Master in Didattica delle Scienze – Università di Udine

Storia e geografia della matematica
Bacchette da calcolo cinesi e sistemi di equazioni

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine

Summary

The main focus of this paper is on the study of the educational possibilities connected to the use of an ancient Chinese artifact. In the theoretical framework based upon some works by Vygotskij (1974, 1987) and Wartofsky (1979), we proposed a problem to a group of 10-11 year-old pupils (by the Chinese treatise entitled Chiu-Chang, 1st cen. b.C.); the considered problem can be solved by a couple of simultaneous linear equations. Empirical data suggest that the use of the primary artifact, taking into account the secondary artifacts referred to the modes of action, can be important in order to approach some mathematical contents. Moreover we can underline the importance of body experience both in the individual and in the social action.

I. Introduzione

> "Non esiste la 'dimostrazione in generale'. La parola 'dimostrazione' cambia significato proprio come la parola 'scacchi'. Con la parola 'scacchi' possiamo intendere il gioco che è definito dalle regole attuali oppure il gioco che è stato giocato nei secoli passati con regole sempre diverse".
>
> Ludwig Wittgenstein (1982, p. 40)

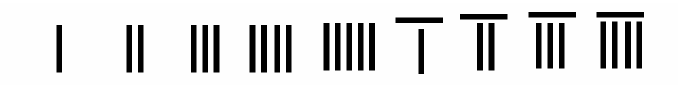
Da un recente studio comparativo tra esperienze scolastiche cinesi e statunitensi emergono alcune sostanziali differenze: in Cina l'insegnamento appare più rigido ed orientato a pratiche didattiche tradizionali, mentre negli Stati Uniti sembra maggiormente teso a promuovere la creatività e la comprensione dei concetti; entrambi gli approcci si collegano a vantaggi e ad inconvenienti, dunque il loro confronto può apportare interessanti suggerimenti ad entrambe le impostazioni didattiche (An, Kulm & Wu, 2004).

L'impostazione interculturale può essere particolarmente produttiva in ambito didattico: essa non prevede infatti un semplice accostamento di esperienze derivanti dalle diverse culture, bensì è basata su di un'efficace interazione, su di un confronto paritetico che porti alla valorizzazione delle differenze (ci basiamo su quanto illustrato in: Cipollari & Portera, 2004).

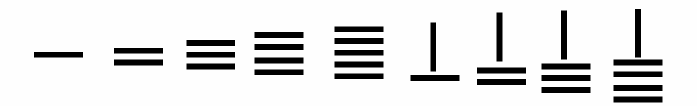
Nel presente lavoro proporremo un'esperienza didattica basata sull'uso di artefatti derivati dalla tradizione della matematica cinese.

II. Le bacchette da calcolo cinesi

La tradizionale indicazione cinese di numeri mediante bastoncini è spontaneamente riferibile alle dita della mano. Secondo tale interpretazione, però, dopo le 5 unità (corrispondenti a 5 dita) è necessario ricorrere all'altra mano, indicando che è stata già considerata una mano completa:



Nel raggiungere il 10 dobbiamo affrontare una situazione importante: per non restare bloccati (avendo esaurito le dita delle mani) introdurremo le decine che si potrebbero indicare mediante le stesse disposizioni di bacchette usate per le unità, spostate più a sinistra. Per evitare malintesi, tuttavia, i Cinesi utilizzavano per le decine delle disposizioni (*Heng*) diverse da quelle per le unità (*Tsung*):



Per le centinaia le disposizioni usate erano *Tsung*, per le migliaia *Heng* etc.

Fino al XII sec. lo zero era indicato da uno spazio vuoto (proprio questa assenza ha reso opportuno l'uso di due gruppi diversi di simboli). Dal 200 a.C. i Cinesi indicarono anche numeri negativi distinguendo il colore delle bacchette, rosse e nere.

Le bacchette erano un ausilio per il calcolo: esse davano la possibilità di formare praticamente i "numerali-bacchette" su di una superficie piana (la tavola da calcolo aritmetica, quadrettata, in cui le operazioni erano eseguite sfruttando le caratteristiche della notazione posizionale) e di cancellare facilmente i numeri che non servivano più. L'uso delle bacchette tramonta nella tarda epoca Ming (1368-1644) quando furono soppiantate dall'abaco.

III. Quadro teorico

> "Ogni giorno impariamo un linguaggio comune, certe parole ci vengono insegnate mostrandoci oggetti etc., e in connessione con essi escogitiamo una certa immagine. Poi, gradatamente, modifichiamo l'uso delle parole e, quanto più lo modifichiamo, tanto meno appropriata diventa quell'immagine, fino a diventare assolutamente ridicola. (…) Abbiamo bisogno di qualcosa di più dell'immagine giusta, abbiamo bisogno di sapere come la si usa".
>
> Ludwig Wittgenstein (1982, p. 19)

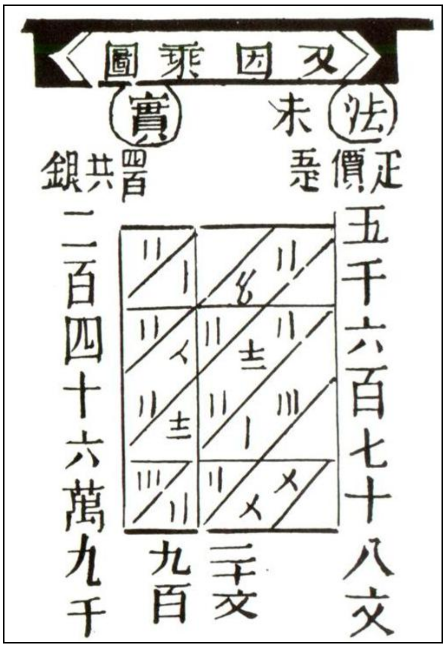
Un'applicazione delle bacchette da calcolo nel campo della ricerca in didattica della matematica richiede la precisazione di un quadro teorico: ci rifaremo a quanto proposto da Bartolini Bussi, Mariotti e Ferri (2005) che si basa sui lavori di Vygotskij (1974 e 1987), di Bachtin (1979 e 1988), di Engestroem (1990) e di Wartofsky (1979). In particolare, Vygotskij riconosce funzioni di mediazione agli strumenti tecnici e psicologici (segni o strumenti di mediazione semiotica: Vygotskij, 1974). Wartofsky (1979) identifica gli strumenti tecnici come *artefatti primari*; gli *artefatti secondari* sono usati per fissare e trasmettere le modalità di azione (Mariotti, 2002).

Le bacchette da calcolo sono considerate, in prima lettura, artefatti primari; regole e convenzioni rappresentative corrispondono ad artefatti secondari; una teoria matematica è un *artefatto terziario* che organizza gli artefatti secondari. Si può supporre (Bartolini Bussi, 2002; Bartolini Bussi & Boni, 2003) che gli aspetti pratico, rappresentativo e teorico siano incorporati (potenzialmente) nell'attività che si svolge con l'artefatto che, in tale modo, acquista caratteristiche di *polisemia* (Engestroem, 1990).

Didatticamente significativo è che l'uso degli artefatti primari richieda la loro manipolazione (Vygotskij, 1987, p. 45). L'importanza degli aspetti corporei si accorda con la recente posizione della scienza cognitiva basata sui lavori di Lakoff, Johnson e Núñez (Lakoff & Núñez, 2000), secondo la quale la formazione di idee matematiche si basa sull'esperienza sensoriale-motoria (alcune importanti questioni collegate all'apprendimento percettivo-motorio sono discusse in: Arzarello & Robutti, in stampa).

IV. L'algebra cinese e il suo carattere posizionale

I problemi che noi oggi risolviamo algebricamente sono presenti in alcune tradizioni matematiche a partire dal II millennio a.C., ad esempio presso i Babilonesi. In Cina l'algebra è presente dal II sec. a.C. in forma retorica o sincopata (ideogrammi monosillabici per quantità e per operazioni) con un importante "carattere posizionale" (Needham 1959, p. 112; Martzloff, 1987; nell'immagine a destra, una moltiplicazione "per graticola" tratta dal *Suang Fa Thung Tsung*, 1593).



La tavola di calcolo in versione algebrica era impostata in modo che determinate posizioni fossero occupate sempre da particolari tipi di grandezze (incognite, potenze etc.) e tale convenzione può considerarsi un artefatto secondario. Venne introdotto così un sistema che implicò la "registrazione di modelli matematici" (Needham, 1959, p. 113).

Storicamente, il carattere posizionale dell'algebra cinese ha avuto conseguenze diverse: da un lato, pose implicitamente l'accento sull'importanza dell'impostazione matriciale (ma il concetto di determinante fu sviluppato, in oriente, piuttosto tardi, nel 1683, dal giapponese Seki Kowa); parallelamente, però, determinò l'inibizione dello sviluppo di un simbolismo algebrico.

Nel presente lavoro si esamina il problema seguente che riprende, con variazioni numeriche, un problema del capitolo VIII (*Fang Cheng*) del *Chiu Chang* (opera precedente al I sec.):

> *Cinque covoni di grano di tipo A aggiunti a tre covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 19 sheng. Tre covoni di grano di tipo A aggiunti a due covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 12 sheng. Quali rendimenti hanno un covone di grano di tipo A e un covone di grano di tipo B?*

Esso porta al sistema di equazioni lineari che, nella nostra notazione moderna, sarebbe scritto:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

Secondo il procedimento cinese, i coefficienti ed i termini noti sono invece collocati, come vedremo, in una tabella a due righe e tre colonne che viene modificata secondo le regole seguenti:

(1) si possono variare in proporzione i termini delle righe;

(2) a una riga si può sostituire la riga ottenuta sommando o sottraendo i termini corrispondenti di due righe.

Riportiamo una possibile soluzione del sistema ottenuta con in metodo ora indicato (inizialmente utilizzando i numeri indo-arabi):

5	3	19
3	2	12

15	9	57
3	2	12

15	9	57
15	10	60

15	9	57
0	1	3

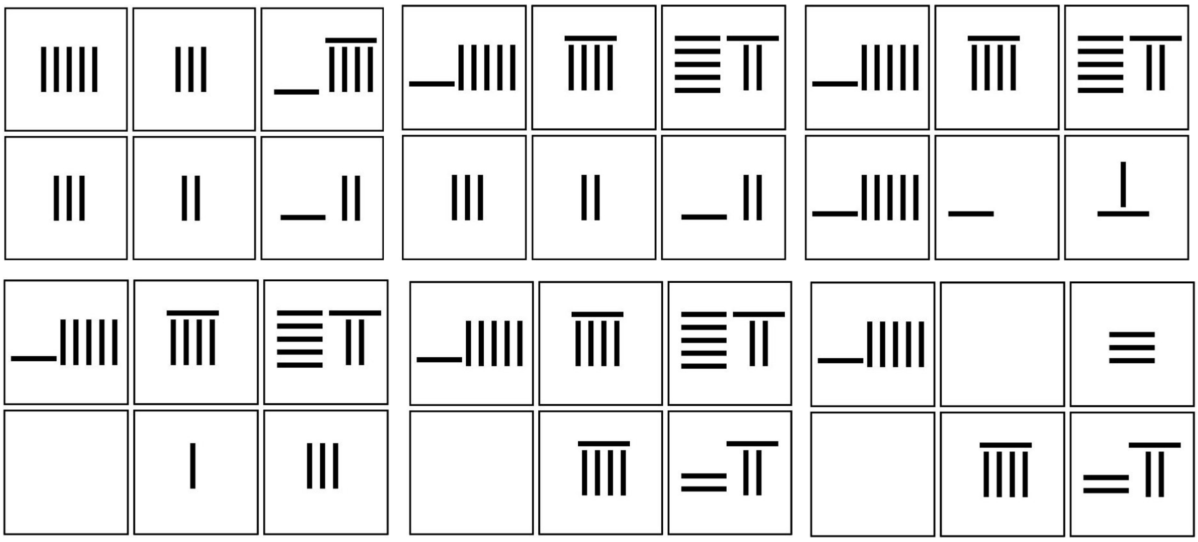
15	9	57
0	9	27

15	0	30
0	9	27

1	0	2
0	1	3

corrispondente alla soluzione: $x = 2$ e $y = 3$

Il procedimento può essere riprodotto con le bacchette e questa scelta è didatticamente significativa: si mantiene aderente alla tradizione storica anche dal punto di vista pratico e la manipolazione delle bacchette da parte degli allievi può determinare situazioni interessanti. Come vedremo, infatti, gli allievi possono accostarsi ad alcune proprietà di invarianza delle equazioni in modo intuitivo; i coefficienti nulli corrispondono all'assenza fisica di "disturbo".



I		II
	I	III

corrispondente alla soluzione: $x = 2$ e $y = 3$

Naturalmente quella ora riportata è soltanto una delle (molte) possibili soluzioni derivanti dall'applicazione del procedimento precedentemente illustrato. Mediante l'esame di una situazione sperimentale verificheremo quale sarà la scelta degli allievi.

Osserviamo che l'insegnante ha un ruolo importante per la presentazione delle modalità di uso (artefatto secondario) dell'artefatto primario: il rapporto degli artefatti è essenziale in quanto non esiste un solo "modo di usare" lo strumento considerato. L'insegnante dunque suggerisce scopi e strategie: l'elemento cruciale è ottenere la "sparizione" di una delle incognite, e l'assenza fisica di bacchette nella casella corrispondente al coefficiente nullo potrà essere importante.

V. Metodologia della ricerca sperimentale

Una prima verifica sperimentale è stata condotta in una scuola secondaria inferiore (a Treviso, I classe di una scuola media, allievi di 11-12 anni) ed ha consentito di notare che l'uso degli artefatti primari, bacchette e tavola da calcolo (strumenti tecnici), collegato a quello di artefatti secondari (convenzioni e modalità per variare le righe della tabella: strumenti psicologici) può agevolare lo studente nell'accostamento alla risoluzione di sistemi lineari con metodi di eliminazione.

Al momento dell'esperienza gli allievi non avevano trattato i numeri negativi né le equazioni. Solo alcuni di essi avevano qualche esperienza (risalente alla scuola primaria) con semplici esercizi del tipo: "indovina un numero sapendo che…" L'esperienza si è svolta in aula, durante un'ora di lezione, alla presenza dell'insegnante di matematica e dello sperimentatore (che non è mai intervenuto).

Era stata precedentemente introdotta alla classe la rappresentazione dei numeri mediante le bacchette da calcolo; gli allievi hanno avuto occasione di esercitarsi.

In una tabella corredata con etichette, realizzata su di un banco, era stato poi rappresentato il problema: "due pacchetti uguali contengono, in tutto, quattro biscotti. Quanti biscotti ci sono in ciascun pacchetto?" Era stato poi mostrato che dividendo per 2 i numeri in tutte le caselle della tabella si ottiene la soluzione.

Gli allievi sono stati suddivisi in sei gruppi di tre. È stato quindi proposto il problema precedentemente esaminato: con le bacchette è stata realizzata la disposizione iniziale affermando che essa "rappresentava i dati". Sono state poi illustrate (anche con esempi) le regole che permettono di modificare tale disposizione.

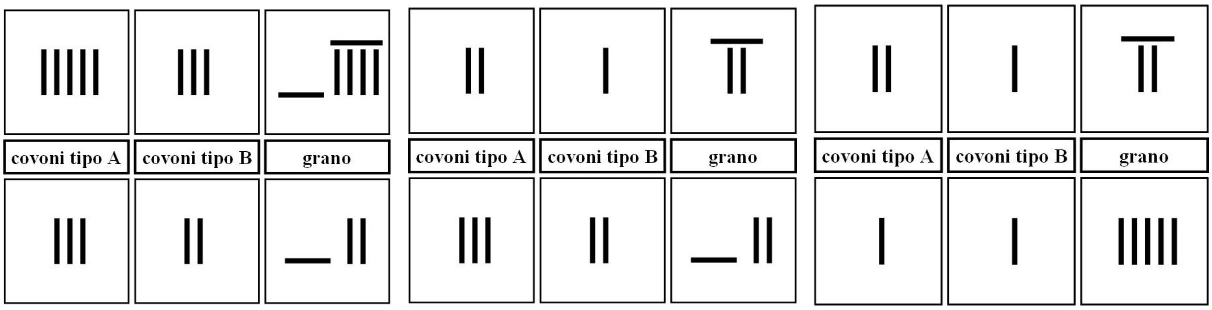
Durante la risoluzione, il ruolo dell'insegnante è stato di controllo (passando tra i vari gruppi): ha segnalato eventuali errori, ma non ha dato suggerimenti.

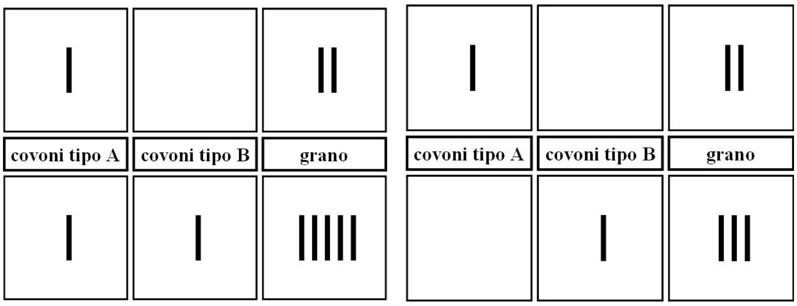
VI. Descrizione di una prima esperienza

Come ricordato, il problema tratto dal *Chiu Chang* descritto nel paragrafo IV porta al sistema di equazioni lineari che, nella nostra notazione moderna, è così espresso:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

Dopo alcuni tentativi, l'allieva S., in collaborazione con F. (il terzo componente del gruppo non ha svolto un ruolo attivo) ha impostato la seguente risoluzione.





dunque: $x = 2$ e $y = 3$

Significativi sono alcuni ampi gesti con le mani mediante i quali le allieve hanno indicato le varie righe dicendo:

"Adesso posso fare questi meno quelli".

Indicativa, inoltre, è una frase pronunciata da F. (l'allieva che ha più attivamente collaborato con S.):

"Si riesce quando due diventano uguali".

Possiamo notare che S. e F. hanno utilizzato solamente la regola che consente di sottrarre una riga dall'altra. Ma tale modo di procedere non è sempre applicabile (ricordiamo che gli allievi non avevano trattato i numeri negativi). Un secondo problema è stato allora proposto allo stesso gruppo:

Quattro covoni di grano di tipo A aggiunti a un covone di grano di tipo B hanno il rendimento di 6 sheng. Due covoni di grano di tipo A aggiunti a tre covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 8 sheng. Quali rendimenti hanno un covone di grano di tipo A e un covone di grano di tipo B?

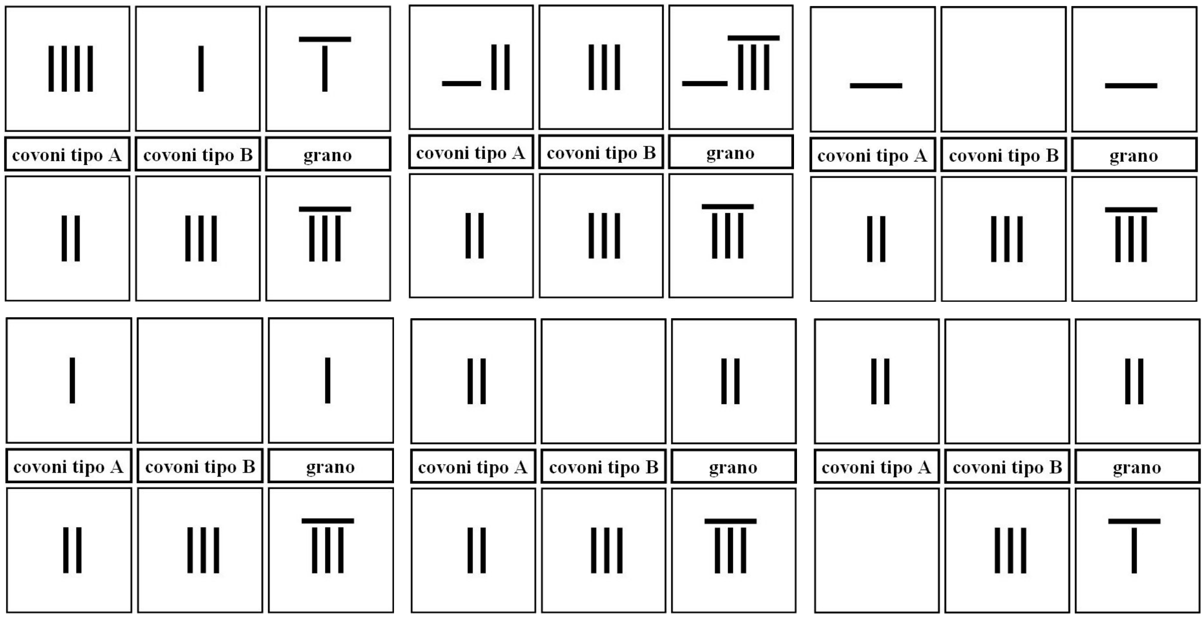
Dopo una fase di perplessità con osservazioni del tipo:

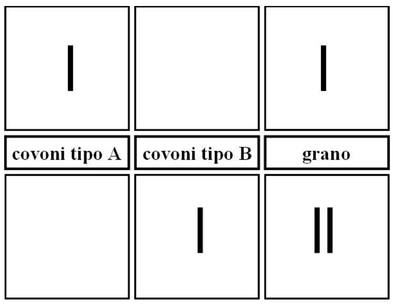
"Non si può togliere questi da quelli, non ce ne sono abbastanza",

l'allieva S. applica la regola che consente di moltiplicare gli elementi di una riga per $k>0$ (in questo caso: la prima riga per $k = 3$). F. ribadisce:

"Sì, sì, bisogna far diventare questo uguale a questi!"

indicando le diverse righe, e il procedimento può quindi proseguire e concludersi.





corrispondente alla soluzione: $x = 1$ e $y = 2$

VII. Discussione dei risultati e conclusioni

> "Una delle ragioni per cui si paragona la matematica a un gioco è che si vuol mostrare che essa è, in un certo senso, arbitraria (…). 'Una regola diversa avrebbe adempiuto alla stessa funzione', si potrebbe osservare. Quale funzione? Ciò suggerisce che non c'è nulla nell'oggetto del gioco che determina questa regola".
>
> Ludwig Wittgenstein (1982, pp. 147-148)

L'esperienza descritta può essere considerata un'importante occasione interculturale per un accostamento critico alla matematica cinese e al contesto nell'ambito del quale si è prodotta, ma assume significati notevoli anche dal particolare punto di vista della didattica della matematica.

Sebbene questa prima esperienza sia ancora piuttosto limitata e consenta solo di indicare considerazioni parziali (ulteriori verifiche sperimentali sono in corso), l'uso frequente da parte degli allievi di espressioni deittiche ("questi", "quelli") accompagnato da una marcata componente gestuale è interessante (Steinbring, 2002; alcuni spunti possono essere visti in: Bagni, in stampa). Inoltre gli allievi hanno dato la preferenza alle modalità d'uso (artefatto secondario) più direttamente legate alla presenza fisica dei bastoncini.

I dati finora esaminati sembrano suggerire che l'uso degli artefatti primari (bacchette e tavola da calcolo) collegato a quello di artefatti secondari (modalità per variare la tabella) possa agevolare la messa a punto di strategie risolutive, dunque l'accostamento agli artefatti terziari basati sulle attività con tali artefatti primari e secondari (si noti a tale riguardo che i Cinesi risolvevano sistemi di due equazioni in due incognite anche con altri metodi riassumibili in formule, ma il ruolo delle bacchette non appare in tali casi particolarmente significativo: Needham 1959 e Martzloff, 1987).

Nota H. Steinbring:

> "Per esprimere le relazioni algebriche non sono sempre indispensabili i tipici segni dell'algebra" (Steinbring, 2002, p. 20, la traduzione è nostra).

Una rappresentazione esterna come quella ottenuta mediante le bacchette sulla tavola da calcolo è costituita da un complesso di segni, relazioni spaziali, regole incorporate o comunque associate all'artefatto primario. Ma qual è la *trasparenza* (nel senso di Meira, 1998) dell'artefatto considerato rispetto al sapere ad esso collegato? Tale trasparenza non è costitutivamente legata a particolare artefatto, bensì dipende dall'uso che ne fa il soggetto e dall'attività in cui l'artefatto viene effettivamente usato. Dunque particolarmente significativo è il contesto nell'ambito del quale gli allievi si accostano all'attività proposta (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri & Garuti, 1997; Radford, 2002, 2003a e 2003b): tale contesto ha la caratteristica del gioco, più che della rappresentazione astratta.

Una traccia importante da esplorare è quindi la seguente: il contesto del gioco può favorire la costituzione di significati in termini più incisivi di quanto non faccia la rappresentazione astratta (algebrica)? Infatti il procedimento introdotto non è un artefatto secondario essenziale per garantire un evidente funzionamento dell'artefatto primario, come potrebbero essere ad esempio alcune indicazioni d'uso per realizzare una circonferenza mediante un compasso. Da questo punto di vista, le "regole" esaminate potrebbero essere considerate convenzionali, arbitrarie. Potrebbe dunque essere il gioco stesso (che, per l'allievo, è dotato di significato di per se stesso, in quanto gioco nuovo da "esplorare") a conferire significato al procedimento algebrico (un parallelo interessante potrebbe essere condotto sulla base di: Wittgenstein, 1982 e 1999; si veda inoltre: Penco, 2004).

Ulteriori studi potranno chiarire se l'uso di bacchette e tavola da calcolo possa introdurre la risoluzione di sistemi con metodi di eliminazione e, più in generale, suggerire o sottolineare l'importanza dell'impostazione matriciale: si tratta cioè di valutare come un apprendimento percettivo-motorio possa essere consolidato in un apprendimento simbolico-ricostruttivo, passaggio che si rivelerebbe certamente fondamentale per quanto riguarda la formazione di concetti matematici (Robutti & Ghirardi, 2004). Indichiamo inoltre una possibilità di semplificare l'artefatto secondario considerato: ad esempio, l'uso delle originali disposizioni *Tsung* e *Heng* non è indispensabile per la realizzazione pratica dell'esperienza e può essere, ad esempio, ridotto ad un semplice impiego di bastoncini in numero sufficiente per indicare le cifre (che potrebbero essere espresse un ordine determinato dalla notazione decimale). Naturalmente l'aspetto interculturale dell'esperienza suggerisce di mantenere il riferimento all'artefatto secondario originale.

> "Non facciamo distinzione tra l'avere significato e il non averlo, bensì tra l'essere usato e il non esserlo. Questa è una cosa molto importante, da tener presente quando si solleva il problema se la matematica sia soltanto un gioco fatto con simboli o se dipenda dal significato dei propri segni. Il problema svanisce quando si cessa di pensare al significato come a qualcosa che è nella mente (…). Il problema di conferire un significato indipendentemente dall'applicazione semplicemente non si pone".
>
> Ludwig Wittgenstein (1982, p. 231)

Ringraziamenti

L'autore ringrazia vivamente Ferdinando Arzarello e Ornella Robutti (Università di Torino), Paolo Boero (Università di Genova) e Donatella Iannece (Università di Napoli "Federico II"), Maria Reggiani e Samuele Antonini (Università di Pavia) per i preziosi commenti.

Riferimenti bibliografici

Arzarello, F. & Robutti, O.: in stampa, Approaching functions through motion experiments. *Educational Studies in Mathematics*.

An, S., Kulm, G. & Wu, Z.: 2004, The pedagogical content knowledge of middle school, mathematics teachers in China and U.S., *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7(2), 145-142.

Bachtin, M.: 1979, *Estetica e romanzo*, Einaudi, Torino.

Bachtin, M.: 1988, *L'autore e l'eroe. Teoria letteraria e scienze umane*, Einaudi, Torino.

Bagni, G.T.: in stampa, Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory, *Educational Studies in Mathematics*.

Bartolini Bussi, M.G.: 2002, The theoretical dimension of mathematics: a challenge for didacticians, *Proc. 2000 (24th) Annual meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, Montreal, 21-31.

Bartolini Bussi, M.G. & Boni, F.: 2003, Instruments for semiotic mediation in primary school classrooms, *For the Learning of Mathematics*, 23(2), 12-19.

Bartolini Bussi, M.G., Mariotti, M.A. & Ferri, F.: 2005, Semiotic mediation in primary school: Dürer's glass. Hoffmann, M.H.G.; Lenhard, J. & Seeger, F. (Eds.), *Activity and sign. Grounding mathematics education. Festschrift for Michael Otte*. Springer, New York, 77-90.

Cipollari, G. & Portera, A.: 2004, *Cultura, culture, intercultura*, IRRE Marche, Ancona.

Engestroem, Y.: 1990, When is a tool? Multiple meanings of artifacts in human activity, in *Learning, working and imagining: twelwe studies in activity theory*, Orienta-Konsultit Oy, Helsinki, 171-195.

Lakoff, G. & Núñez, R.: 2000, *Where Mathematics come from? How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York.

Mariotti, M.A.: 2002, The influence of technological advances on students' mathematics learning, in English, L.D. (Ed.). *Handbook of international research in mathematics education*, Lawrence Erlbaum Associates, Publisher, 695-724.

Mariotti, M.A., Bartolini Bussi, M.G., Boero, P., Ferri, F. & Garuti, R.: 1997, Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition, *Proceedings of PME-21*, Lathi, Finland, I, 180-195.

Martzloff, J.-C.: 1987, *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson, Paris.

Meira, L.: 1998, Making sense of instructional devices: the emergence of transparency in mathematical activity. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(2), 121-142.

Needham, J.: 1959, *Science and civilisation in China*, Cambridge University Press.

Penco, C.: 2004, *Introduzione alla filosofia del linguaggio*, Laterza, Roma-Bari.

Robutti, O. & Ghirardi, S.: 2004, Dai moti alle rappresentazioni simboliche: un'esperienza nella scuola elementare, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 27A-B, 5, 577-616.

Radford, L.: 2002, The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge, *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14-23.

Radford, L.: 2003a, Gestures, speech and the sprouting of signs, *Mathematical Thinking and Learning*, 5 (1), 37-70.

Radford, L.: 2003b, On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought, Anderson, M. & Al. (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*, Legas, Ottawa, 49-79.

Steinbring, H.: 2002, What makes a Sign a Mathematical Sign? An Epistemological Perspective on Mathematical Interaction, *Paper presented to the Discussion Group on Semiotics at the 26th PME*

Vygotskij, L.S.: 1974, *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori e altri scritti*, Giunti, Firenze.

Vygotskij, L.S.: 1987, *Il processo cognitivo*, Boringhieri, Torino.

Wartofsky, M.: 1979, Perception, representation and the forms of action: towards an historical epistemology, *Models. Representation and the scientific understanding*, Reidel, Dordrecht, 188-209.

Wittgenstein, L.: 1982, *Lezioni sui fondamenti della matematica*, Boringhieri, Torino.

Wittgenstein, L.: 1999, *Ricerche filosofiche*, Einaudi, Torino.