Master in Didattica delle Scienze – Università di Udine

Polinomi e derivata per una riflessione sulla visualizzazione

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine

I. Un concetto centrale dalla storia alla didattica della matematica

Il concetto di funzione è al centro di un capitolo fondamentale del curriculum della scuola secondaria: anche allievi giovani sono chiamati a considerare corrispondenze di elementi appartenenti ad insiemi diversi e la nozione di funzione si presenta spontaneamente a caratterizzare una delle più significative modalità di corrispondenza.

La storia del concetto di funzione si intreccia con quella dell'analisi, sebbene le versioni originali del Calcolo di Newton e di Leibniz (Castelnuovo, 1938) non facessero riferimento ad una funzione, ma al comportamento di *curve* e di *variabili*: la consapevolezza del ruolo della funzione emerse quando emerse evidente il rapporto tra le operazioni compiute sulla variabile indipendente e il conseguente comportamento della variabile dipendente; il termine «funzione» comparve per la prima volta nella letteratura matematica nel 1673, con il leibniziano *Methodus tangentium inversa seu de functionibus* (Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992, p. 314; l'opera citata è manoscritta; il termine «funzione» comparve in opere a stampa di Leibniz nel 1692 e nel 1694: Kline, 1972; Hairer & Wanner, 1996). Nell'iniziale concezione della funzione la questione della continuità non era direttamente considerata.

Il presente lavoro non intende ripercorrere le ricerche didattiche collegate alla funzione. Molti Autori hanno dedicato, non solo recentemente (ricordiamo: Dini, 1878; Peano, 1911), sforzi significativi all'analisi delle varie questioni collegate a tale concetto, alla sua definizione e alla sua rappresentazione (ad esempio: Vinner, 1992; Duval, 1993; Markovitz & Al., 1996; Slavit, 1997); la nostra ricerca è dedicata ad alcuni aspetti della pratica didattica.

II. Funzione e registri rappresentativi

L'introduzione della funzione è basata sull'uso esplicito di rappresentazioni semiotiche. Anche nelle prime occasioni di presentazione delle funzioni agli allievi viene fatto riferimento al diagramma cartesiano; le rappresentazioni sagittali sono spesso tra le prime modalità attraverso le quali una funzione viene visualizzata.

Notiamo inoltre che la presentazione didattica delle funzioni è a volte influenzata da usi non formalmente ineccepibili. Ad esempio, spesso con l'equazione $y = f(x)$ si indicano i punti del piano cartesiano aventi coordinate appartenenti all'insieme: $\{(x; y)\in D\times\mathbf{R}: y = f(x)\}$ ($D\subseteq\mathbf{R}$ è il dominio). Talvolta con $y = f(x)$ viene indicata la stessa funzione f, («*data la funzione* $y = f(x)$...») o il suo grafico («*data la curva* $y = f(x)$...»). Questi sono evidentemente *abusi di* *linguaggio*: una *funzione f* di dominio D a valori in **R** è una *relazione*, dunque un *sottoinsieme di* D×**R** (non è un'*equazione* né un *grafico*...); l'equazione $y = f(x)$ è necessaria solo per la rappresentazione grafica della *f*. Infine, il diagramma cartesiano di $y = f(x)$ (o della funzione *f*) è un *insieme di punti* legato a $\{(x; y)\in D\times\mathbf{R}: y = f(x)\}$ da una corrispondenza biunivoca.

L'indicazione di una funzione mediante $y = f(x)$, sebbene costituisca una pratica formalmente non del tutto ineccepibile, ha innegabili potenzialità didattiche (si pensi al procedimento per il ricavo dell'espressione della funzione inversa): scopo del presente lavoro non è l'abolizione di utili consuetudini didattiche, bensì il chiarimento di alcuni fenomeni ad esse collegati.

Il ricorso alla visualizzazione è spesso collegato intuitivamente alle funzioni *continue* e la stessa nozione di continuità viene fatta risalire a caratteristiche grafiche. Una funzione è detta *continua* in un punto del dominio quando ha il diagramma cartesiano che, in corrispondenza di tale punto, può essere tracciato *senza staccare la matita dal foglio* (anche nel manuale universitario Nikolskij, 1985, p. 88, è ricordata questa procedura; T.M. Apostol fa riferimento a «irregolarità» grafiche collegate alle funzioni discontinue: Apostol, 1977, p. 158).

III. Funzioni e continuità

Il fatto che la considerazione di una funzione sia spesso collegata al registro rappresentativo grafico non esclude l'uso di altri registri (come quello simbolico, particolarmente in ambito topologico) nell'espressione della continuità di un'applicazione.

Pur ritenendo primaria l'importanza della visualizzazione nella didattica delle funzioni, osserviamo che non sempre l'allievo sa adeguatamente svincolare il concetto di funzione dalla sua visualizzazione. Può ad esempio accadere che la considerazione di funzioni il cui grafico cartesiano non è disegnabile costituisca un ostacolo (Bagni, 1994). Inoltre, la consuetudine che l'allievo instaura con funzioni continue (aventi per grafico rette, parabole, curve logaritmiche etc.) può essere causa del consolidarsi dell'impressione secondo cui la discontinuità sia da considerare come un'eccezione: a volte l'allievo sembra direttamente associare al concetto di *«funzione»* il suo grafico e quindi una *«curva»* con le (consuete) caratteristiche di *«continuità»*, senza rendersi conto che una *funzione continua* dovrebbe invece essere considerata come un caso particolare di funzione generalmente intesa.

Per confermare quanto anticipato, riprendiamo i risultati di una ricerca sperimentale (Bagni, 1997a e 1998) mirante a evidenziare come la visualizzazione di una funzione mediante il proprio diagramma cartesiano possa, se non correttamente intesa, causare ostacoli per la stessa comprensione del concetto (Vinner, 1987; Tall, 1990).

Il test seguente è stato proposto agli allievi di tre classi di III Liceo scientifico, per un totale di 75 studenti (che avevano seguito un programma tradizionale; in particolare, avevano da poco tempo trattato il concetto di funzione e il piano cartesiano) ed agli allievi di tre classi di V Liceo scientifico, per un totale di 66 allievi (programma tradizionale: Bagni, 1997a e 1998).

Abbiamo fatto ricorso ad alcuni classici esempi dell'analisi (Van Rooj & Schikhof, 1982): la *funzione di Dirichlet* è la funzione $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ caratteristica dell'insieme dei reali irrazionali: $x\to\chi_{\mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}}(x)$ (alcuni preferiscono definirla in [0; 1]: Prodi, 1970, p. 308 o considerare l'insieme dei reali *razionali*): il suo grafico non può essere tracciato se non per un numero finito di punti. Anche per la funzione che indicheremo con R_4 e chiameremo *funzione di Gelbaum* (Gelbaum, 1961, p. 124; Gelbaum & Olmsted, 1979, pp. 34-35) è impossibile visualizzare con precisione l'andamento del diagramma cartesiano. Il test proposto agli allievi è il seguente:

Scheda A

Sono assegnate le seguenti relazioni tra numeri reali; per ciascuna di esse disegnare (se possibile) il grafico cartesiano e dire, giustificando la risposta, se si tratta di una funzione:

A1) R_1 è la relazione tra numeri reali che ad ogni $x \in \mathbf{R}$ associa il reale $2x$.

A2) R_2 è la relazione tra numeri reali che ad ogni $x \in \mathbf{R}$ associa il reale 1.

A3) R_3 è la relazione tra numeri reali che:

se il reale *x è razionale*, allora a x associa il reale 0;

se il reale *x è irrazionale*, allora a x associa il reale 1.

A4) R_4 è la relazione tra numeri reali che:

se il reale *x è razionale*, con $x = m/n$, essendo m intero, n intero positivo, in modo che la frazione m/n sia ridotta ai minimi termini, allora a x associa $1/n$;

se il reale *x è irrazionale*, allora a x associa il reale 0 ([3]).

Risultati - Allievi di 16-17 anni

	Grafico	Funzione	Non è funzione	Nessuna risposta
A1	69 (92%)	71 (95%)	1 (1%)	3 (4%)
A2	61 (81%)	54 (72%)	19 (25%)	2 (3%)
A3	0 (0%)	34 (46%)	31 (41%)	10 (13%)
A4	0 (0%)	21 (28%)	40 (53%)	14 (19%)

Risultati - Allievi di 18-19 anni

	Grafico	Funzione	Non è funzione	Nessuna risposta
A1	66 (100%)	65 (98%)	0 (0%)	1 (2%)
A2	65 (98%)	58 (88%)	5 (7%)	3 (5%)
A3	0 (0%)	39 (59%)	18 (27%)	9 (14%)
A4	0 (0%)	19 (29%)	22 (33%)	25 (38%)

Per quanto riguarda gli allievi più giovani, il grafico di $y = 2x$ (A1, una familiare retta, correttamente tracciata dal 92% degli studenti) è associato alla qualifica di funzione attribuita alla $x \to 2x$ (95%). Qualche allievo ha trovato difficoltà ad identificare come funzione la costante (A2, il diagramma è tracciato correttamente dall'81% degli allievi; solo il 72% identifica la corrispondenza come una funzione). L'incertezza aumenta per le funzioni di Dirichlet (A3) e di Gelbaum (A4), delle quali non è possibile tracciare il grafico.

Alcuni allievi hanno giustificato per iscritto le proprie scelte in base a considerazioni legate al concetto di funzione; in particolare, le incertezze relative ai quesiti 3 e 4 vengono molto spesso collegate all'*impossibilità di tracciare il grafico delle corrispondenze* proposte.

Un primo raffronto dei risultati relativi ai gruppi di allievi rivela che i due anni di studio che separano gli allievi di V Liceo scientifico da quelli di III non sembrano aver migliorato nettamente la comprensione per quanto riguarda le funzioni di Dirichlet e di Gelbaum: esse sono state infatti riconosciute come funzioni rispettivamente dal 59% (in III la percentuale era del 46%) e dal 29% (in III era del 28%) degli studenti di V. Una rilevante percentuale di allievi di V ha ancora tentato di interpretare la funzione di Dirichlet (A3) e della funzione di Gelbaum (A4) con riferimento ai loro grafici. In particolare, ben 15 studenti tra i 18 che non hanno considerato una funzione la funzione di Dirichlet e 16 studenti (spesso gli stessi) tra i 22 che non hanno considerato una funzione la funzione di Gelbaum hanno sottolineato, nelle motivazioni, l'*impossibilità di tracciare i rispettivi diagrammi cartesiani*.

Il concetto di funzione è dunque collegato al grafico: la didattica tradizionale, saldamente incentrata sulla visualizzazione di una funzione nel piano cartesiano, non agevola quindi l'affrancamento dell'allievo da tale pratica, importante ma non concettualmente esclusiva.

IV. Funzione, curva, dominio

Lo stretto collegamento, nella pratica didattica, tra funzione (intesa come corrispondenza tra gli elementi di due insiemi) e diagramma cartesiano (inteso dunque come curva) può portare a sottovalutare l'importanza di alcuni aspetti costitutivi dello stesso concetto di funzione; in particolare, può essere causa di malintesi relativi al ruolo del dominio. Anticipiamo infatti che se l'essenza della funzione viene ricondotta alla presenza stessa di una curva («concretamente disegnabile» nel piano cartesiano), può erroneamente apparire inutile la specificazione del dominio di tale funzione: la funzione f in questione «esiste» in corrispondenza delle ascisse x per cui la curva grafico di $y = f(x)$ risulta «tracciata» (o «tracciabile»).

Uno degli esercizi didatticamente più diffusi è la *determinazione del dominio* di una data funzione (Bagni, 1997b). Allo studente viene spesso proposta una funzione f: $D \to \mathbf{R}$ ($D \subseteq \mathbf{R}$) rappresentata (unicamente) da un'espressione nella variabile x, dunque da una: $x \to f(x)$. Successivamente l'allievo è chiamato a determinare l'insieme D, inteso come il più vasto insieme costituito dai reali x tali che $f(x)$ sia «calcolabile come numero reale», detto *dominio* (si vedano le considerazioni critiche in: Bacciotti & Beccari, 1988; Villani, 1986).

Consideriamo ad esempio la funzione $x \to f(x)$ proposta nella prova di matematica dell'esame di Maturità scientifica 1989 in Italia (sessione ordinaria), espressa da: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ (il dominio non è indicato nella traccia). Se cerchiamo un $D \subseteq \mathbf{R}$ affinché il denominatore sia non nullo e la radice sia reale, siamo tenuti ad imporre la condizione: $x>1$. Esaminiamo però un problema: a $x = 0$ (considerato come numero complesso) corrisponderebbe $f(0) = \frac{0}{\sqrt{0-1}} = \frac{0}{i}$ $= 0$ (gli studenti liceali dovrebbero sapere bene che lo 0 complesso diviso per un complesso non nullo dà come quoziente lo 0 complesso). La situazione può allora risultare delicata: abbiamo visto che $f(0) = 0$ (e l'allievo potrebbe chiedersi: ci si riferisce allo zero in **R** oppure allo zero in **C**?); ciò potrebbe indurre a considerare 0 come appartenente al dominio di f; ma per eseguire il calcolo di $f(0)$ è necessario considerare lo 0 come elemento di **C** ed estrarre quindi (sempre operando in **C**) la radice quadrata di -1: e ciò porta a *non* considerare 0 come appartenente al dominio di f. In situazioni come questa sarebbe consigliabile precisare a priori il dominio in cui è definita la funzione in questione, al fine di evitare ambiguità.

La funzione ricordata è stata utilizzata per rilevare le opinioni di alcuni studenti. Un'analisi sperimentale del comportamento degli allievi è stata condotta (Bagni, 1997b) esaminando 75 studenti, provenienti da: una classe III Liceo scientifico (allievi di 16-17 anni), per un totale di 26 studenti; una classe IV Liceo scientifico (allievi di 17-18 anni), per un totale di 24 studenti; una classe V Liceo scientifico (allievi di 18-19 anni), per un totale di 25 studenti. In tutte le tre classi era stato svolto, al momento del test, un programma tradizionale; gli allievi conoscevano i numeri complessi (introdotti nella classe II) e le operazioni con essi nonché i concetti di funzione e di dominio di una funzione (introdotti nella classe I e ripresi all'inizio della III). A ciascuno studente è stata inizialmente consegnata la scheda seguente:

Scheda B

Indica il dominio della funzione $x \to f(x)$ espressa da: $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$

Agli studenti sono stati concessi 5 minuti per dare una risposta. Quindi le schede B sono state ritirate; ogni allievo che ha dato una risposta diversa da $\{x\in\mathbf{R}: x>1\}$ è stato intervistato; ad ogni allievo che ha risposto $\{x\in\mathbf{R}: x>1\}$ è stata invece fornita la scheda seguente:

Scheda C

Considera la seguente scrittura: $\dfrac{0}{\sqrt{0-1}} = \dfrac{0}{i} = 0$. È vera o è falsa?

Agli studenti sono stati concessi 5 minuti per dare una risposta. Quindi le schede C sono state ritirate ed è stata fornita a ciascun allievo che ha compilato la scheda C la scheda seguente:

Scheda D

Confronta quanto hai scritto nelle schede A, B. Dopo avere risposto alla domanda della scheda B, daresti la stessa risposta alla domanda della scheda A? Perché?

Ad ogni allievo sono state mostrate le proprie schede B, C, con l'invito a non intervenire più su di esse. Per rispondere sono stati concessi 5 minuti.

Risultati - Scheda B

Classi (età)	III (16-17 a.)	IV (17-18 a.)	V (18-19 a.)	Totale
$\{x\in\mathbf{R}: x>1\}$	18	20	23	61 (81%)
$\{x\in\mathbf{R}: x\geq 1\}$	4	3	2	9 (12%)
$\{x\in\mathbf{R}: x\neq 1\}$	2	1	0	3 (4%)
$\{x\in\mathbf{R}: x>0\}$	2	0	0	2 (3%)

Le schede C e D sono state fornite a 61 allievi (coloro i quali hanno risposto $\{x\in\mathbf{R}: x>1\}$ alla domanda della scheda B). Nei risultati seguenti, le percentuali sono riferite agli allievi che hanno effettivamente compilato le schede C e D.

Risultati - Scheda C

Classi (età)	III (16-17)	IV (17-18)	V (18-19)	Totale
Vera	11	10	16	37 (61%)
Falsa	7	10	7	24 (39%)

Risultati - Scheda D

Classi (età)	III (16-17)	IV (17-18)	V (18-19)	Totale
Confermo	12	13	16	41 (67%)
Non confermo	4	7	5	16 (26%)
Incerti	2	0	2	4 (7%)

Gli allievi sono dunque mediamente preparati ad affrontare esercizi del tipo «Determina il dominio della funzione...». La percentuale di coloro che hanno risposto $\{x\in\mathbf{R}: x>1\}$ (81%) è abbastanza elevata. Ma la questione riguardante la verità o la falsità di $\frac{0}{\sqrt{0-1}} = \frac{0}{i} = 0$ si conferma interessante: gli studenti sembrano suddividersi in due gruppi, entrambi consistenti, e il 39% degli allievi (i quali, lo ricordiamo, hanno già trattato i numeri complessi e le operazioni con essi) afferma che tale scrittura è falsa. Anche le risposte date alla domanda della scheda D confermano la presenza di perplessità: alcuni allievi (il 26%) ritengono di dover cambiare la risposta relativa al dominio della funzione $x \to \frac{x}{\sqrt{x-1}}$.

Gli studenti sono stati intervistati e hanno fornito alcune spiegazioni. Un primo gruppo di interviste ha visto come protagonisti gli allievi che, alla domanda della scheda B, non hanno risposto $\{x\in\mathbf{R}: x>1\}$: è emerso che tali risposte sono state causate da sviste (ad esempio, chi ha risposto $\{x\in\mathbf{R}: x\geq 1\}$ ha ammesso di aver considerato la radice ma non il denominatore). Un secondo gruppo di interviste ha visto come protagonisti gli allievi che hanno compilato tutte le schede A, B, C, D e molti degli intervistati hanno manifestato incertezza, nonostante abbiano infine optato, nelle risposte, per una posizione abbastanza netta.

Dunque l'esercizio tradizionale del tipo «determina il dominio della funzione...» può essere causa di perplessità negli allievi. Molti di essi incontrano difficoltà interpretative: che cosa significa «determinare il dominio» di una funzione f? Si deve forse trovare il più vasto sottoinsieme di $\mathbf{R}$ costituito da x tali che $f(x)$ sia reale? Ma perché *il più vasto*? E che significa, praticamente, «tale che $f(x)$ sia reale»? Significa che $f(x)$ deve essere un numero *complesso con parte immaginaria nulla*? O significa che $f(x)$, oltre ad essere un complesso con parte immaginaria nulla, deve essere calcolabile *senza impiegare, nei calcoli, complessi con parte immaginaria non nulla*? E qual è il collegamento tra il dominio e il diagramma cartesiano? Non vogliamo affermare che a tali domande non possano essere date risposte sensate e coerenti: ma tali risposte, sulle quali si basano le «regole del gioco» per la risoluzione dell'esercizio, dovrebbero essere esplicitamente dichiarate agli allievi.

Inoltre il *contratto didattico* influenza il comportamento degli allievi: l'abitudine ad operare nel piano cartesiano (in corrispondenza biunivoca con $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$), dunque ad escludere il ricorso a quantità immaginarie, porta gli allievi (che peraltro hanno conosciuto nei propri studi il corpo complesso) a bloccarsi di fronte all'apparire di un complesso con parte immaginaria non nulla. Ciò avviene, a volte, anche a costo di provocare un'incoerenza tra due risposte date.

V. Funzioni e operazioni analitiche: l'integrale indefinito

Al concetto di funzione (e alla sua visualizzazione) si possono collegare alcune considerazioni didattiche relative all'integrazione. Nella scuola secondaria il simbolo $\int f(x)dx$ è usualmente introdotto per indicare la soluzione (l'insieme delle soluzioni) dell'equazione differenziale $y'(x) = f(x)$. L'impiego didattico di tale simbolo, detto «integrale indefinito», è però talvolta ambiguo: infatti esso è interpretato dagli allievi a volte con riferimento ad un insieme di funzioni, a volte con riferimento ad una funzione «singola» la cui dipendenza da un parametro può costituire un ostacolo.

La gestione di $\int f(x)dx$ come soluzione di $y'(x) = f(x)$ può dunque creare qualche difficoltà agli studenti; e i problemi aumentano quando l'integrazione è ripetuta, ovvero quando si considerano equazioni differenziali ad esempio del tipo $y''(x) = f(x)$.

Dal punto di vista metodologico, ci riferiamo a due classi V Liceo scientifico (totale 49 allievi di 18-19 anni); fino al momento del test, gli allievi avevano svolto un programma tradizionale di analisi. Ciascuna classe è stata suddivisa a caso in due gruppi approssimativamente equinumerosi, E e F. Ad ogni allievo dei gruppi E è stata consegnata la seguente scheda E:

Scheda E

$f''(x) = x$ $\qquad$ $f(x) = \ldots\ldots\ldots$

Ad ogni allievo dei gruppi F è stata consegnata la seguente scheda F:

Scheda F

$g'(x) = ax+b$ $\qquad$ $g(x) = \ldots\ldots\ldots$

Tempo concesso: 5 minuti (abbiamo dunque voluto che gli allievi esaminassero la situazione «a colpo d'occhio»). Non è stato permesso l'uso di calcolatrici, di manuali o di appunti.

Risultati - Scheda E (25 allievi)	allievi	percentuale
$f(x) = x^3/6+c_1x+c_2$	5	20%
$f(x) = x^3/6+c$	11	44%
$f(x) = x^3/6$	4	16%
altre risposte o nessuna risposta	5	20%

La modesta difficoltà dell'integrale non influenza il risultato; nel test di controllo i risultati sono positivi (anche se permane la tendenza a «dimenticare» la costante additiva):

Risultati - Scheda F (24 allievi)	allievi	percentuale
$g(x) = ax^2/2+bx+c$	15	63%
$g(x) = ax^2/2+bx$	8	33%
altre risposte o nessuna risposta	1	4%

Dopo il test, gli allievi sono stati intervistati. La maggioranza degli allievi che, nella scheda A, hanno optato per la risposta $f(x) = x^3/6+c$ afferma di avere indicato la costante solo alla fine del procedimento, come usualmente fatto nella risoluzione degli esercizi di integrazione. L'aggiunta della costante additiva è dunque considerata un'operazione da eseguire «per regola», ma evidentemente molti allievi non ne hanno compreso appieno il significato.

Interessante è il commento seguente, che fa riferimento al diagramma cartesiano:

> «Ma la soluzione qual è? Che curva dobbiamo prendere? Con una costante alla fine la curva ha la sua forma, al massimo si sposta, ma con due?» (Marco).

Notiamo infatti che in $f(x) = x^3/6+c_1x+c_2$ è possibile scegliere c_1, c_2 in modo da ottenere curve con «forme» diverse; ad esempio, i valori $c_1 = -1$, $c_2 = 0$ portano a: $y = x^3/6$ (il cui grafico è sempre crescente), mentre $c_1 = c_2 = 0$ portano a $y = x^3/6-x$ (con grafico *non* sempre crescente). Tale diversità è percepita come disorientante: non si tratta più di una (singola) curva con «la sua forma», che «al massimo si sposta», come nel caso, familiare, di una sola integrazione; ora le «curve» ottenibili sono diverse! Dunque «che curva dobbiamo prendere?»

Naturalmente il test precedente non è sufficiente per trarre conclusioni definitive o generali. La nostra indagine deve essere interpretata soltanto come lo studio di un caso: il campione esaminato non è infatti numeroso e non è stato individuato mediante particolari tecniche di campionamento. Possiamo comunque avanzare alcune indicazioni che potranno essere testate anche sperimentalmente in ulteriori ricerche: ad esempio, a nostro avviso, potrebbe essere opportuno evitare di abusare della nozione e del simbolo tradizionale di «integrale indefinito» e quindi di rivalutare il riferimento didattico diretto all'equazione differenziale.

VI. Conclusioni

Abbiamo constatato che una totale, acritica identificazione tra la *funzione* (corrispondenza tra gli elementi di due insiemi) ed il suo *diagramma cartesiano* (curva mediante la quale viene rappresentata tale corrispondenza) può essere causa di malintesi e di forzature, soprattutto con riferimento a funzioni il cui grafico è rappresentabile con difficoltà; abbiamo notato come la primaria o addirittura l'esclusiva considerazione assegnata ad una rappresentazione visuale porti talvolta a sottovalutare gravemente l'importanza di alcuni elementi che dovrebbero costituire parte integrante della stessa definizione di una funzione (pensiamo all'indicazione del dominio); abbiamo infine messo in evidenza come la diretta considerazione dell'aspetto grafico possa essere fonte di perplessità nell'apprendimento della nozione di integrale.

A nostro avviso, alla difficoltà di coordinamento dei registri rappresentativi possono essere ricondotte molte difficoltà degli allievi. Per garantire un pieno apprendimento non è infatti sufficiente che ci sia uno sviluppo di ogni singolo registro, ma è indispensabile un buon coordinamento dei diversi registri di cui il soggetto dispone (Duval, 1995b, p. 259; Duval, 1995a; D'Amore, 1999). Compito dell'insegnante è mantenere l'indipendenza dei ruoli da assegnare all'oggetto matematico e alle sue rappresentazioni semiotiche: nell'interazione *Significato-Significante* il significato genera il significante, ma il significante a sua volta genera nuovamente il significato, ogni volta che un segno viene interpretato (Thom, 1974, p. 233). Tale processo è duplice: limitare la didattica della matematica alla produzione di rappresentazioni semiotiche porterebbe alla forzatura di alcuni aspetti del concetto astratto a scapito di altri.

VII. Riferimenti bibliografici

Apostol, T.M. (1977), *Calcolo*, I, Boringhieri, Torino.

Bacciotti, A. & Beccari, G. (1988), Problemi didattici nel corsi universitari: l'introduzione del concetto di funzione, *Archimede*, XL, 41-49.

Bagni, G.T. (1994), Continuità e discontinuità nella didattica dell'Analisi matematica: Piochi, B. (Ed.), *Atti del IV Incontro dei Nuclei di Ricerca Didattica nella Scuola Superiore*, IRRSAE Toscana, Siena.

Bagni, G.T. (1995), Sul compito di matematica dell'esame di maturità scientifica 1995, *La matematica e la sua didattica*, 4, 520-521.

Bagni, G.T. (1997a), La visualizzazione nella scuola secondaria superiore, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 20B, 4, 309-335.

Bagni, G.T. (1997b), Dominio di una funzione, numeri reali e numeri complessi. Esercizi standard e contratto didattico nella scuola secondaria superiore, *La matematica e la sua didattica*, 3, 306-319.

Bagni, G.T. (1998), Visualization and didactics of mathematics in High School: an experimental research, *Scientia Paedagogica Experimentalis*, XXXV, 1, 161-180.

Bottazzini, U.; Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L. (1992), *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.

Castelnuovo, G. (1938), *Le origini del calcolo infinitesimale*, Zanichelli, Bologna (ristampa: Feltrinelli, Milano 1962).

D'Amore, B. (1999), *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora, Bologna.

Dini, U. (1878), *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabile reale*, Nistri, Pisa (ristampa: UMI, Firenze 1990).

Duval, R. (1993), Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg.

Duval, R. (1995a), *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, Paris.

Duval, R. (1995b), Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques?, *Actes de l'École d'ètè* (traduzione italiana: *La matematica e la sua didattica*, 3, 1996, 250-269).

Gelbaum, B.R. & Olmsted, J.M.H. (1979), *Controesempi in Analisi matematica*, Mursia, Milano.

Gelbaum, B.R. (1961), *Advanced calculus*, Appleton-Century-Crofts, New York.

Gelbaum, B.R. (1962), *The real number system*, Appleton-Century Crofts, New York.

Hairer, E. & Wanner, G. (1996), *Analysis by its History*, Springer-Verlag, New York.

Kline, M. (1972), *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York.

Markovitz, Z.; Eylon, B. & Bruckheimer, N. (1986), Functions today and yesterday, *For the learning of mathematics*, 6 (2), 18-24.

Nikolskij, S.M. (1985), *Corso di Analisi matematica*, I, Mir, Mosca.

Peano, G. (1911), Sulla definizione di funzione, *Rendiconti della R. Acc. dei Lincei*, 3-5.

Prodi, G. (1970), *Analisi matematica*, Boringhieri, Torino.

Slavit, D. (1997), An alternate route to reification of function, *Educational Studies in Mathematics* 33, 259-281.

Tall, D. (1990), Inconsistencies in the learning of Calculus and Analysis, *Focus on Learning Problems in Mahematics*, 12, 49-64.

Thom, R. (1974), *Modèles mathématiques de la morphogenèse*, Uge, Paris.

Van Rooj, A.C.M. & Schikhof, W.H. (1982), *Second course on real functions*, Cambridge University Press, Cambridge.

Villani, V. (1986), Notazioni e convenzioni in matematica, *Archimede*, XXXVIII, 67-70.

Vinner, S. (1987), Continuous functions-images and reasoning in College students, *PME 11*, II, Montreal, 177-183.

Vinner, S. (1992), Function concept as prototype for problems in mathematics: Harel, G. & Dubinsky, E. (Eds.), *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, 25, 195-213.