Master in didattica delle Scienze Udine 2007

Il principio di induzione

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Spesso alcuni ragionamenti si presentano in forma iterativa…

- Un professore avvisa i propri allievi: "un giorno della settimana prossima darò un compito in classe a sorpresa, **in modo che nessuno di voi possa in alcun modo capire in anticipo il giorno da me scelto".**
- Da lunedì al sabato tutti i giorni sono a rischio!
- **Tuttavia…**
- È possibile che il temuto compito venga dato **sabato?**
- **No,** perché se si giungesse a venerdì senza aver fatto il compito tutti capirebbero che la giornata prescelta dall'insegnante era, appunto, quella di sabato.

Spesso alcuni ragionamenti si presentano in forma iterativa…

~~lunedì~~ ~~martedì~~ ~~mercoledì~~ ~~giovedì~~ ~~venerdì~~ ~~sabato~~

- Sabato, quindi, niente compito in classe.
- Ripetiamo però il ragionamento: una volta escluso il sabato, l'ultimo giorno possibile sarebbe **venerdì.** E se si arrivasse a giovedì senza aver fatto il compito si capirebbe che il giorno prescelto era proprio venerdì!
- **Dunque niente compito venerdì.**
- E procedendo così…

Spesso alcuni ragionamenti si presentano in forma iterativa…

- Un uso "disinvolto" dell'iterazione può portare a risultati sorprendenti, come ben capirebbe il nostro insegnante, impossibilitato a mantenere un atteggiamento coerente.
- Ci occuperemo del **principio di induzione,** uno dei più eleganti argomenti della matematica elementare.
- Introduciamo le nostre riflessioni con alcune considerazioni sulle inferenze.

Inferenza: tre forme fondamentali
La deduzione

- Nel 1878 **C.S. Peirce** (1834-1914) illustrò i tre tipi di inferenza con un celebre esempio: disponiamo di un sacco con l'etichetta "Fagioli bianchi". Ciò significa tale sacco contiene soltanto fagioli bianchi (*regola*): se estraessimo una manciata di fagioli dal sacco (*caso*), constateremmo che sarebbero tutti bianchi (*risultato*).
- Questa struttura è detta **deduzione**.

Regola **Tutti i fagioli in questo sacco sono bianchi**
Caso **Questi fagioli provengono da questo sacco**
⇩
Risultato **Questi fagioli sono bianchi**

Induzione

- La deduzione non "aumenta la conoscenza", ma tiene conto delle conseguenze della situazione determinata da regola e caso.
- Illustriamo l'**induzione**: non conosciamo il contenuto del sacco (non c'è etichetta); per scoprirlo estraiamo una manciata del contenuto (*caso*) e notiamo che si tratta di fagioli bianchi (*risultato*). Questo ci fa supporre che il sacco contenga soltanto fagioli bianchi (*regola*). La regola generalizza il caso sperimentale, ma non siamo certi della sua validità:

Caso **Questi fagioli provengono da questo sacco**
Risultato **Questi fagioli sono bianchi**
⇩
Regola **Tutti i fagioli di questo sacco sono bianchi (?)**

Dall'induzione all'abduzione

- Per aumentare l'affidabilità di quanto supposto possiamo ripetere l'operazione: ogni volta che estraiamo una nuova manciata di fagioli bianchi aumenta il grado di affidabilità della supposizione fatta, ma non potremmo essere sicuri della sua validità finché non avremo controllato tutti i fagioli del sacco.
- Esaminiamo infine il caso dell'**abduzione**: vediamo una manciata di fagioli bianchi (non ne conosciamo la provenienza) su di un tavolo (*risultato*) e, accanto, un sacco con l'etichetta "Fagioli bianchi" (*regola*).
- Supponiamo allora che i fagioli sul tavolo provengano proprio da quel sacco, ossia che costituiscano un *caso* di questa regola.

Abduzione

- La struttura logica è la seguente:

Risultato **Questi fagioli sono bianchi**

Regola **Tutti i fagioli di questo sacco sono bianchi**

⇩

Caso **Questi fagioli provengono da questo sacco (?)**

- L'abduzione è ovviamente rischiosa in quanto il risultato (i fagioli bianchi sul tavolo) potrebbe essere un caso della regola che conosciamo…
- …ma potrebbe anche essere un caso di **altre regole** (ad esempio i fagioli potrebbero essere stati collocati sul tavolo da qualcuno per qualche altro motivo, ma non provenire dal sacco).

Inferenza e congetture

- L'induzione ora considerata non va riferita al **principio di induzione matematica**: esso, utilizzato da secoli in varie forme, nel 1861 fu posto tra i fondamenti dell'aritmetica da Robert Grassmann (1815-1901); nel 1889 Giuseppe Peano (1858-1932) lo inserì come III assioma del proprio sistema. Può così esprimersi:
- "Se *s* è una classe contenente lo zero e, per ogni *a*, se *a* appartiene a *s*, il successivo di *a* appartiene a *s*; allora ogni numero naturale appartiene a *s*".
- Con il termine *dimostrazione per induzione* intendiamo oggi una particolare tecnica dimostrativa basata sul principio ricordato.

Inferenza e congetture

- Nel passato l'induzione "incompleta" (cioè quella basata soltanto sulla generalizzazione di uno o più casi particolari) era considerata una tecnica dimostrativa accettabile, mentre consente solo la formulazione (peraltro importante!) di **congetture**.
- **L'applicazione in matematica dell'induzione incompleta può essere causa di errori**. Ad esempio, per i naturali n, con $0<n<20$, almeno uno dei numeri $6n\pm1$ è primo…
- … ma la generalizzazione di questa iniziale regolarità sarebbe errata!
- Infatti per $n = 20$ entrambi i numeri $6\cdot20\pm1$ sono composti ($119 = 7\cdot17$ e $121 = 11\cdot11$).

Formalizziamo il principio di induzione in N

- Sia F(x) una proprietà tale che:

(a) F(0)

(b) $\forall x\in\mathbf{N}\ (F(x) \Rightarrow F(x'))$ (x' indica il successore di x)

allora: $\forall x\ F(x)$.

- **Altra formulazione (insiemistica) del principio:**
- Sia A un sottoinsieme di **N** tale che:

(a) $0\in A$

(b) $\forall x\ (x\in A \Rightarrow x'\in A)$

allora: $A = \mathbf{N}$.

Formalizziamo il principio di induzione in N

Il principio di induzione è:

- un **assioma** (schema di assiomi) dell'Aritmetica di Giuseppe Peano (1858-1932).
- un **teorema** nell'ambito della teoria assiomatica degli insiemi.

Applichiamo il principio di induzione

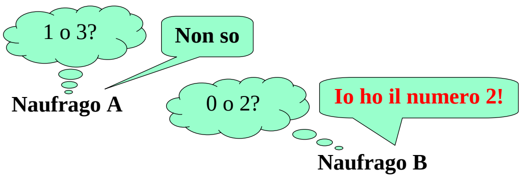
- Due naufraghi vengono catturati dai cannibali. Il capo tribù concede loro una possibilità: scrive sulla fronte di ognuno di essi un numero naturale in modo che i due numeri siano consecutivi.
- Ciascuno **vede il numero del compagno ma non il proprio**. Se uno dei due riuscirà a stabilire il numero che ha sulla propria fronte, entrambi saranno liberati.
- Il capo chiede alternativamente ai due: quale numero hai sulla fronte? Dopo alcune risposte “non so” (che sono consentite), uno dice il numero esatto. **Come fa?**

Risolviamo il problema dei due naufraghi

- A è interpellato per primo e vede il numero di B, n. Quindi A avrà il numero $n-1$ o $n+1$.
- **Se n = 0, A risponderà subito 1.**
- Altrimenti A risponderà “non so”: **B saprà che $n \neq 0$.**
- Iterando il ragionamento, ad ogni turno i naufraghi sapranno che il proprio numero non appartiene all’insieme costituito dai primi numeri naturali (insieme progressivamente sempre più ampio).
- **Contando le risposte “non so”** fino ad eliminare l’alternativa più piccola (tra $n-1$ e $n+1$) si potrà dedurre il proprio numero.

Illustriamo con un esempio il problema dei due naufraghi

Esempio (semplice!): A = 1, B = 2



- (numeri possibili per B : ~~0~~, 1, 2 …)
- **Per valori più grandi basta iterare il procedimento.**

Un principio equivalente al principio di induzione

- **“Principio di induzione completa”**
- Per dimostrare che $n \in A$ si assume come ipotesi induttiva non solo che $n-1 \in A$, ma anche che **tutti gli $m<n$** appartengano ad A (A sottoinsieme di **N**).
- **Se dal fatto che tutti i minori di n appartengano ad A segue che n appartiene ad A, allora A = N.**
- $\forall n\, [\forall m\, (m<n \Rightarrow m \in A) \Rightarrow n \in A] \Rightarrow \forall n\, (n \in A)$
- È superfluo porre esplicitamente $0 \in A$

  (non ci sono naturali minori di 0; tutti i naturali minori di 0 appartengono ad A e quindi: $0 \in A$).

Altri due principi equivalenti al principio di induzione

- **“Principio del minimo numero”**

  Sia $A \subseteq \mathbf{N}$. Allora:

  $\exists x\, (x \in A) \Rightarrow \exists m\, (m \in A \wedge \forall x\, (x \in A \Rightarrow x \geq m))$

  Ogni sottoinsieme non vuoto A di **N** ha un minimo m.
- **“Principio della discesa infinita”**

  $\forall n\, (n \in A \Rightarrow \exists m\, (m<n \wedge m \in A)) \Rightarrow \neg \exists n\, (n \in A)$

  Per dimostrare che A è vuoto si suppone per assurdo che $n \in A$; basta allora provare che ad A appartiene anche un $m<n$: iterando il procedimento troveremmo un sottoinsieme non vuoto di **N** privo di minimo.

Legame tra i principi enunciati

- L’implicazione che esprime il principio del minimo numero è la **contronominale** dell’implicazione che esprime il principio della discesa infinita.
- Data $P \Rightarrow Q$, la contronominale è: $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
- Partiamo dal **“principio della discesa infinita”**:

  $\forall n\, (n \in A \Rightarrow \exists m\, (m<n \wedge m \in A)) \Rightarrow \neg \exists n\, (n \in A)$
- Costruiamo la contronominale (variando le lettere):

  $\neg\neg \exists n\, (n \in A) \Rightarrow \neg \forall n\, (n \in A \Rightarrow \exists m\, (m<n \wedge m \in A))$

  $\exists n\, (n \in A) \Rightarrow \exists n\, \neg (n \in A \Rightarrow \exists m\, (m<n \wedge m \in A))$

  $\exists n\, (n \in A) \Rightarrow \exists m\, (m \in A \wedge \neg \exists m\, (m<n \wedge m \in A))$
- $\exists x\, (x \in A) \Rightarrow \exists m\, (m \in A \wedge \forall x\, (x \in A \Rightarrow x \geq m))$

  che è il **“principio del minimo numero”**.

Il teorema fondamentale dell’Aritmetica

- Ogni naturale maggiore di 1 si scompone nel prodotto di (uno o più) fattori primi **in uno ed un solo modo**.
- *Dimostrazione dell’**esistenza**.*
- Sia per assurdo n non scomponibile in fattori primi, n (che non può essere primo) è $b \cdot c$, con $b>1$, $c>1$.
- Se sia b che c sono scomponibili in fattori primi si ottiene una scomposizione in fattori per n, assurdo.
- Se uno tra b, c non è scomponibile in fattori primi avremmo trovato un numero minore di n appartenente all’insieme dei numeri non scomponibili. Per il **principio della discesa infinita** tale insieme è vuoto.

Il teorema fondamentale dell’Aritmetica

- *Dimostrazione dell’**unicità**.*
- Sia per assurdo n scomponibile in fattori primi in due modi diversi: $n = abc\ldots = xyz\ldots$ (con fattori primi disposti in ordine non decrescente).
- Se $a = x$, il numero $m<n$ è scomponibile in fattori primi in due modi diversi: $m = bc\ldots = yz\ldots$
- Se $a<x$, il numero $m = abc\ldots–ayz\ldots = xyz\ldots–ayz\ldots$ è positivo e minore di n ed è scomponibile in due modi diversi (a compare in una sola scomposizione).
- Per il **principio della discesa infinita** l’insieme dei numeri scomponibili in fattori primi in due modi diversi è vuoto. ■

Per concludere…

- Il logico **R. Smullyan** promette la vita eterna agli studenti che seguono il suo corso, a due condizioni:
- che si impegnino a **non dire mai bugie**.
- che dicano: **“Io domani ripeterò questa frase”.**
- Indichiamo con l’indice naturale $n = 0$ il giorno “oggi”. Con F(n) indichiamo che lo studente dice nel giorno n la frase “Io domani ripeterò questa frase”.
- Dunque: F(0) (la frase viene pronunciata oggi);
- $\forall x \in \mathbf{N}\ (F(x) \Rightarrow F(x'))$ (se x è “oggi”, x' è “domani”) allora (visto l’impegno a non dire bugie): $\forall x\ \mathbf{F(x)}$.
- E… **per pronunciare una frase bisogna essere *vivi!***

Grazie a Claudio Bernardi
(Università di Roma “La Sapienza”)

Per risorse, materiali e bibliografia si veda: www.syllogismos.it