\alpha$ ;
<i>istruzione <math>S_k</math></i>	il programma prosegue con la $k$ -esima istruzione;
<i>istruzione <math>S_{\alpha k}</math></i>	il programma prosegue con la $k$ -esima istruzione se e solo se il simbolo attualmente nella cella di lettura è $\alpha$ ;
<i>istruzione A</i>	arresto.

Consideriamo una macchina di Turing e scriviamo un programma tale che:

- la macchina si sposti a sinistra cancellando, di volta in volta, tutti i simboli presenti nelle celle e scrivendo, in ogni cella, il simbolo  $\delta$ ;
- tutto ciò dovrà accadere finché la testina non leggerà, in una cella, il simbolo  $\gamma$ : a questo punto il funzionamento della macchina di Turing dovrà arrestarsi.

*Risoluzione*

Il programma richiesto è il seguente:

(istruzione 1)	$\delta$
(istruzione 2)	S
(istruzione 3)	S $\gamma$ 5
(istruzione 4)	S1
(istruzione 5)	A ■

8. Con riferimento alla lista di istruzioni riportata nel testo dell'esercizio risolto 7, si consideri una macchina di Turing e si scriva un programma tale che:

- la macchina si sposti a destra occupando sei celle (compresa l'iniziale), cancellando, di volta in volta, tutti i simboli presenti nelle celle e scrivendo uno dopo l'altro, nelle sei celle sequenzialmente occupate, i simboli: T, U, R, I, N, G;
- fatto ciò, la macchina dovrà arrestarsi.

[(istruzione 1) T; (istruzione 2) D;  
 (istruzione 3) U; (istruzione 4) D;  
 (istruzione 5) R; (istruzione 6) D;  
 (istruzione 7) I; (istruzione 8) D;  
 (istruzione 9) N; (istruzione 10) D;  
 (istruzione 11) G; (istruzione 12) A]

9. Con riferimento alla lista di istruzioni riportata nel testo dell'esercizio risolto 7, si consideri una macchina di Turing e si scriva un programma tale che:

- la macchina si sposti a destra cancellando, di volta in volta, tutti i simboli presenti nelle celle e scrivendo, in ogni cella, alternativamente i simboli  $\alpha$  e  $\beta$ ;

- tutto ciò dovrà accadere finché la testina non leggerà, in una cella, il simbolo  $\omega$ : a questo punto la testina si sposterà a sinistra di una cella e il funzionamento della macchina dovrà quindi arrestarsi.

10. Con riferimento alla lista di istruzioni riportata nel testo dell'esercizio risolto 7, si consideri una macchina di Turing e si scriva un programma tale che:

- la macchina si sposti a destra cancellando, di volta in volta, tutti i simboli presenti nelle celle e scrivendo, in ogni cella, alternativamente i simboli  $\alpha$  e  $\beta$ ;
- tutto ciò dovrà accadere finché la testina non leggerà, in una cella, il simbolo  $\omega$ : a questo punto la testina si sposterà per due volte a destra di una cella, cancellando, entrambe le volte, i simboli presenti nelle celle e scrivendo, in ogni cella, il simbolo  $\lambda$ ; il funzionamento della macchina dovrà quindi arrestarsi.