Master in Didattica delle Scienze – Università di Udine

Insiemi e diagrammi di Eulero–Venn

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine

Summary

Our purpose is to present some features of the representations by Euler diagrams and by Venn diagrams. It is important to take into account that the basic expressions of Set Theory are rooted in the linguistic structure of subject-predicate, and Euler–Venn diagrams should not be seen as means to replace the meaning of the predicative structure. We propose and discuss some examples in order to show that the representation by Euler-Venn diagrams cannot be considered completely equivalent to verbal or symbolic predicative expressions.

I. Introduzione

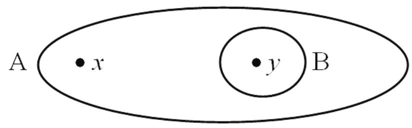
I diagrammi di Eulero–Venn sono una rappresentazione molto importante in ambito didattico, per alcuni versi, come potremo constatare, impegnativa. La domanda che ispira la nostra ricerca è la seguente: la rappresentazione simbolico–proposizionale delle relazioni tra elementi e insiemi ($x \in \mathrm{A}$, $y \notin \mathrm{B}$ etc.) può essere considerata equivalente alla corrispondente rappresentazione realizzata attraverso il "metodo" di Eulero–Venn?

Il termine *metodo* ci fa pensare al greco μέθοδος, da μετά e ʽοδός, dove quest'ultima parola significa "cammino": dunque un metodo si riconduce al cammino da percorrere per ottenere un risultato, ad esempio per realizzare una rappresentazione (Heidegger, 2004, p. 112). Un problema riferito all'insegnamento–apprendimento degli insiemi è allora il seguente: sia definita una qualsiasi situazione (coinvolgente alcuni insiemi ed elementi) enunciando in forma proposizionale–simbolica le relazioni tra insiemi ed elementi; *come* (cioè secondo quale sequenza di atti, secondo quale "cammino") può essere effettivamente ottenuta una rappresentazione visuale mediante diagrammi di Eulero–Venn?

Come avremo occasione di verificare, la stessa realizzazione pratica di un diagramma di Eulero–Venn richiede un processo non banale (da questo punto di vista potremmo riprendere la nozione di *procept* teorizzata da David Tall; si veda ad esempio: Gray & Tall, 1994). Insomma, il passaggio da una proposizione simbolicamente enunciata:

$$x \in \mathrm{A} \ \wedge \ y \in \mathrm{A} \ \wedge \ y \in \mathrm{B}$$

al corrispondente diagramma di Eulero–Venn:



non è un’operazione immediata e priva di difficoltà (Fischbein & Baltsan, 1999).

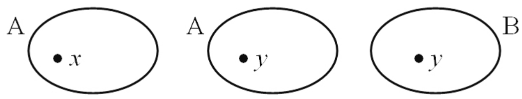
II. Dai simboli ai diagrammi

Per analizzare la situazione possiamo distinguere (almeno) tre livelli:

- la rappresentazione proposizionale–simbolica:

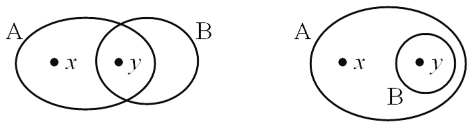
  $x \in \mathrm{A} \ \wedge \ y \in \mathrm{A} \ \wedge \ y \in \mathrm{B}$

- la rappresentazione proposizionale–visuale in cui i diagrammi di Eulero–Venn sono utilizzati soltanto per esprimere separatamente delle relazioni di appartenenza di un singolo elemento ad un singolo insieme:



  (tale uso dei diagrammi di Eulero–Venn non è però diffuso, nella pratica didattica);

- infine, la rappresentazione visuale “completa” di Eulero–Venn, riassunta in uno dei seguenti due diagrammi (spesso il secondo):

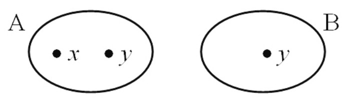


Ci limitiamo a segnalare che in alcuni testi un diagramma come il secondo viene denominato “di Eulero” (anche se nella versione originale euleriana non sono indicati gli elementi contenuti mediante punti e lettere), mentre uno come il primo (nel quale dunque siano presenti tutte le possibili intersezioni, anche vuote) è detto “di Venn”. Si noti che il secondo diagramma, non riportando le parti vuote, è didatticamente più chiaro (nel caso in esame, evita di indurre lo studente a pensare che esistano elementi di B non appartenenti ad A).

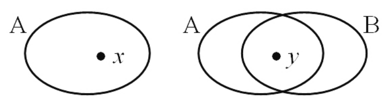
La rappresentazione proposizionale–simbolica e la rappresentazione proposizionale–visuale riguardano solo le relazioni di appartenenza dei *singoli* elementi ai *singoli* insiemi considerati, mentre una rappresentazione “completa” di Eulero–Venn è ricca di informazioni: evidenzia, ad esempio, le diverse intersezioni e le inclusioni. Nonostante ciò, nella pratica didattica la realizzazione di una rappresentazione di Eulero–Venn sulla base delle semplici relazioni di appartenenza dei singoli elementi ai singoli insiemi viene talvolta data per scontata…

Esaminiamo il passaggio “delicato”: dalla rappresentazione proposizionale visuale (che equivale alla versione simbolica) si deve costruire un diagramma “completo” di Eulero–Venn. Si osservi che nella rappresentazione finale ciascun elemento (x, y) e ciascun insieme (A, B) compaiono una e una sola volta. Ipotizzando la presenza di una sequenza di fasi intermedie (ma si tratta solo di una supposizione), ci sarebbero due possibilità per giungere a ciò:

- potremmo inizialmente “unificare” gli insiemi:



- o potremmo inizialmente “unificare” gli elementi:



La prima potrebbe essere detta “fase intermedia dei singoli insiemi” e la seconda “dei singoli elementi”; ma come sono ottenute, nella pratica? E soprattutto: i due procedimenti qui ipotizzati (ovvero uno di essi) descrivono davvero i comportamenti dei nostri allievi?

Alcune esperienze didattiche hanno coinvolto studenti della scuola primaria e secondaria di I grado (9–12 anni) e *non* è stata riscontrata in termini significativi la presenza di fasi intermedie direttamente riconducibili a quelle descritte. I dati hanno però evidenziato che molti studenti tendono comunque a *tracciare prima gli insiemi* (considerati, dunque, alla stregua di contenitori: si ricordi la “metafora del contenitore”: Lakoff & Núñez, 2005) e *successivamente inserire gli elementi*. Ciò può collegarsi anche alla struttura predicativa riassunta nella frase “l’elemento x appartiene all’insieme A” (più spesso utilizzata rispetto ad espressioni del tipo “l’insieme A contiene l’elemento x”, peraltro delicate in quanto basate sul termine “contenere”, riferibile sia all’appartenenza che all’inclusione: Bagni, 2006–a).

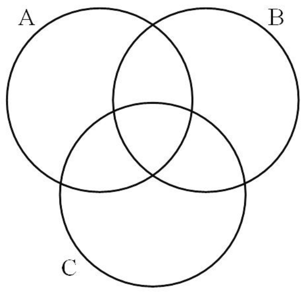
Resta dunque da affrontare una questione alla quale potrebbero essere collegati accorgimenti didattici e strategie di insegnamento: *come* viene realizzato un diagramma di Eulero–Venn, sulla base di quanto riscontrato nelle abitudini dei nostri studenti?

III. Uno schema “precostituito”

Seguendo il comportamento di alcuni allievi, discuteremo la possibilità di rappresentare una situazione insiemistica (descritta proposizionalmente con singole relazioni di appartenenza) in un diagramma di Eulero–Venn “precostituito”. Qualche studente tende infatti a *predisporre* uno schema “della massima generalità” in cui inserire gli elementi sulla base delle assegnate relazioni di appartenenza, secondo un procedimento come il seguente:

- si disegna un diagramma col numero dato di insiemi (nell’esempio che andremo ad esaminare: 3) in modo da ottenere “tutte le intersezioni possibili”;
- si contrassegnano gli insiemi rappresentati graficamente con le lettere indicanti gli insiemi dati (A, B, C);
- si rappresentano gli insiemi in forma tabulare;
- si determinano tutte le intersezioni degli insiemi;
- si inseriscono gli elementi nel diagramma;
- eventualmente si semplifica il diagramma eliminando le intersezioni vuote (inutili; quest’ultima operazione, come vedremo, consente di ottenere un diagramma di Eulero “propriamente detto”; ma ciò non è considerato obbligatorio da tutti gli studenti).

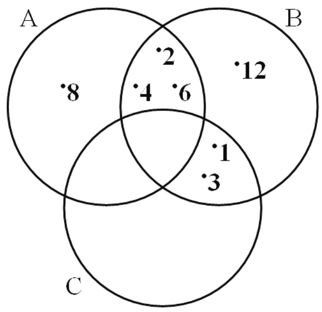
Esaminiamo un caso concreto (Bagni, 2007). Siano: A insieme dei naturali pari tra 1 e 9; B l’insieme dei divisori naturali di 12; C l’insieme dei naturali dispari tra 0 e 4. Dopo aver predisposto uno schema grafico (la disposizione “a fiore” che descriveremo è spesso usata dagli studenti nel tentativo di ottenere le diverse possibili intersezioni) come il seguente:



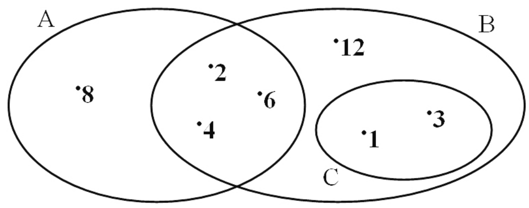
e aver determinato (in forma tabulare) gli insiemi e le loro intersezioni:

A = {2; 4; 6; 8}	B = {1; 2; 3; 4; 6; 12}	C = {1; 3}
$A \cap B$ = {2; 4; 6}	$A \cap C = \varnothing$	$B \cap C$ = {1; 3}
$A \cap B \cap C = \varnothing$		

si possono collocare gli elementi nel diagramma predisposto (può essere praticamente utile iniziare a posizionare gli elementi nelle varie intersezioni) ed ottenere così:



La rappresentazione ottenuta può essere presentata diversamente. Nel caso precedente, ad esempio, possiamo disegnare il diagramma:



in cui non sono rappresentati i sottoinsiemi vuoti (si tratta dunque di un diagramma di Eulero "propriamente detto", in base alla precedente annotazione).

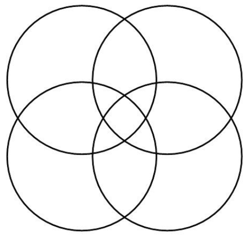
Analizziamo ora questo modo di procedere e, in particolare, alcune caratteristiche della rappresentazione di Eulero–Venn "a fiore" sopra utilizzata per gli insiemi. Con riferimento alla rappresentazione che si ottiene operando come descritto finora (nel caso, ad esempio, di tre insiemi A, B, C), quante possibilità abbiamo per la "collocazione" di un elemento x?

È immediato elencare tali possibilità:

$x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$	$x \in B \wedge x \notin A \wedge x \notin C$	$x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B$
$x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C$	$x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B$	$x \in B \wedge x \in C \wedge x \notin A$
$x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C$	$x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$	

Possiamo dunque notare che evidentemente 3 insiemi portano a 8 possibilità diverse (si ricordi la formula per la cardinalità dell'insieme delle parti), secondo l'uguaglianza: $2^3 = 8$ (la cardinalità dell'insieme delle parti di un insieme avente cardinalità n è infatti 2^n).

Il caso $n = 3$ riflette bene questa situazione: il piano viene suddiviso effettivamente in 8 parti; ma in generale, per esprimere il numero di parti $P(n)$ in cui il piano viene suddiviso con n insiemi così rappresentati "a fiore", ad esempio nel modo seguente:

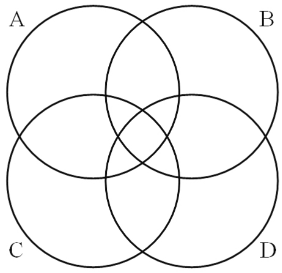


(riferito a $n = 4$), troviamo: $P(n) = n^2–n+2$ (formula che può essere dimostrata per induzione). Si può pertanto notare che, considerando il caso generale, il numero delle parti ottenute con la rappresentazione "a fiore" *non* coincide con quello calcolato per via combinatoria. Infatti l'equazione: $n^2–n+2 = 2^n$ è risolta soltanto dai valori: $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

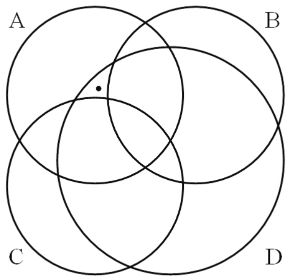
Quindi il procedimento descritto per ottenere una rappresentazione "generale" di n insiemi (secondo schemi "a fiore", del tipo di quello ora utilizzato) può rivelarsi insufficiente quando $n>3$. Per fissare le idee, consideriamo il seguente ulteriore esempio, in cui $n = 4$. Siano:

$A = \{1\}$	$B = \{2\}$	$C = \{2\}$	$D = \{1\}$
$A \cap D = \{1\}$	$B \cap C = \{2\}$	tutte le altre intersezioni: $\varnothing$	

Si verifica direttamente (e il lettore è invitato a farlo) che uno "schema generale" come il seguente (in cui abbiamo considerato ancora una rappresentazione "a fiore"; ma ovviamente questo non è certo l'unico tipo di diagramma al quale si può fare ricorso!) non renderebbe possibile l'inserimento degli elementi in modo da rispettare le condizioni date.

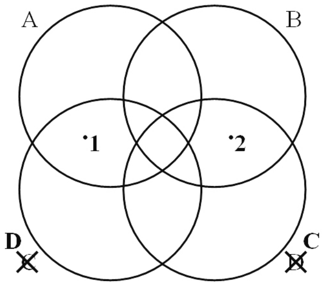


Una possibile variazione dello "schema generale" per cercare di migliorare la situazione, ad esempio per ottenere un'intersezione tra A, D esterna sia a B che a C, potrebbe essere ottenuta "aumentando" le dimensioni della rappresentazione dell'insieme D.



In questo modo si avrebbe evidentemente a disposizione un'intersezione tra i soli A e D, ma si "perderebbe" quella tra A, B, C esterna a D: il problema non è così semplice da risolvere…

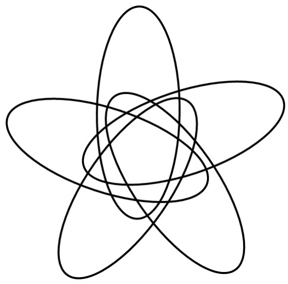
Il procedimento può però essere modificato diversamente. Si osservi che nel nostro caso una soluzione (sempre nell'ambito di rappresentazioni "a fiore") si ottiene cambiando la "disposizione" degli insiemi, cioè cambiando l'attribuzione dei "nomi":



Naturalmente anche questa variazione comporterebbe l'esclusione di altre possibilità: dunque neppure operando così giungeremmo a garantire un'assoluta "generalità" al procedimento.

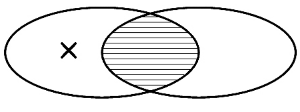
IV. Diagrammi di Eulero e diagrammi di Venn

Quanto ora notato non deve indurci a pensare che per $n>3$ non si possa ottenere la costruzione di un diagramma di Venn "generale" (si noti che parlando diagramma "di Venn" teniamo conto di *tutte* le possibili intersezioni degli insiemi in gioco: proprio questa possibilità è una caratteristica fondamentale di tali diagrammi!). Ad esempio, per $n = 5$ possiamo proporre lo schema seguente (con gli insiemi rappresentati dalle tradizionali forme ellittiche), la quale non si riconduce però alle costruzioni "a fiore" che abbiamo finora considerato:

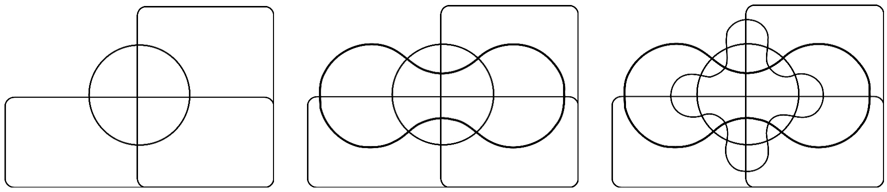


Prima di considerare un ulteriore esempio, ricordiamo che i diagrammi di Eulero–Venn, la cui storia è fatta risalire ad alcune rappresentazioni leibniziane (Baron, 1969; i diagrammi di Leibniz restarono però sconosciuti fino al 1903), sono ricchi di spunti per i matematici, in particolare per gli studiosi di geometria combinatoria (Grünbaum, 1975, Chilakamarri, Hamburger & Pippert, 1996). Numerose sono le varianti, identificate mediante diverse caratteristiche e denominazioni (*diagrammi di Johnston o di Peirce*, *mappe di Karnaugh*…).

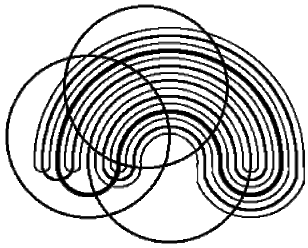
Fino a questo punto abbiamo parlato, come spesso si fa nella pratica didattica, di "diagrammi di Eulero–Venn". Dovremo però ora evidenziare alcune caratteristiche specifiche che identificano i "diagrammi di Eulero" e i "diagrammi di Venn". In generale, come anticipato, nei diagrammi "di Eulero" si rappresentano solo le parti (le intersezioni) non vuote. Nei diagrammi "di Venn" propriamente detti si raffigurano invece *tutte* le parti; si indicano con una × le parti certamente non vuote e con un tratteggio quelle certamente vuote (le parti su cui non si hanno dati si lasciano bianche).



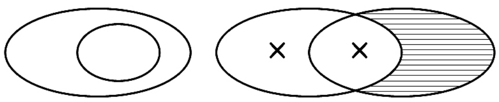
La realizzazione di un diagramma di Venn richiede di disegnare una rappresentazione in cui *tutte* le possibili intersezioni siano presenti (tentativo che nell'esempio precedente, basato sulla rappresentazione “a fiore” talvolta utilizzata da alcuni allievi, non è andato a buon fine). Nello schema seguente è illustrata la costruzione dei *diagrammi di Edwards* relativi rispettivamente a 3, 4 e 5 insiemi (Edwards, 2004), in cui è possibile evidenziare il ruolo essenziale di alcune proprietà di simmetria. Riportiamo i diagrammi per $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$:



L’analoga costruzione di Venn (1880) era simile alla seguente, indubbiamente meno chiara:



Tutto ciò è molto preciso, ma nella pratica didattica sono i diagrammi di Eulero a risultare più chiari e “intuitivi”. Ad esempio il fatto che A sia un sottoinsieme (proprio) di B appare chiaro da una rappresentazione come quella a sinistra (“di Eulero”, anche se in origine le figure utilizzate dal matematico svizzero erano cerchi),



piuttosto che da una come quella a destra (“di Venn”). Spesso dunque, didatticamente, con il termine “diagramma di Eulero–Venn” si fa riferimento ad una raffigurazione del primo tipo (talvolta con ulteriori convenzioni rappresentative, come l’uso di indicare gli elementi con dei punti all’interno della figura ellittica).

V. Un esercizio “difficile”

Torniamo ora alla nostra riflessione, con un esercizio… difficile:

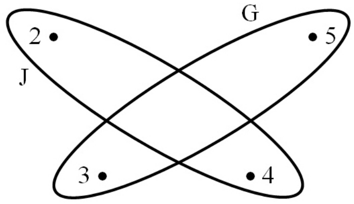
A = {1, 5}; B = {1; 2}; C = {2; 3}; D = {3; 4}; E = {4; 5};

F = {2; 5}; G = {3; 5}; H = {1; 4}; I = {1; 3}; J = {2; 4}

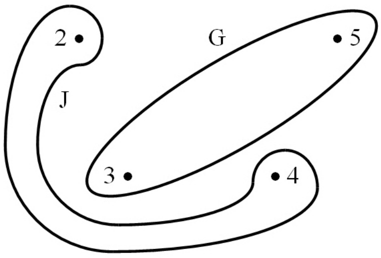
Si voglia rappresentare visualmente mediante un diagramma di Eulero–Venn (ovvero, come spesso si fa a scuola, “di Eulero”) la situazione ora descritta. Premettiamo due osservazioni:

(1) le dieci scritture A = {1, 5}, B = {1; 2}, C = {2; 3}, D = {3; 4}, E = {4; 5}, F = {2; 5}, G = {3; 5}, H = {1; 4}, I = {1; 3}, J = {2; 4} richiedono di “collegare” ogni elemento di {1; 2; 3; 4; 5} con ciascuno degli altri elementi dello stesso insieme, venendo così a formare i dieci sottoinsiemi indicati. Tale collegamento porta, per costruire un diagramma di Eulero–Venn, a realizzare una “connessione” grafica dei due elementi in gioco (in generale infatti un insieme viene rappresentato da una parte connessa di piano):

(2) naturalmente, per chiarezza e dunque per evitare malintesi, può essere opportuno che due insiemi disgiunti non siano rappresentati da parti comuni di piano (si fa qui riferimento ai diagrammi di Eulero; dal punto di vista teorico, nei diagrammi di Venn ciò non sarebbe obbligatorio). Consideriamo l'esempio seguente:



Per rappresentare G = {3; 5} e J = {2; 4} potremmo variare le posizioni dei punti indicanti gli elementi; ma se volessimo mantenere tali posizioni (anche ricorrendo a forme lontane dalla tradizionale ellisse), la rappresentazione preferibile sarebbe, nonostante l'aspetto inusuale:

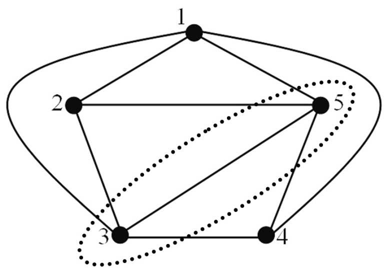


Torniamo all'esercizio sopra proposto. Si tratterebbe allora di realizzare un *grafo:*

- *con cinque nodi*
- *completo* (per le caratteristiche del problema)
- *e planare* (in modo da permettere il disegno dei diagrammi di Eulero–Venn, sulla base dell'osservazione 1)

Ma è ben noto che il grafo completo con cinque nodi K_5 (uno dei grafi di Kuratowski) *non* è un grafo planare.

Pertanto come risolvere l'esercizio? Con riferimento alla figura, si realizzino gli insiemi che connettono due elementi collegati da una linea (G = {3; 5} è indicato con il tratteggio).



A questo punto appare impossibile realizzare graficamente J = {2; 4} senza rinunciare alla connessione delle rappresentazioni degli insiemi o senza determinare delle "sovrapposizioni" che didatticamente comporterebbero la possibilità di malintesi (come la presenza di una qualche intersezione non vuota tra gli insiemi G = {3; 5} e J = {2; 4}: si ricordi l'osservazione 2, basata sulla distinzione tra i diagrammi "di Eulero" e quelli "di Venn").

In altri termini, la situazione descritta da A = {1, 5}, B = {1; 2}, C = {2; 3}, D = {3; 4}, E = {4; 5}, F = {2; 5}, G = {3; 5}, H = {1; 4}, I = {1; 3}, J = {2; 4} *non può essere espressa con un diagramma di Eulero*, se non a prezzo di scelte grafiche "inusuali". Naturalmente non è detto che i diagrammi di Eulero–Venn abbiano nella connessione una caratteristica irrinunciabile e quindi "non possano" rappresentare certe situazioni; possiamo però rilevare che diventerebbe inevitabile, in certi casi, rinunciare alla connessione (o accettare la presenza "grafica" di intersezioni non vuote, passando dai diagrammi "di Eulero" a quelli "di Venn"). E uno studente, a fronte di un insieme rappresentato da due "pezzi staccati" l'uno dall'altro, potrebbe essere indotto a pensare a *due* insiemi distinti.

Quanto visto implica che i diagrammi di Eulero–Venn tradizionalmente intesi (con la citata caratteristica di connessione) e più in particolare i diagrammi "di Eulero" (con le intersezioni non vuote graficamente non presenti) hanno uno statuto epistemologico radicalmente diverso da quello della tradizionale scrittura simbolica o dell'espressione verbale riferita alle relazioni di appartenenza? Una simile conclusione può apparire forzata; ma certamente questi modi di esprimersi hanno caratteristiche diverse, diversa "profondità", diverso contenuto informativo. Ogni notazione, ogni rappresentazione può presentare dei vincoli; è importante rendersi conto di questi vincoli ed eventualmente cercare di superarli (ad esempio, se in geometria si disegna un quadrato, quella figura può risultare utile nell'ambito di un procedimento, della risoluzione di un problema, ma introduce vincoli: non si potrà mai disegnare due quadrati nel rapporto 1/1000000, caso che in teoria non si può certo escludere; in questa situazione si potrà tuttavia introdurre qualche accorgimento per superare la difficoltà).

VI. Conclusioni

In un recente lavoro (Bagni, 2006–a) si affermava che le relazioni fondamentali della teoria degli insiemi sono di tipo predicativo mentre i diagrammi di Eulero–Venn le illustrano mediante segni in una figura piana; il punto è che gli studenti sono in generale "affetti" dai segni, nel senso che questi offrono diversi percorsi di sviluppo concettuale (Radford, 2002). Quanto ora visto mostra che i registri di rappresentazione semiotica, nella forma utilizzata nelle nostre aule, *non sempre sono del tutto "equivalenti"* e dunque non saranno equivalenti i percorsi di sviluppo concettuale da essi offerti. Se è dunque didatticamente importante (Duval, 1995) controllare il coordinamento dei registri, è però anche necessario domandarsi in che misura e con quali accorgimenti tale coordinamento sia possibile.

Per adesso ci limiteremo a ribadire che la realizzazione di una rappresentazione mediante i diagrammi di Eulero–Venn è un processo non banale e tale rappresentazione, se considerata in tutte le sue potenzialità, non è "isomorfa" alla rappresentazione simbolico–proposizionale delle singole relazioni di appartenenza dei vari elementi ai vari insiemi. Potremmo dunque essere indotti a chiederci: *che cosa* "rappresentano" queste rappresentazioni che abbiamo rilevato essere obiettivamente diverse? Infatti la domanda che ci ha guidato in questo capitolo (come si lega una rappresentazione simbolico–proposizionale ad una rappresentazione grafica (ad esempio a un diagramma di Eulero–Venn?) può portarci alla domanda più generale: come si lega una (qualsiasi) rappresentazione all'"oggetto matematico" che essa rappresenta?

Come linea per ulteriori approfondimenti, i diagrammi di Eulero potrebbero essere interpretati alla luce di un quadro teorico che si riconduce alle idee di Peirce (si vedano le note peirceane originali sull'argomento in: Peirce, 1931–1958, 4.368, e i commenti in: Ferrigni, 2002 e Marietti, 2001, p. 150, anche se non concordiamo con l'osservazione espressa dall'autrice nella nota 84 a proposito della distinzione tra diagrammi di Eulero e diagrammi di Venn; interessante è inoltre un confronto ideale con il *Tractatus*: Wittgenstein, 1998, 2.181 e 2.182, p. 31). Una conclusione di Marietti (2001, pp. 144 e 145; si veda inoltre: Fabbrichesi Leo, 1992) utilmente riferibile, almeno in termini di stimolo, ai diagrammi di Eulero è la seguente:

> Il diagramma si fa icona in un senso essenziale del termine. L'icona, la *firstness* peirceana, rappresenta il proprio oggetto senza bisogno di mediazione. Di più: essa va a coincidere con l'oggetto medesimo, in una

"relazione interna" che si scopre incapace di distinguere fra i due relati. […] Il diagramma matematico diventa l'oggetto stesso della conoscenza necessaria. Esso non ne costituisce soltanto una raffigurazione, dalla quale sia possibile distogliere lo sguardo qualora ci si voglia riferire direttamente all'originale. Piuttosto, il diagramma *è* questo originale.

In generale le proposizioni, nota Richard Rorty, non possono più essere pensate (solo) come semplici, dirette espressioni dell'esperienza, né come rappresentazioni di una qualche realtà extra–esperienziale, di una realtà al di fuori di noi che si "rispecchia" nella nostra mente; le proposizioni sono piuttosto sequenze di segni e di rumori usate dagli esseri umani nello sviluppo delle pratiche sociali (Rorty, 1994, p. 146) e le stesse rappresentazioni (ad esempio degli "oggetti" della matematica) potrebbero essere inquadrate secondo un punto di vista di questo tipo. Ogni modalità mediante la quale noi esprimiamo la matematica ha caratteristiche proprie e può sintetizzare tipi diversi di informazione (abbiamo sopra esaminato le singole relazioni di appartenenza, le inclusioni, le intersezioni etc.) e si collega ai diversi usi, dunque, come notato, a pratiche sociali. Non appare insomma corretto pensare alle varie modalità di espressione matematica come a dei linguaggi isomorfi, a forme diverse (basate su diverse convenzioni) di un preteso, universale "linguaggio matematico" in grado di riflettere docilmente i vari oggetti della matematica platonisticamente esistenti (Bagni, 2006–b e 2007).

Ringraziamenti e riferimenti bibliografici

L'autore ringrazia vivamente Claudio Bernardi (Università di Roma "La Sapienza") per i preziosi suggerimenti.

Bagni, G.T.: 2006–a, 'Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory'. *Educational Studies in Mathematics* 62, 3, 259–280.

Bagni, G.T.: 2006–b, *Linguaggio, storia e didattica della matematica*. Pitagora, Bologna.

Bagni, G.T.: 2007, *Simboli, parole, artefatti e figure. Rappresentare la matematica*. Aracne, Roma.

Baron, M.E.: 1969, 'A note on the historical development of logic diagrams: Leibniz, Euler, and Venn'. *Mathematical Gazette* 53, 113–125.

Chilakamarri, K.B., Hamburger, P. & Pippert, R.E.: 1996, 'Venn diagrams and planar graphs'. *Geometriae Dedicata* 62, 73–91.

Duval, R.: 1995, *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Lang, Paris.

Edwards, A.W.F.: 2004, *Cogwheels of the mind: the story of Venn diagrams*, Johns Hopkins University Press, Baltimore and London.

Fabbrichesi Leo, R.: 1992, *Il concetto di relazione in Peirce*. Jaca Book, Milano.

Ferrigni, M.: 2002, Peirce e i diagrammi di Eulero-Venn. *Dianoia* 7, 205-231.

Fischbein, E., & Baltsan, M.: 1999, 'The mathematical concept of set and the "collection" model'. *Educational Studies in Mathematics* 37, 1–22.

Gray, E. & Tall, D.: 1994, 'Duality, ambiguity, and flexibility: A perceptual view of simple arithmetics'. *Journal for Research in Mathematics Education* 27, 2, 116–140.

Grünbaum, B.: 1975, 'Venn diagrams and independent families of sets'. *Mathematics Magazine* 48, 12–23.

Heidegger, M.: 2004, *Il principio di ragione*. Adelphi, Milano (*Der Satz vom Grund*. Neske, Pfullingen 1957).

Lakoff, G. & Núñez, R.: 2005, *Da dove viene la matematica. Come la mente embodied dà origine alla matematica*. Bollati Boringhieri, Torino (*Where mathematics come from? How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books, New York 2000).

Marietti, S.: 2001, *Icona e diagramma. Il segno matematico in Charles Sanders Peirce*. LED, Milano.

Peirce, C.S.: 1931-1958, *Collected Papers*. I-VIII. Harvard University Press, Cambridge.

Radford, L.: 2002, ‘The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge’. *For the Learning of Mathematics* 22, 2, 14–23.

Rorty, R.: 1994, *La svolta linguistica*. Garzanti, Milano (*Twenty–Five Years After*. The University of Chicago, Chicago 1992).

Wittgenstein, L.: 1998, *Tractatus logico-philosophicus e Quaderni 1914–1916*. Einaudi, Torino (*Tractatus logico-philosophicus*. Routledge & Kegan Paul, London 1922. *Notebooks 1914-1916.* Blackwell, Oxford 1961).