Artefatti, strumenti e didattica della matematica

Appunti per il Corso Master Educazione Scientifica, a.a. 2006-2007
a cura di Giorgio T. Bagni, Dip. di Matematica e Informatica, Univ. di Udine, bagni@dimi.uniud.it

1. Alcune considerazioni teoriche: Dewey, Vygotskij

La storia della filosofia ricorda che la posizione greca era per molti versi apertamente critica a proposito della conoscenza ottenibile attraverso l'esperienza. Nota però **John Dewey (1859-1952)** che, per quanto possiamo leggere in Platone e in Aristotele, l'esperienza greca somiglia a quello che, per gli psicologi moderni, è il metodo di apprendimento "per tentativi ed errori" (Dewey, 2002, p. 84). L'antica posizione ellenica a proposito della conoscenza ottenuta mediante l'esperienza non deve quindi essere considerata alla stregua di una condanna inappellabile. Se addirittura si considera, prosegue Dewey, l'innegabile importanza dell'interazione tra organismo e ambiente, ad esempio per realizzare quell'adattamento che consente al primo di utilizzare il secondo, si è portati ad ammettere che il legame tra conoscenza ed esperienza è vitale: per alcuni versi la conoscenza potrebbe addirittura essere relegata a una posizione secondaria per origine (Dewey, 2002, pp. 89 e 95). Possiamo dunque concludere affermando che la conoscenza scientifica o, in generale, quello che noi chiamiamo "ragione", non viene ad essere "calata dall'alto" sull'esperienza. È invece suggerita e verificata dall'esperienza e viene continuamente impiegata per allargare e arricchire l'esperienza stessa (si veda inoltre: Feyerabend, 1996, p. 155).

Didatticamente importante, a questo proposito, è **la distinzione tra concetto "spontaneo" e concetto "scientifico" indicata da Lev Semënovič Vygotskij (1896-1934)**, il quale nota che la prima comparsa di un concetto spontaneo è spesso legata a un'interazione del bambino con un oggetto, mentre la nascita del concetto scientifico avviene attraverso una relazione mediata. Nel primo caso, dunque, il bambino passa dall'oggetto al concetto, mentre nel secondo percorre la strada inversa (Vygotskij, 1990, p. 286). I concetti scientifici si distinguono dai concetti spontanei per un diverso rapporto con l'esperienza, ovvero per un diverso rapporto del bambino con il loro oggetto e con gli altri concetti (Vygotskij, 1990, p. 218). Ma da ciò segue forse che i concetti "scientifici" siano da classificare del tutto astratti, svincolati dall'esperienza? Chiaramente no.

È comunque necessario ribadire che, in generale, non appare possibile riferirsi a un "singolo concetto", in quanto la natura stessa di un concetto implica l'esistenza di **un sistema, una rete organica di concetti al di fuori della quale uno di essi perderebbe il proprio senso** (Vygotskij, 1990, p. 295). La presenza di questo "sistema" è didatticamente importante; l'apprendimento della matematica, in particolare, è relativo a concetti che possono essere diversi (e anche piuttosto lontani) da quelli dell'esperienza quotidiana. Lo stesso Vygotskij sottolinea che l'elemento centrale è proprio l'esistenza o l'assenza di un sistema: prescindendo da esso i soli legami possibili per i concetti sarebbero quelli stabiliti tra gli oggetti concreti, mentre insieme con il sistema compaiono le relazioni dei concetti con i concetti, la relazione dei concetti agli oggetti mediata attraverso la loro relazione con altri concetti: nei concetti diventano possibili i legami sovra-empirici (Vygotskij 1990, pp. 310 e 311).

Ciò ovviamente non significa che la formazione dei concetti scientifici possa essere svincolata dall'esperienza: lo stesso linguaggio nasce dall'interazione tra l'individuo e l'ambiente (senza con ciò trascurare lo sfondo sociale). Ad esempio, i concetti quotidiani collegati alla rotondità possono essere inizialmente riferiti all'esperienza che il bambino ha di un oggetto rotondo: una palla è in grado di rotolare e può dunque essere spostata più agevolmente rispetto a quanto non accada nel caso di una scatola, ovvero di un oggetto poliedrico. I concetti matematici di sfera e di poliedro, sviluppati dal bambino solo successivamente, richiedono comunque la presenza di un sistema, di un collegamento con altri concetti: consentono di instaurare (consapevolmente) i citati legami sovra-empirici (Bagni, 2006-a e 2006-b).

Il ruolo almeno iniziale dell'esperienza è dunque centrale, ma il punto essenziale è che tale ruolo si mantiene, per molti versi, anche nello sviluppo dei concetti scientifici veri e propri: il fatto che ad un allievo sia stato "scientificamente" presentato il concetto matematico di sfera non implica che tale concetto non debba continuare a essere riferito (anche, e non secondariamente) alla vecchia palla. Quest'ultimo legame è ovviamente difficile da sradicare (e torniamo col pensiero alla sopra rilevata difficoltà di rimpiazzare completamente uno schema: Fischbein & Baltsan, 1999): mentre, come osservato, il riferimento del concetto matematico all'oggetto richiede in generale la mediazione degli altri concetti di un sistema, il riferimento del concetto quotidiano, spontaneo all'oggetto è diretto e immediato (cioè non mediato: Vygotskij, 1990, p. 314).

Del resto **il pensiero verbale non esaurisce né tutte le forme di pensiero** (né tutte le forme del linguaggio): bisogna tener conto anche del **"pensiero strumentale"**, di tutta l'area indicata con il termine "intelligenza pratica" (Vygotskij, 1990, p. 118). Non è certo difficile, sulla base della nostra esperienza didattica quotidiana, rendersi conto che i bambini risolvono i problemi pratici con l'aiuto del linguaggio ma anche con quello degli occhi e delle mani (Vygotskij, 1987, p. 26; inoltre: Radford, 2002 e 2003; Lakoff & Núñez, 2005). Dunque, osserva Jerome Bruner (2005, p. 90), per Vygotskij, come per Dewey, il linguaggio (*qualsiasi* tipo di linguaggio) è un modo per gestire i propri pensieri riguardanti la realtà e il pensiero è un modo di organizzare le percezioni e le azioni.

2. Didattica e artefatti

Le considerazioni generali che abbiamo presentato possono essere applicate in ambito didattico e per questo è necessario indicare un quadro teorico di riferimento (ci collegheremo sull'impostazione sviluppata in: Bartolini Bussi, Mariotti & Ferri, 2005, basata oltre che sui lavori di Vygotskij, 1974 e 1987, su Wartofsky, 1979, ed Engestroem, 1990). Oltre a ribadire che Vygotskij riconosce le funzioni di mediazione sia agli strumenti tecnici (Chabert, 1998; Bartolini Bussi & Maschietto, 2006) che a quelli psicologici, i segni ovvero "strumenti di mediazione semiotica" (si veda: Ricoeur, 1994, p. 180; una visione organica applicata alla didattica della geometria è proposta in: Mariotti, 2005), notiamo più in particolare che Marx Wartofsky (1928-1997) identifica:

- **gli strumenti tecnici come *artefatti primari*. È importante però rilevare che non c'è un unico modo di utilizzare uno strumento;**
- **dunque dobbiamo considerare gli *artefatti secondari* che servono per fissare e trasmettere le modalità di azione;**
- **una teoria matematica è un *artefatto terziario* che organizza gli artefatti secondari.**

Approfondiamo la situazione tenendo ben presente le constatazioni sopra presentate seguendo Vygotskij; ci riferiremo ora brevemente a un semplice esempio, basato sull'uso di uno dei più diffusi strumenti della pratica matematica: il compasso (si veda: Bagni, 2006-a, pp. 226-228).

Fin dai tempi più antichi l'uomo avrà individuato una figura "interessante" (un cerchio) ad esempio nella sezione di un tronco d'albero: un cilindro è in grado di rotolare facilmente, e il riferimento all'esperienza si conferma dunque centrale. Dopo millenni di storia della cultura umana, i nostri allievi, nelle nostre aule scolastiche, sono chiamati a tracciare una circonferenza: per fare ciò è possibile usare il compasso o, ad esempio, un meno nobile bicchiere. Possiamo domandarci: che differenza c'è tra l'uso del compasso e l'uso del bicchiere?

Ogni insegnante avrà osservato che alcuni bambini preferiscono ricorrere a quest'ultimo artefatto, piuttosto che al compasso: il bicchiere (o una qualsiasi altra sagoma circolare) è più facile da utilizzare, non si buca il foglio, si può usare la penna. Ci sono però altre differenze rilevanti: con un bicchiere si può tracciare una sola circonferenza (della quale peraltro non si identifica facilmente il centro); il compasso è dunque uno strumento più generale. La principale differenza tra i due modi di procedere, e tra i due strumenti da utilizzare, è così riassumibile:

- **il compasso “incorpora” la definizione euclidea di circonferenza (Bartolini Bussi & Boni, 2003),**
- **mentre accarezzando il bordo rotondo di un bicchiere possiamo al massimo percepire una curvatura “regolare”: il bicchiere, insomma, incorpora soltanto quella che si può definire, in un approccio elementare, come una caratteristica (Chassapis, 1999).**

Usando il compasso si impone alla punta di grafite di marcare i punti che hanno una distanza fissa da quello in cui è conficcato l’ago d’acciaio, e di questa particolarità l’operatore può rendersi conto abbastanza facilmente; usando il bicchiere, invece, si impone alla punta di grafite di seguire un percorso che altri (i costruttori del bicchiere) hanno stabilito. Non c’è alcuna sicurezza del risultato, a priori: il bicchiere potrebbe avere una sezione ellittica o leggermente irregolare e il disegnatore potrebbe non essersi accorto di ciò. Nel caso del compasso, la connessione tra la caratteristica da riprodurre e l’operatore appare più diretta, esplicita. Wittgenstein (2002, § I-6.4, p. 27) afferma che «un attrezzo è anche la riproduzione del suo scopo»; possiamo dunque dire che il compasso riproduce lo scopo “tracciare una circonferenza” in modo più chiaro e fondato di quanto non possa farlo un bicchiere (che ha peraltro, in generale, altre funzioni).

Secondo Raymond Duval (1993, p. 38) «la distinzione tra un oggetto e la sua rappresentazione» è fondamentale. La questione è quindi: dobbiamo concludere che l’oggetto matematico “esiste” indipendentemente dalle sue rappresentazioni? E possiamo aggiungere: indipendente dalle pratiche per ottenere tali rappresentazioni? Esiste una “realtà matematica” assoluta in quanto libera dai vincoli dell’espressione e dell’applicazione? Si chiede, non senza una punta di ironia, Gabriele Lolli (2002, p. 105): ma dove si trova, dove sta nascosta la realtà quando non è presente agli occhi? Se, ad esempio, esistesse da qualche parte un platonico “cerchio in sé”, invisibile se non rappresentato, il nostro (unico?) compito in qualità di insegnanti di matematica potrebbe essere quello di portare i nostri allievi “il più vicino possibile” ad esso mediante rappresentazioni accurate, magari addestrandoli a tracciare circonferenze con precisione (usando compassi, bicchieri o qualsiasi altro dispositivo: Bagni, 2005-a e 2005-b). Non ci sembra una prospettiva molto interessante.

Ma l’impostazione potrebbe anche essere del tutto diversa: perché non supporre, ad esempio, una radicale rivalutazione del ruolo dello strumento? Che accadrebbe, insomma, se a fianco ovvero al posto di questo perfetto, ideale “cerchio in sé” esistesse anche (o solamente)… il compasso?

Il compasso è uno strumento tecnico o, come si dice, un artefatto primario; ma non basta averlo in mano per disegnare un cerchio: si potrebbe usare un tale strumento, ad esempio, per scrivere, come se fosse una semplice matita, oppure in altri modi non particolarmente significativi dal punto di vista matematico. Insomma, si potrebbe usare lo strumento “in modo sbagliato”, cioè in modo non significativo. Per utilizzare uno strumento correttamente è necessario conoscere le regole, far proprie le “istruzioni per l’uso” (e, magari, darsi di esse una giustificazione): queste regole costituiscono un artefatto secondario. **La presenza di un artefatto secondario è chiaramente indispensabile perché l’artefatto primario possa funzionare “bene”, dunque “esistere” come artefatto e, in particolare, come *strumento***: nell’approccio strumentale di Pierre Rabardel (1995), per poter considerare un artefatto alla stregua di un vero e proprio “strumento” è necessaria infatti un’attività costruttiva da parte del soggetto, attività che dipende da vari aspetti sia concettuali che sociali (Bartolini Bussi, 1996).

Quindi accanto all’ideale “cerchio in sé”, forse addirittura al suo posto, può davvero essere collocato il compasso, corredato dalle relative istruzioni per l’uso: e, naturalmente, un operatore che decida di compiere le azioni necessarie seguendo le “regole” (per Wittgenstein il concetto di regola non può essere svincolato dall’idea di un utente che applichi le regole, nota Bouveresse, 1997, p. 66: Wittgenstein, 1990, § 33, p. 35). **In questo senso l’enfasi posta sullo strumento viene ad essere una scelta che sottolinea, in ultima analisi, la centralità del ruolo dell’operatore**, della persona che costruisce i propri concetti sulla base dell’eredità di un sapere che non deriva da una magari fortunosa scoperta, bensì dalle riflessioni, dalle costruzioni, dall’attività consapevole e volontaria di altre persone (Boero & Garuti, 1994).

Riferimenti bibliografici

Bagni, G.T.: 2005-a, 'Numeri e algoritmi con carta e matita'. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate* 28A-B, 6, 596-610.

Bagni, G.T.: 2005-b, 'The historical roots of the limit notion. Cognitive development and development of representation registers'. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education* 5, 4, 453-468.

Bagni, G.T.: 2006-a, *Linguaggio, storia e didattica della matematica*. Pitagora, Bologna.

Bagni, G.T.: 2006-b, 'Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory'. *Educational Studies in Mathematics* 62, 3, 259-280.

Bartolini Bussi, M.G.: 1996, 'Mathematical discussion and perspective drawing in primary school'. *Educational Studies in Mathematics* 31, 11-41.

Bartolini Bussi, M.G. & Boni, F.: 2003, 'Instruments for semiotic mediation in primary school classrooms'. *For the Learning of Mathematics* 23, 2, 12-19.

Bartolini Bussi, M.G., Mariotti, M.A. & Ferri, F.: 2005, 'Semiotic mediation in primary school: Dürer's glass'. In: Hoffmann, M.H.G., Lenhard, J. & Seeger, F. (a cura di), *Activity and sign. Grounding mathematics education. Festschrift for Michael Otte*. Springer, New York, 77-90.

Bartolini Bussi, M.G. & Maschietto, M.: 2006, *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*. Collana Convergenze. Springer-Italia, Milano.

Boero, P. & Garuti, R.: 1994, 'Approaching rational geometry: from physical relationships to conditional statements'. In: Ponte, J.P. & Matos, J.F. (a cura di), *Proceedings of PME-18*. Lisboa, 2, 96-103.

Bouveresse, J.: 1997, *Filosofia, mitologia e pseudo-scienza. Wittgenstein lettore di Freud*. Einaudi, Torino (*Philosophie, mythologie et pseudo-science. Wittgenstein lecteur de Freud*. Éditions de l'éclat, Combas 1991).

Bruner, J.: 2005, *La mente a più dimensioni*. Laterza, Roma-Bari (*Actual minds, possibile worlds*. Harvard University Press, Cambridge-London 1986).

Chabert, J.-L. (a cura di): 1998, *A history of algorithms. From the pebble to the microchip*. Springer, Berlin-Heidelberg (*Histoire d'algorithmes. Du caillou à la puce*. Belin, Paris 1994).

Chassapis, D.: 1999, 'The mediation of tools in the development of formal mathematical concepts: the compass and the circle as an example'. *Educational Studies in Mathematics* 3, 275-293.

Dewey, J.: 2002, *Rifare la filosofia*. Donzelli, Roma (*Reconstruction in philosophy*. Beacon, Boston 1920).

Duval, R.: 1993, 'Registres de représentation sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée'. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.* ULP, IREM Strasbourg, 5, 37-65.

Engestroem, Y.: 1990, 'When is a tool? Multiple meanings of artifacts in human activity'. *Learning, working and imagining: twelwe studies in activity theory*, Orienta-Konsultit Oy, Helsinki, 171-195.

Feyerabend, P.K.: 1996, *Ambiguità e armonia*. Laterza, Roma-Bari.

Fischbein, E., & Baltsan, M.: 1999, 'The mathematical concept of set and the "collection" model'. *Educational Studies in Mathematics* 37, 1-22.

Lakoff, G. & Núñez, R.: 2005, *Da dove viene la matematica. Come la mente embodied dà origine alla matematica*. Bollati Boringhieri, Torino (*Where mathematics come from? How the embodied mind brings mathematics into being*. Basic Books, New York 2000).

Lolli, G.: 2002, *Filosofia della matematica*. Il Mulino, Bologna.

Mariotti, M.A.: 2005, *La geometria in classe. Riflessioni sull'insegnamento e apprendimento della geometria*. Pitagora, Bologna.

Rabardel, P.: 1995, *Les hommes et les technologies: approche cognitive des instruments contemporains*. Colin, Paris.

Radford, L.: 2002, 'The object of representations: between wisdom and certainty'. In: Hitt, F. (a cura di), *Representations and Mathematics Visualization*. Cinvestav-IPN, Mexico, 219-240.

Radford, L.: 2003, 'On culture and mind. A post-vygotskian semiotic perspective, with an example from Greek mathematical thought'. In: Anderson, M. & Al. (a cura di), *Educational perspectives on mathematics as semiosis*. Legas, Ottawa, 49-79.

Ricoeur, P.: 1994, *Filosofia e linguaggio*. Guerini, Milano.

Vygotskij, L.S.: 1974, *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori e altri scritti*. Giunti, Firenze (*Istorija razvitija vyssih psihiceskih funktcij*, Accademia delle Scienze Pedagogiche della RSFSR, Moskva 1960; testo ultimato nel 1931).

Vygotskij, L.S.: 1987, *Il processo cognitivo*. Boringhieri, Torino (*Mind in society. The development of higher psychological processes*. Harvard University Press, Cambridge, London 1978).

Vygotskij, L.S.: 1990, *Pensiero e linguaggio. Ricerche psicologiche*. Laterza, Roma-Bari (*Myšlenie i rec'. Psichologiceskie issledovanja*. Gosudarstvennoe Social'no-Ekonomiceskoe Izdatel'stvo, Moskva-Leningrad 1934).

Wartofsky, M.: 1979, 'Perception, representation and the forms of action: towards an historical epistemology'. In: *Models. Representation and the scientific understanding*. Reidel, Dordrecht, 188-209.

Wittgenstein, L.: 1990, *Grammatica filosofica*. La Nuova Italia, Firenze (*Philosophische Grammatik*. Blackwell, Oxford 1969).