

## Logica e linguaggio nella pratica didattica: quantificatori esistenziali, funzioni e uso di software

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine

### I. Introduzione: un esempio dall'analisi matematica

Un esempio tratto dall'analisi ci consentirà di introdurre l'oggetto del presente lavoro. La tesi del teorema di Cauchy (*primo teorema del valor medio* o *teorema degli incrementi finiti*), riferita alle funzioni  $f, g$  che rispettino le note ipotesi di derivabilità ( $g'$  mai nulla) afferma:

$$\exists c \in ]a; b[ \quad \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Si osservi che se valgono le ipotesi del teorema di Cauchy, allora anche le ipotesi del teorema di Lagrange (*secondo teorema del valor medio*) sono rispettate sia dalla  $f$  che dalla  $g$ ; potremmo quindi applicare quest'ultimo teorema ad entrambe le funzioni e scrivere:

$$\exists c \in ]a; b[ \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{e} \quad \exists c \in ]a; b[ \quad g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$$

da cui, immaginando una (errata) “divisione membro a membro”, finiremmo per ottenere la tesi del teorema di Cauchy! Una “dimostrazione” costruita secondo questa osservazione non sarebbe accettabile (Prodi & Magenes, 1982): una scrittura didatticamente chiara di quanto ottenuto applicando *due distinte volte* il teorema di Lagrange potrebbe essere:

$$\exists c \in ]a; b[ \quad \left( f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) \quad \text{e} \quad \exists d \in ]a; b[ \quad \left( g'(d) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} \right)$$

con  $c$  e  $d$  non necessariamente uguali; e da ciò non può essere ottenuta la tesi del teorema di Cauchy, che afferma l'esistenza “di un  $c$  dell'intervallo  $]a; b[$  tale che...” (notiamo che una scrittura formale è corretta anche se una stessa variabile è quantificata due o più volte: ma si preferisce evitare tale situazione per chiarezza didattica: D'Amore & Plazzi, 1992, p. 1032).

In generale,  $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$  non porta a  $\exists x [A(x) \wedge B(x)]$ , cioè non implica che per qualche  $x$  siano verificate *contemporaneamente*  $A(x)$  e  $B(x)$ : indichiamo questo errore con il termine *scorretta doppia istanziazione*. Per le seguenti coppie di formule, nei primi due casi vale un'implicazione (nel primo, l'implicazione contraria a quella considerata) ma non l'altra:

$$\exists x A(x) \wedge \exists y B(y) \leftarrow \exists x [A(x) \wedge B(x)] \quad \forall x A(x) \vee \forall y B(y) \rightarrow \forall x [A(x) \vee B(x)]$$

Si ha invece l'equivalenza in questi casi:

$$\exists x A(x) \vee \exists y B(y) \leftrightarrow \exists x [A(x) \vee B(x)] \quad \forall x A(x) \wedge \forall y B(y) \leftrightarrow \forall x [A(x) \wedge B(x)]$$

## II. Altri esempi di scorretta doppia istanziazione

Didatticamente è utile esemplificare quanto presentato considerando due affermazioni (in apparenza) contraddittorie. Dato un predicato  $P$ ; al solito, la scrittura  $P(x)$  significa *x gode della proprietà P*; in tale caso, la  $\exists xP(x) \wedge \exists x\neg P(x)$  afferma che *esiste (almeno un) x per cui vale la proprietà P ed esiste (almeno un) x per cui non vale la proprietà P*. La presenza della congiunzione porta a chiedersi: il richiesto contemporaneo verificarsi di  $\exists xP(x)$  e di  $\exists x[\neg P(x)]$  è assurdo? È necessario che gli allievi si rendano conto che la risposta è *no*: l'esistenza di un elemento  $x$  per cui è  $P(x)$  e di un elemento  $x$  per cui è  $\neg P(x)$  non implica che tali  $x$  siano lo stesso elemento (a meno che a  $x$  non sia imposto di variare in un dominio costituito da un solo elemento). A tale conclusione si perviene anche ricordando il significato del quantificatore universale ed osservando che  $\exists x[\neg P(x)]$  equivale a  $\neg\forall xP(x)$ , non a  $\neg\exists xP(x)$ .

Un semplice esempio sarà efficace: sia  $x$  variabile nei numeri interi positivi e  $P(x)$  significhi *x è un numero pari*. In questo caso la formula data  $\exists xP(x) \wedge \exists x[\neg P(x)]$  significa *esiste (almeno) un intero positivo pari ed esiste (almeno) un intero positivo dispari*, affermazione vera (utilizzeremo anche questo esempio nella ricerca esposta nel presente lavoro). Si osservi che l'applicazione della *scorretta doppia istanziazione* nel caso dei teoremi di Lagrange e di Cauchy aveva portato, seppure in modo non accettabile, ad un risultato corretto (la tesi del teorema di Cauchy). L'ultimo esempio sarebbe invece da riferire ad una conclusione errata: se da  $\exists xP(x) \wedge \exists x[\neg P(x)]$  facessimo derivare  $\exists x[P(x)\wedge\neg P(x)]$  e quindi, istanziando per un qualche  $a$ ,  $P(a)\wedge[\neg P(a)]$ , dovremmo infatti ottenere un enunciato falso: abbiamo invece sopra visto che, se  $P(x)$  significa *x è un intero positivo pari*,  $\exists xP(x) \wedge \exists x[\neg P(x)]$  è vera.

Nella pratica didattica possiamo incontrare altri casi di *scorretta doppia istanziazione*; ad esempio, gli allievi sanno che, per qualsiasi funzione  $f$  di variabile reale,  $[f(x)]^2$  assume, in corrispondenza ad ogni  $x$  del dominio di  $f$ , valori non negativi; dunque affinché l'equazione  $[f(x)]^2+[g(x)]^2 = 0$  abbia soluzioni reali è necessario che entrambe le equazioni  $f(x) = 0$  e  $g(x) = 0$  abbiano soluzioni reali. Ma ciò *non è sufficiente*; l'implicazione seguente è errata:

$$\exists x \in \mathbf{R} (f(x) = 0) \wedge \exists x \in \mathbf{R} (g(x) = 0) \rightarrow \exists x \in \mathbf{R} ([f(x)]^2 + [g(x)]^2 = 0)$$

in quanto se esiste  $x$  tale che  $f(x) = 0$  ed esiste  $x$  tale che  $g(x) = 0$  non possiamo concludere che esiste uno stesso reale  $x$  tale che  $f(x) = 0$  e  $g(x) = 0$  e dunque  $[f(x)]^2+[g(x)]^2 = 0$ .

## III. Logica e simboli nella didattica della matematica

Gli esempi precedenti, aventi lo scopo di illustrare la *scorretta doppia istanziazione*, non sono i soli che possono essere ricordati per sottolineare l'importanza della corretta introduzione didattica di alcuni elementi della logica; proponiamo un ulteriore esempio.

Gli enunciati  $\neg(A\vee B)$  e  $(\neg A)\wedge(\neg B)$  hanno gli stessi valori di verità: questa osservazione (*legge di De Morgan*) consente di evidenziare che il corretto uso della simbologia usata in ambito didattico presuppone un'effettiva conoscenza delle relazioni tra i connettivi. Consideriamo ad esempio l'equazione:  $x^2 = 1$ ; le sue soluzioni si trovano spesso espresse compattamente nella forma:  $x = \pm 1$ , intendendo con ciò che la  $x$  può assumere sia il valore  $+1$  che il valore  $-1$ . Utilizzando i connettivi, la precedente scrittura può essere così espressa:

$$x = 1 \vee x = -1$$

Consideriamo ora la scrittura:  $x^2 \neq 1$  (anch'essa comune nella pratica didattica), che porta alla:  $x \neq \pm 1$ . In questo caso, a "±" non è legato il connettivo "∨"; dunque la precedente scrittura *non* deve essere tradotta nella:  $x \neq 1 \vee x \neq -1$ , in quanto questa richiederebbe il verificarsi di

almeno una delle condizioni  $x \neq 1$ ,  $x \neq -1$  (alla  $x$  potrebbe essere sostituito un qualsiasi reale!), mentre  $x \neq \pm 1$  richiede il *contemporaneo* verificarsi di tali condizioni. Ricordiamo che  $x^2 \neq 1$  deve essere interpretata come la negazione di  $x^2 = 1$ ; dunque corrisponde a:

$$\neg(x^2 = 1) \quad \text{cioè} \quad \neg(x = 1 \vee x = -1) \quad \text{e infine} \quad \neg(x = 1) \wedge \neg(x = -1)$$

*Agli allievi viene effettivamente chiarito il significato dei simboli sopra utilizzati?* Si noti inoltre che nel caso ora illustrato non si fa riferimento a situazioni particolarmente delicate: l'ambito è del tutto elementare, proprio della logica proposizionale.

La questione di una significativa presenza della logica nei curricoli della Scuola secondaria superiore è ampia e dibattuta (senza alcuna pretesa di completezza segnaliamo: Bernardi, 1987, 1989, 1998, 1993; Bonotto & Zanardo, 1990; Casarsa, 1991; D'Amore & Plazzi, 1992; Ferro, 1993; Marchini, 1993; Ciarrapico & Mundici, 1996; Mundici, 1997; Palladino, 1997; Paola, 1997; Bonotto & Ferronato, 2003; il numero 11-12 del volume 16 de *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate* è interamente dedicato alla logica). Per quanto riguarda i programmi, «la logica compare nei nuovi programmi di matematica a due livelli: come logica matematica e come logica nella matematica o per la matematica» (Paola, 1997, p. 149; la nota di A. Sgherri Costantini, in Ciarrapico & Mundici, 1996, pp. 135-141, analizza i collegamenti tra i programmi di matematica e di filosofia: Bonotto & Ferronato, 2003). Didatticamente, C. Bernardi nota che «la logica non può essere considerata come il primo o l'ultimo capitolo di un corso di matematica» e che i quantificatori sono «argomenti specifici» della logica (Bernardi, 1989, pp. 381 e 382); essi sono spesso introdotti presentando i simboli  $\exists$  e  $\forall$  (D. Paola indica la possibilità di collegare tale introduzione ad equazioni e disequazioni, anche parametriche: Paola, 1997, p. 151; D. Palladino ne suggerisce la trattazione nel II o nel III anno, pur sottolineando che «la semantica (tarskiana) della logica dei predicati è troppo astratta per poter essere sviluppata a livello di scuola secondaria e quindi bisogna far appello all'intuizione»: Palladino, 1997, p. 26); ma talvolta gli allievi non collegano i significati dei due quantificatori (com'è noto, il quantificatore esistenziale può essere introdotto a partire da quello universale e dall'operatore di negazione; analogamente per il quantificatore universale) e ciò può dipendere dalle caratteristiche dell'insegnamento. Lacune di questo genere possono tradursi in ostacoli di non trascurabile importanza (Villani, 1994).

#### IV. Un questionario in classe

Nella presente ricerca esamineremo alcune caratteristiche della qualità dell'apprendimento del quantificatore esistenziale: il riferimento sarà essenzialmente al problema della *scorretta doppia istanziazione*. Cercheremo di valutare la diffusione del problema in un campione di allievi (che precisiamo non essere rappresentativo di una popolazione più ampia, dunque da considerarsi alla stregua di un *case study*) mediante un questionario e faremo riferimento allo studio dettagliato del comportamento di un allievo.

Per precisare le caratteristiche della situazione ci poniamo alcune questioni; osserviamo innanzitutto che il fenomeno esaminato può fare riferimento ad una proprietà particolare, esplicitamente indicata, oppure ad una proprietà qualsiasi (espressa dal predicato P):

*Questione 1.* Il riferimento a proposizioni generali oppure ad esempi, anche tecnicamente impegnativi, influenza la frequenza di *scorretta doppia istanziazione* da parte degli allievi?

*Questione 2.* La considerazione di un caso tecnicamente molto semplice in qualità di controesempio induce negli allievi una riflessione critica sulla *scorretta doppia istanziazione*?

Inoltre: qual è il ruolo del livello di formalizzazione (Bernardi, 1998)? La proposizione considerata può essere espressa in registri simbolici o verbali, nel linguaggio naturale (per

quanto riguarda i registri rappresentativi, segnaliamo che una loro considerazione assoluta non può non essere considerata una semplificazione; non è possibile parlare di un *singolo* registro rappresentativo in termini assoluti: esistono diversi registri con riferimento a diverse istituzioni culturali o a diversi usi; inoltre ogni registro rappresentativo è implicitamente o esplicitamente collegato agli altri: nel registro verbale le parole sono sempre utilizzate con riferimento al loro significato, e tale significato è spesso collegato ad esperienze, ad esempio sensoriali, che si rifanno anche ad altri registri). Può essere plausibile un'influenza del registro utilizzato sulle difficoltà incontrate dagli allievi (Duval, 1993 e 1995; Bagni, 2001):

*Questione 3.* Per quanto riguarda il ruolo della formalizzazione simbolica, quali fra i registri simbolici e verbali si ricollegano ad una maggiore frequenza di *scorretta doppia istanziazione* da parte degli allievi?

La ricerca didattica prevista consisterà nella somministrazione successiva di tre test:

*Schede A.* Sarà proposta l'erronea "dimostrazione" del teorema di Cauchy ottenuta applicando due volte il teorema di Lagrange come nell'esempio illustrato nel precedente paragrafo. Tale scheda sarà preparata in due diverse versioni (ciascuna delle quali sarà fornita ad uno dei due gruppi di allievi, 1, 2, che saranno ottenuti dividendo a caso il campione): nella prima (A-1), non sarà utilizzato il simbolo "∃" (esso sarà sostituito da una corrispondente espressione del linguaggio naturale), nella seconda (A-2) tale simbolo sarà utilizzato.

*Schede B.* Per evidenziare un'eventuale influenza dell'ambito nel quale il primo esempio è stato espresso (alcuni allievi potrebbero trovare l'esempio di qualche difficoltà tecnica), sarà proposto un caso di *scorretta doppia istanziazione* riferito ad una situazione aritmetica elementare. Anche questa scheda sarà preparata in due versioni (ciascuna fornita al corrispondente gruppo 1 o 2 di allievi precedentemente ottenuti dividendo il campione): nella prima (B-1) non sarà utilizzato "∃", nella seconda (B-2) tale simbolo sarà utilizzato.

*Schede C.* Sarà infine proposta una *scorretta doppia istanziazione* riferita ad una proprietà "qualsiasi", indicando i predicati coinvolti solo con le lettere  $A(x)$ ,  $B(x)$ , ma senza precisarne il significato. Anche questa scheda sarà fornita in due versioni (ciascuna fornita al corrispondente gruppo 1 o 2 di allievi precedentemente individuati): nella prima (C-1) non sarà utilizzato "∃", nella seconda (C-2) tale simbolo sarà utilizzato.

Abbiamo coinvolto in una ricerca due classi quinte liceo scientifico (48 allievi di 18-19 anni, a Treviso) che avevano trattato le funzioni continue e derivabili, il teorema di Cauchy e il teorema di Lagrange (entrambe le dimostrazioni erano state condotte applicando il teorema di Rolle); dal punto di vista formale, gli allievi conoscevano il simbolo "∃" per "esiste (almeno) un", il simbolo "∀" per indicare "per ogni" (non era stata svolta una specifica introduzione dei quantificatori). Come anticipato, gli allievi sono stati suddivisi a caso in due gruppi (di 24 allievi ciascuno). A ciascun allievo del primo gruppo (1) abbiamo fornito la scheda:

*Scheda A-1*

Ricorda il teorema di Cauchy e il teorema di Lagrange:

$$\text{Cauchy Ip. } \left\{ \begin{array}{l} f \text{ continua in } [a;b] \\ f \text{ derivabile in } ]a;b[ \\ g \text{ continua in } [a;b] \\ g \text{ derivabile in } ]a;b[ \\ \text{per ogni } x \in ]a;b[, g'(x) \neq 0 \end{array} \right.$$

Tesi: esiste (almeno un)  $c \in ]a; b[$  tale che  $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

Lagrange Ip.  $\begin{cases} \varphi \text{ continua in } [a;b] \\ \varphi \text{ derivabile in } ]a;b[ \end{cases}$

Tesi: esiste (almeno un)  $c \in ]a; b[$  tale che  $\varphi'(c) = \frac{\varphi(b) - \varphi(a)}{b - a}$

Si osservi che se le ipotesi del teorema di Cauchy sono rispettate (con riferimento alle funzioni  $f, g$ ), tali sono anche ipotesi del teorema di Lagrange, sia dalla funzione  $f$  che dalla  $g$ ; potremo quindi applicare il teorema ad entrambe le  $f, g$  e scrivere:

esiste (almeno un)  $c \in ]a; b[$  tale che  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

esiste (almeno un)  $c \in ]a; b[$  tale che  $g'(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}$

da cui, dividendo membro a membro (cosa resa possibile dall'ultima delle ipotesi del teorema di Cauchy), otteniamo:

esiste (almeno un)  $c \in ]a; b[$  tale che  $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$

Questa è la tesi del teorema di Cauchy, che risulta così dimostrato.

La dimostrazione precedente è corretta? Giustifica la tua risposta.

A ciascun allievo del secondo gruppo (2) abbiamo fornito la scheda A-2, ottenuta sostituendo nella precedente scheda A-1 la scrittura "esiste (almeno un)  $c \in ]a; b[$ " con " $\exists c \in ]a; b[$ " e la scrittura "per ogni  $x \in ]a; b[$ " con " $\forall x \in ]a; b[$ ".

Tempo concesso (entrambi i gruppi): 10 minuti. Le percentuali sono arrotondate all'unità:

	Gruppo 1 (scheda A-1)		Gruppo 2 (scheda A-2)	
dimostrazione corretta	12 allievi	50%	10 allievi	42%
dimostrazione non corretta	5 allievi	21%	3 allievi	12%
nessuna risposta	7 allievi	29%	11 allievi	46%

Alcune giustificazioni fornite sono interessanti. Abbiamo verificato le motivazioni degli 8 allievi (5 del gruppo 1, 3 del gruppo 2) che hanno considerato non corretta la "dimostrazione". Solo un allievo (gruppo 1) ha indicato una giustificazione corretta:

«Possono esserci più  $c$  per cui vale Lagrange per le due funzioni e bisognerebbe che questi  $c$  siano gli stessi nei due casi» (in effetti non è necessario richiedere che *tutti* i punti individuati dall'applicazione del teorema nel primo caso coincidano con *tutti* i punti individuati nel secondo: ma l'allievo ha colto lo spirito della questione).

Alcuni allievi forniscono motivazioni errate, a volte (4 su 8 che hanno dichiarato di non accettare la "dimostrazione") collegate al fatto che, nel corso, il teorema di Cauchy era stato presentato prima del teorema di Lagrange: la dimostrazione del teorema di Lagrange non era però basata su quella del teorema di Cauchy (come accennato, entrambe le dimostrazioni erano state ottenute applicando il solo teorema di Rolle). Altri allievi, anche tra coloro i quali scelgono di accettare la "dimostrazione", non danno alcuna spiegazione; il consistente numero di allievi che non rispondono è indice della difficoltà con cui l'esercizio è stato affrontato.

Agli stessi allievi del primo gruppo (1) abbiamo quindi fornito la scheda seguente:

*Scheda B-1*

Sia  $x$  un numero intero positivo. Considera la proposizione:

Esiste (almeno un)  $x$  pari ed esiste (almeno un)  $x$  non pari

Tale proposizione è vera o falsa? Giustifica la tua risposta.

A ciascun allievo del secondo gruppo (2) abbiamo fornito la scheda seguente:

*Scheda B-2*

Sia  $x$  un numero intero positivo e sia  $P$  un predicato tale che  $P(x)$  significhi  $x$  è un numero pari. Considera la formula logica:

$$[\exists x P(x)] \wedge \{\exists x [\neg P(x)]\}$$

Essa è vera o falsa? Giustifica la tua risposta.

Tempo concesso (per entrambi i gruppi): 10 minuti.

	<i>Gruppo 1 (scheda B-1)</i>		<i>Gruppo 2 (scheda B-2)</i>	
vera	23 allievi	96%	17 allievi	71%
falsa	0 allievi	0%	6 allievi	25%
nessuna risposta	1 allievo	4%	1 allievo	4%

Alcune giustificazioni fornite dagli allievi sono significative: molti allievi del gruppo 2 che hanno ritenuto falsa la  $[\exists x P(x)] \wedge \{\exists x [\neg P(x)]\}$  hanno rilevato la presenza della congiunzione di  $\exists x P(x)$  e di  $\exists x [\neg P(x)]$  mostrando di confondere quest'ultima scrittura con  $\neg \exists x P(x)$ .

Agli stessi allievi del primo gruppo (1) abbiamo infine fornito la scheda seguente:

*Scheda C-1*

Considera la proposizione seguente:

se esiste (almeno un)  $x$  tale che sia  $A(x)$  ed esiste (almeno un)  $x$  tale che sia  $B(x)$ ,  
allora esiste (almeno un)  $x$  tale che risulti  $A(x)$  e  $B(x)$

Essa è vera o falsa? Giustifica la tua risposta.

A ciascun allievo del secondo gruppo (2) abbiamo infine fornito la scheda seguente:

*Scheda C-2*

Considera la proposizione seguente:

se:  $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ , allora:  $\exists x [A(x) \wedge B(x)]$

Essa è vera o falsa? Giustifica la tua risposta.

Tempo concesso (per entrambi i gruppi): 10 minuti.

	<i>Gruppo 1 (scheda C-1)</i>		<i>Gruppo 2 (scheda C-2)</i>	
vera	16 allievi	67%	21 allievi	88%
falsa	5 allievi	21%	1 allievo	4%
nessuna risposta	3 allievi	12%	2 allievi	8%

L'elevata percentuale di risposte errate, la cui gravità aumenta nel gruppo 2, indica che la situazione è ancora di difficile comprensione per gli allievi. Nel caso dell'uso di registri simbolici (scheda C-2) le giustificazioni fornite confermano che l'apprendimento è debole: molti richiamano la definizione di " $\wedge$ " e il solo allievo che dichiara falsa la proposizione proposta non fornisce alcuna giustificazione. Leggermente meno gravi sono i dati collegati alla scrittura non formalizzata (scheda C-1); solo un allievo (lo stesso che aveva correttamente inquadrato il problema nel caso dei teoremi di Cauchy e di Lagrange) fornisce una motivazione sostanzialmente corretta («Per A e per B gli  $x$  devono essere gli stessi»).

Dunque soltanto l'esempio aritmetico è stato ben gestito dalla maggioranza degli allievi: il fatto che la ripresa di un caso generale *dopo* la considerazione dell'esempio aritmetico (che avrebbe potuto servire da controesempio, stimolando una riflessione critica) non abbia dato risultati soddisfacenti ci induce a pensare che molti abbiano tratto le proprie conclusioni a proposito dell'esempio aritmetico sulla base della conoscenza delle proprietà elementari degli interi e non facendo riferimento alla struttura logica della proposizione. Per quanto riguarda il confronto delle situazioni riferite ai vari registri, osserviamo che all'uso di registri simbolici sembrano essere collegati ostacoli leggermente più rilevanti (ma le differenze sono esigue).

La ricerca è stata finora condotta considerando un campione non ampio e non selezionato sulla base di specifici criteri; inoltre le giustificazioni fornite dagli allievi sono state rilevate sulla base di dichiarazioni scritte e non confermate mediante interviste sistematiche. Per approfondire la conoscenza del fenomeno ci è sembrato interessante seguire dettagliatamente un singolo caso, al quale proporre alcune delle schede sopra utilizzate (A-2, B-2, C-2, dunque in cui sono in parte impiegati registri simbolici, ed infine C-1, in cui sono in parte impiegati registri verbali): abbiamo considerato un allievo che aveva da pochi mesi concluso il corso di studi della Scuola secondaria presso un Liceo scientifico ed era iscritto al I anno di un corso universitario ad indirizzo scientifico. L'esame di tale caso (che proporremo in un'ulteriore pubblicazione) ha confermato le principali indicazioni emerse dai risultati del questionario.

## V. Conclusioni

I risultati sperimentali ci portano a dare alcune risposte alle domande indicate all'inizio del presente lavoro (ricordiamo ancora che la ricerca è stata condotta con riferimento ad un campione ristretto e deve perciò essere considerata alla stregua di un *case study*). I risultati relativi alle schede A sembrano suggerire una prima conclusione:

*Risposta 1.* La considerazione di un esempio particolare (tecnicamente non del tutto semplice) può ostacolare l'allievo nella comprensione della struttura logica dell'argomentazione.

La plausibilità di ciò non deve trarci in inganno: sarebbe errato associare alla difficoltà tecnica dell'esempio un'influenza assolutamente decisiva sul comportamento degli allievi; infatti anche dopo avere proposto le schede B, i risultati relativi alle schede C sono stati deludenti:

*Risposta 2.* Neppure la considerazione di un caso tecnicamente molto semplice ha stimolato un'efficace riflessione critica a proposito della *scorretta doppia istanziazione*.

Con ciò non intendiamo negare l'importanza didattica e l'utilità dei controesempi: ma l'efficacia del loro impiego non è scontata; è necessario l'intervento dell'insegnante per realizzare l'istituzionalizzazione di quanto il controesempio può suggerire.

Per quanto riguarda il ruolo della formalizzazione e gli ostacoli ad essa connessi, il confronto tra i risultati del gruppo 1 e quelli del gruppo 2 induce a concludere:

*Risposta 3.* Un registro simbolico ostacola più di un registro verbale. L'uso ripetuto di uno stesso simbolo appare più vincolante rispetto all'indicazione ripetuta di uno stesso elemento nel linguaggio naturale.

Anche questa conclusione appare plausibile, ma non è banale: gli allievi sanno bene che la scrittura " $\exists x$ " significa "esiste (almeno un)  $x$ ", ma la comprensione di tale significato finisce per essere meno incisiva, nel caso della notazione simbolica: il linguaggio naturale sembra evocare in modo più esplicito conoscenze ed esperienze, colpisce più direttamente l'allievo. L'impiego di una scrittura simbolica (in logica, in algebra etc.) può essere inizialmente fonte di ostacoli: è noto che la corretta formalizzazione degli enunciati usualmente espressi nel linguaggio naturale può essere difficoltosa per non pochi allievi. La valenza didattica del passaggio dall'espressione nel linguaggio naturale a quella simbolica va ricercata in una maggiore chiarezza (spesso nel linguaggio naturale i quantificatori sono sottintesi o confusi) e nella possibilità di affrontare situazioni che non sarebbe possibile dominare con il linguaggio usuale (un sommario della letteratura sull'argomento è in: Bazzini & Iaderosa, 2000).

Concludiamo ribadendo la necessità di un'adeguata attenzione nei confronti della logica nei curricoli della scuola secondaria: limitare l'introduzione di argomenti importanti ad una questione di simbologia (una logica, dunque, ridotta ad essere «il primo o l'ultimo capitolo di un corso di matematica», citando nuovamente Bernardi, 1989, p. 381) è causa di incertezze pesanti, che possono tradursi in gravi ostacoli, soprattutto in caso di carente coordinazione dei registri rappresentativi. La presenza della logica non deve restare isolata, confinata in un capitolo (Bonotto & Ferronato, 2003), ma è necessario che allievi e insegnanti siano consapevoli che una corretta conoscenza delle istituzioni della logica influenza ogni fase dell'apprendimento. La ricerca didattica ha il compito di sottolineare il problema, di proporre sperimentazioni significative, di indicare dunque le soluzioni, sia in ambito curricolare che con riferimento alla formazione degli insegnanti (Ciarrapico & Mundici, 1996).

Gli allievi, dunque, devono poter apprendere con chiarezza ruoli e proprietà dei connettivi e dei simboli impiegati per la loro espressione: ulteriori ricerche potranno inoltre chiarire quale sia l'effettiva importanza della formalizzazione logica nella didattica. Ricordiamo la questione dell'espressione logicamente rigorosa affiancata ad un'espressione semanticamente fondata, ad esempio nelle dimostrazioni: W. P. Thurston, in un famoso articolo del 1994, si pone una domanda semplice ma dalle vaste implicazioni: «Come i matematici dimostrano i teoremi? » (Thurston, 1994, p. 161) e finisce con il sottolineare le grandi differenze tra come pensiamo la matematica e come la scriviamo (Thurston, 1994, p. 167). La didattica della matematica non può ignorare queste grandi differenze: «le dimostrazioni umanamente comprensibili ed umanamente verificabili che attualmente facciamo sono le cose più importanti per noi, e sono del tutto diverse dalle dimostrazioni formali» (Thurston, 1994, p. 169). Ancora una volta appare chiaro come sia pericoloso e controproducente forzare i nostri allievi ad usare simboli, ed in particolare simboli logici, senza la piena comprensione dei loro significati.

## **VI. Appendice: un esempio per qualche ulteriore domanda**

L'esempio di *scorretta doppia istanziazione* riferito ai teoremi di Lagrange e di Cauchy suggerisce alcune possibilità didattiche: una variazione di contesto (ad esempio, un ambito fisico) e di registri rappresentativi possono essere utili per superare l'errore. Consideriamo ad esempio un'interpretazione cinematica: sia  $t$  il tempo e siano  $s_P(t)$  e  $s_Q(t)$  gli spazi percorsi dai due punti materiali P, Q all'istante  $t$ , riferiti ad un sistema di ascisse; in tale caso, le derivate  $s'_P(t)$ ,  $s'_Q(t)$  sono le velocità di tali punti all'istante  $t$ . Siano rispettate le ipotesi del teorema di Cauchy; esso afferma che il rapporto tra gli spazi percorsi da P e da Q nell'intervallo  $[a; b]$  è uguale al rapporto delle velocità di A e di B in (almeno) uno stesso istante  $\tau$  tale che  $a < \tau < b$ .



Facciamo però inizialmente riferimento al teorema di Lagrange: esso afferma che, sia nel (primo) caso del punto A che nel (secondo) caso del punto B, esiste (almeno) un istante  $\kappa$ ,  $a < \kappa < b$  in cui la velocità  $s'(\kappa)$  è uguale alla velocità media calcolata nel tratto  $[a; b]$ . Tale valutazione va ripetuta *due volte*, una per ciascun punto materiale, e in generale porta a diversi valori di  $\kappa$  (che possiamo indicare, per chiarezza,  $\kappa_P$  e  $\kappa_Q$ ).

Ad esempio, consideriamo l'intervallo di tempo  $[0; 1]$  e le seguenti leggi di moto:

$$s_P(t) = t^2 + t \qquad s_Q(t) = t^3 + 2t$$

La verifica delle ipotesi del teorema di Cauchy è immediata. Le velocità sono rispettivamente:  $s_P'(t) = 2t+1$  e  $s_Q'(t) = 3t^2+2$ ; verifichiamo il teorema di Lagrange, con riferimento a  $s_P$  e  $s_Q$ :

$$2\kappa_P + 1 = s_P'(\kappa_P) = \frac{s_P(b) - s_P(a)}{b - a} = \frac{1^2 + 1}{1} = 2 \quad \text{da cui: } \kappa_P = \frac{1}{2} \quad (\kappa_P \text{ in } ]0; 1[)$$

$$3\kappa_Q^2 + 2 = s_Q'(\kappa_Q) = \frac{s_Q(b) - s_Q(a)}{b - a} = \frac{1^3 + 2 \cdot 1}{1} = 3 \quad \text{da cui: } \kappa_Q = \sqrt{\frac{1}{3}} > \frac{1}{2} \quad (\kappa_Q \text{ in } ]0; 1[)$$

Già queste due prime verifiche (che portano ai valori  $\kappa_P \neq \kappa_Q$ ) rendono improponibile una considerazione del teorema di Cauchy (a quale valore  $\tau$  dovremmo fare riferimento?).

Il registro rappresentativo visuale può essere molto utile per proporre una immediata verifica della situazione. I grafici delle due funzioni coinvolte possono essere facilmente ottenuti (anche mediante l'impiego di un software didattico) e ciò rende possibile un confronto diretto dei due punti la cui esistenza è prevista dal teorema di Lagrange. Se invece verifichiamo il teorema di Cauchy con riferimento alle funzioni  $s_P$  e  $s_Q$  otteniamo:

$$\frac{2\tau + 1}{3\tau^2 + 2} = \frac{s_P'(\tau)}{s_Q'(\tau)} = \frac{s_P(b) - s_P(a)}{s_Q(b) - s_Q(a)} = \frac{1^2 + 1}{1^3 + 2 \cdot 1} = \frac{2}{3}$$

da cui:

$$\tau = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \text{oppure} \quad \tau = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$$

entrambi accettabili in quanto inclusi in  $]0; 1[$ , peraltro (entrambi) diversi da  $\kappa_P$ ,  $\kappa_Q$ .

Può essere utile far notare che in qualche caso particolare  $\kappa_P$ ,  $\kappa_Q$  e  $\tau$  possono coincidere. Ad esempio, si può proporre l'esame in  $[0; 1]$  delle funzioni di secondo grado:  $s_P(t) = t^2 + t$  e  $s_Q(t) = 2t^2 + 3t$ . Si ricava direttamente:  $\kappa_P = \kappa_Q = 1/2$ , e, verificando il teorema di Cauchy:

$$\frac{2\tau + 1}{4\tau + 3} = \frac{s_P'(\tau)}{s_Q'(\tau)} = \frac{s_P(b) - s_P(a)}{s_Q(b) - s_Q(a)} = \frac{1^2 + 1}{2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1} = \frac{2}{5} \quad \text{da cui: } \tau = \frac{1}{2}$$

All'esempio ora proposto sono collegate questioni che affidiamo a ulteriori ricerche. Ci limitiamo a segnalare le seguenti: la visualizzazione della situazione (grafici delle funzioni) ad esempio mediante l'uso di un software didattico può determinare una minore incidenza della difficoltà tecnica di un esempio e dunque limitare la frequenza di fenomeni di *scorretta doppia istanziazione* (o di errori analoghi)? E quali collegamenti sono instaurati dall'allievo tra il controesempio considerato nel registro rappresentativo visuale (grafici e loro "lettura": il contesto fisico rende l'esempio più concreto) e la struttura logica della proposizione?

## VII. Riferimenti bibliografici

- Bagni, G.T. (2001), Apprendimento, risoluzione di problemi ed uso dei registri rappresentativi, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 24B, 4, 311-329.
- Bazzini, L. & Iaderosa, R. (2000), *Approccio all'Algebra*, Franco Angeli, Milano.
- Bernardi, C. (1987), La logica matematica: metodo e contenuti, *Atti XI Convegno Insegnamento della Matematica*, suppl. Notiziario UMI, 22-29.
- Bernardi, C. (1989), The teaching of Logic, Ferro, R.; Bonotto, C.; Valentini, S. & Zanardo, A. (Eds.), *Logic Colloquium '88*, North-Holland, Amsterdam, 381-383.
- Bernardi, C. (1993), La Logica nella Scuola Secondaria, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 16, 11-12, 1041-1060.
- Bernardi, C. (1998), How formal should a proof be in teaching of mathematics?, Félix, Y. (Ed.), *Logique dans l'enseignement des mathématiques*, Belgian Math. Society, Suppl. Vol. 5 n° 5, 7-18.
- Bonotto, C. & Ferronato, F. (2003), La logica nella scuola secondaria superiore: una proposta, *La matematica e la sua didattica*, in via di pubblicazione.
- Bonotto, C. & Zanardo, A. (1990), Linguaggi naturali e linguaggi artificiali. Procedimenti logici e linguaggio della matematica, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 13, 10 (1990), 955-974.
- Casarsa, F. (1991), L'albero del sì e del no. Quale logica nel Biennio? *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, 14, 6, 571-589.
- Ciarrapico, L. & Mundici, D. (Eds.) (1996), *L'insegnamento della Logica*, Ministero della Pubblica Istruzione, Direzione generale Istruzione Classica, Scientifica e Magistrale (testi tratti dai corsi AILA-MPI di Lecce, 1993, e di Otranto, 1994).
- Duval, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg.
- Duval, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, Paris.
- D'Amore, B. & Plazzi, P. (1992), La didattica della logica dei predicati, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, 15, 10, 1019-1039.
- Ferro, R. (1993), Iniziazione alla logica matematica, *Atti del XV Convegno Insegnamento della Matematica*, suppl. Notiziario UMI, 49-64.
- Lakoff, G. & Nuñez, R. (2000), *Where Mathematics come from? How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York.
- Marchini, C. (1993), L'insegnamento della Logica, *Notizie di Logica*, XII, 1-2, 22-27.
- Mundici, D. (1997), Logica e computer dai fondamenti alle applicazioni, *I temi "nuovi" nei programmi di matematica (probabilità, statistica, logica...) e il loro inserimento nel curriculum*, MPI, Quaderno 26/2, 111-123.
- Palladino, D. (1997), Logica, dimostrazioni e teorie matematiche, *I temi "nuovi" nei programmi di matematica (probabilità, statistica, logica...) e il loro inserimento nel curriculum*, MPI, Quaderno 26/2, 11-35.

- Paola, D. (1997), Elaborazione di un percorso di logica relativo all'intero quinquennio, *I temi "nuovi" nei programmi di matematica (probabilità, statistica, logica...) e il loro inserimento nel curriculum*, MPI, Quaderno 26/2, 149-153.
- Prodi, G. & Magenes, E. (1982), *Elementi di analisi matematica*, D'Anna, Messina-Firenze.
- Thurston, W.P. (1994), On Proof and Progress in Mathematics, *Bull. American Mathematical Society*, 30, 2, 161-177.
- Villani, V. (1994), Errori nei testi scolastici: calcolo numerico, logica, informatica, *Archimede*, XLVI, 3-18.