Giornate Diffusione della Cultura 2007
Udine, 23 marzo 2007 – Master Didattica Scienze

Matematica, storia e geografia: tra numeri e quadrati magici

Giorgio T. Bagni
Facoltà di Scienze della Formazione
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Sommario
Dalla Storia alla Matematica

- **Questioni teoriche**: matematica e storia: una presenza e molte questioni
- **Primo esempio.** Un'assenza significativa: la matematica a Roma
- **Secondo esempio.** In Cina nel VI secolo a.C.: tra numeri e "quadrati magici"
- **Terzo esempio.** Dalle dita ai bastoncini: le "bacchette da calcolo"
- **Quarto esempio.** L'algebra cinese: i sistemi di equazioni
- Verso una **conclusione** "aperta"

La Matematica e la sua storia: una presenza e molte questioni

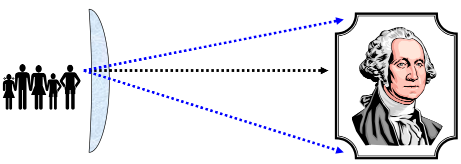
- Questioni fondamentali:
- è corretto concepire la storia come un percorso che, attraverso tentativi e rivisitazioni critiche, porti **alla sistemazione moderna**?
- Possiamo cioè riferire l'intera evoluzione storica della Matematica alle nostre attuali concezioni?
- Quale ruolo va attribuito ai **fattori culturali e sociali**?
- Le fasi che consideriamo come momenti di passaggio verso la formazione della Matematica "compiuta" (la nostra), costituivano **la Matematica "compiuta" dell'epoca, in base a concezioni culturali precise**.

Le moderne concezioni del passato

- Qualsiasi"sforzo di rinunciare alle nostre conoscenze nel tentativo di vedere l'evento storico nella sua purezza non avrebbe successo: **siamo condannati a portarci dietro le nostre moderne concezioni del passato**" (L. Radford, 1997).
- Ma se siamo obbligati a guardare il passato attraverso **una lente non del tutto trasparente**, non ci resta che scegliere tra le due opzioni: o rinunciare ad osservare il passato, per non snaturarlo…
- …oppure **accettare la presenza di tale lente** e le distorsioni che introduce, tenendo presente che attraverso essa poniamo in contatto **due culture "diverse ma non incommensurabili"** (P. Boero, L. Radford, C. Vasco, 2000).

Lente e "punto di vista": l'importante è mettere a fuoco… ma che cosa?

- Attraverso la nostra lente noi possiamo cercare di comprendere (di interpretare, di valutare) **direttamente il fatto storico.**



- Dobbiamo comprendere **l'ambiente socio-culturale nel quale si inquadra il fatto storico.**

Sommario
Dalla Storia alla Matematica

- **Questioni teoriche**: matematica e storia: una presenza e molte questioni
- **Primo esempio.** Un'assenza significativa: la matematica a Roma
- **Secondo esempio.** In Cina nel VI secolo a.C.: tra numeri e "quadrati magici"
- **Terzo esempio.** Dalle dita ai bastoncini: le "bacchette da calcolo"
- **Quarto esempio.** L'algebra cinese: i sistemi di equazioni
- Verso una **conclusione** "aperta"

Un esempio di influenza del contesto: quale Matematica nella Roma antica?

- È anche necessario considerare il contesto socio-culturale del periodo in cui certi saggi sono stati scritti!

- Leggiamo il **Sommario** della voce *Matematica* redatta per l'edizione 1934 dell'*Enciclopedia Italiana* (volume XXII, p. 547) da **F. Enriques** (1871-1946, Direttore della sezione Matematica dell'*Enciclopedia* dal 1925 al 1937, allontanato dall'insegnamento universitario nel 1938 in seguito alle leggi razziali).

Un esempio di influenza del contesto: quale Matematica nella Roma antica?

- *Storia*. 1. La Matematica come scienza razionale
  2. Matematiche preelleniche
  3. Sviluppo delle Matematiche presso i Greci
  4. Le opere classiche
  5. Sviluppi ulteriori e decadenza nel periodo ellenistico
  6. **Trasmissione attraverso i Romani**
  7. Alto Medioevo
  etc.
- Si parla di **"Trasmissione attraverso i Romani"**: dunque ai Romani va riconosciuto un ruolo attivo e in qualche modo positivo nei confronti della Matematica?

Un esempio di influenza del contesto: quale Matematica nella Roma antica?

- Enriques, con riferimento al periodo ellenistico scrive:
- "Gli ultimi secoli videro una decadenza dell'intelletto matematico e anche un ritorno alla mistica dei numeri, massimamente sviluppata dai neopitagorici e dai neoplatonici (…). A queste circostanze si deve che il nome generico *matematici* venga a designare una classe di cabalisti, indovini o magi, **oggetto di dispregio, di terrore e di persecuzioni**" (p. 548).
- Poche righe dopo, l'Autore onestamente riconosce:
- "**I Romani non hanno mai avuto interesse speculativo per le Matematiche**".

"Nemo Chrystianorum presbyter non mathematicus" (Volpisco, *Saturnali*)

- "La nuova stirpe dominatrice si mostrò **del tutto priva dell'attitudine** di coltivare le discipline che nessuna palese relazione manifestavano con l'arte della guerra e del governare" (G. Loria, nel capitolo intitolato **"SPQR"**).
- **Lucio G. M. Columella** da Cadice scrisse (62 d.C.) ***De Re Rustica***, con elementi di geometria pratica.

Un esempio di influenza del contesto: "non-matematica" nella Roma antica?

- Formule approssimate per il calcolo di aree:

1. per trovare l'area di un triangolo equilatero di lato l:
   Area = $\boldsymbol{l^2 \cdot 13/30}$
   (con ciò si approssima la radice di 3 con **26/15**)
2. per trovare l'area di un cerchio di diametro d:
   Area = $\boldsymbol{d^2 \cdot 11/14}$
   (con ciò si approssima π con **22/7**)

- In entrambi i casi l'approssimazione è per eccesso:
  caso 1: (val. approssimato)/(val. esatto) = 1.000740…
  caso 2: (val. approssimato)/(val. esatto) = 1.000402…

Un esempio di influenza del contesto: "non-matematica" nella Roma antica?

- Columella "al pari degli antichi Egiziani **non [sempre] insegna regole generali, ma lascia al lettore** i desumerle dalle applicazioni" (G. Loria).
- Inoltre: si tratta di approssimazioni valide?
- Forse, ma due secoli e mezzo prima di Columella, un greco-siciliano che perse la vita proprio a causa degli invasori romani aveva messo a punto una tecnica per ottenere **approssimazioni per difetto e per eccesso**: la considerazione di poligoni regolari inscritti e circoscritti.
- **Gli interessi di Archimede non erano solo pratici!**

Facciamo il punto: Roma e la Grecia

753 a.C. fond. Roma

- 550 a.C. Talete, Pitagora
- 360 a.C. Eudosso

510 a.C. Repubblica

- 300 a.C. Euclide
- 225 a.C. Apollonio, Eratostene

212 a.C. conq. Siracusa

- 212 a.C. Archimede

146 a.C. conq. Grecia

- 140 a.C. Ipparco

64 a.C. conq. Mesopotamia

30 a.C. conq. Egitto

- 100 Nicomaco, 150 Tolomeo
- 75 Erone, 250 Diofanto

476 caduta impero occ.

- 320 Pappo, 390 Teone
- **S. Boezio (480-524)** ← **l'unico matematico "romano"**

Rileviamo ancora l'influenza del contesto (storico e storiografico)

- F. Enriques e G. Loria sono stati indotti (dal contesto politico e culturale) a presentare titoli ambigui:
  "Trasmissione attraverso i Romani"
  "S.P.Q.R." (un intero capitolo dedicato a… nulla!)
- Solo nel testo hanno riconosciuto la realtà storica sviluppatasi in un contesto **intrinsecamente non-matematico**.
- "Graecia capta ferum victorem cepit et artes intulit agresti Latio" (Orazio, *Epistole*, 2, 1, 156-157).
- Per le arti, forse, i Romani furono discepoli dei Greci: ma **non certo per quanto riguarda la Matematica!**

Facciamo il punto: storia… e geografia

- Abbiamo finora mostrato la necessità di considerare adeguatamente il contesto socio-culturale nella presentazione dei riferimenti storici.
  Ciò porta ad alcune indicazioni generali:
- la storia della Matematica **non deve essere interpretata come la progressiva "scoperta" di contenuti pre-esistenti, ma come un elemento dell'evoluzione sociale e culturale umana**.
- la storia, inoltre, non può non essere affiancata dalla geografia. **Ad esempio, come potremmo collegare la Matematica classica a quella tardo-medievale…**

Come collegare la matematica classica alla tardo-medievale *senza gli Arabi?*

Matematica greca

212 a.C.: Roma conquista Siracusa; morte di Archimede

Matematica romana (pressoché insignificante; tuttavia si mantiene viva la tradizione ellenistica)

(524: morte di Boezio)

?

Collegamento: matematica araba!

1202: pubblicazione del "Liber Abaci" di Fibonacci

Sviluppo della Matematica nell'Europa occidentale: dal Medioevo ai giorni nostri

2000: ...

Sommario
Dalla Storia alla Matematica

- **Questioni teoriche**: matematica e storia: una presenza e molte questioni

Prima conclusione. La considerazione del contesto permette l'accostamento corretto e utile al dato storico

- **Secondo esempio.** In Cina nel VI secolo a.C.: tra numeri e "quadrati magici"
- **Terzo esempio.** Dalle dita ai bastoncini: le "bacchette da calcolo"
- **Quarto esempio.** L'algebra cinese: i sistemi di equazioni
- Verso una **conclusione** "aperta"

In Cina nel VI sec. a.C. tra numeri e "quadrati magici"

Lo Shu

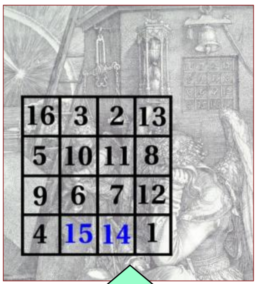
4 e **2** sono le spalle
8 e **6** sono i piedi
un **3** sulla sinistra
un **7** sulla destra
porta un **9** sulla testa
è calzato con un **1**
mentre un **5** sta nel mezzo

15 →	4	9	2
15 →	3	5	7
15 →	8	1	6
	15	15	15

15 ↘ 15 ↗

In Cina nel VI sec. a.C. tra numeri e “quadrati magici”

- **Il più antico quadrato magico** è il cinese *Lo Shu*.
- È l’unico quadrato magico di ordine 3 (a parte i quadrati simmetrici etc.)
- L’interesse per questi “giochi” si diffuse in Occidente con *Malinconia* di A. Dürer (1514).
- **B. Frenicle de Bessy** (1605-1675) trovò tutti gli 880 quadrati magici diversi di ordine 4 (pubbl. 1693).



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

un **“quadrato magico”**

In Cina nel VI sec. a.C. tra numeri e “quadrati magici”

- **L’approccio al problema dei Cinesi è ben diverso da quello di Frenicle.**

32	6	22	13	51	67	58	78	42
28	14	70	20	17	66	56	44	54
48	80	9	77	43	75	1	2	34
47	64	37	57	63	21	27	18	35
33	11	23	3	41	79	59	71	49
53	8	55	61	19	25	45	74	29
52	72	81	7	39	5	73	10	30
36	38	12	62	65	16	26	68	46
40	76	60	69	31	15	24	4	50

I quadrati magici oggi

- La matematica da Frenicle ha realizzato molti risultati a proposito dei quadrati magici. Importante è…
- … l’ordine *n* del quadrato da costruire: esso può essere **dispari** (come per il quadrato *Lo Shu*, $n = 3$) o **pari** (come per quello di Dürer ($n = 4$).
- Presenteremo una regola per costruire un quadrato magico classico di ordine *n* dispari (e vedremo ad esempio **il caso: $n = 5$**).

I quadrati magici oggi

- Iniziamo a porre **1 nella casella al centro della prima riga.**
- Poi collochiamo gli altri numeri, **in ordine, secondo una “diagonale ascendente”,** rispettando alcune regole.

		1		

I quadrati magici oggi

- **Regole per le “diagonali”:**
- si va alla colonna successiva in caso di fine colonna;
- si va alla riga precedente in caso di fine riga;
- si va alla casella inferiore in caso di casella occupata.

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

E infine… *verifichiamo!*

- Troviamo la costante magica:
- somma dei numeri da 1 a 25: 25×26:2 = 325
- 325:5 = **65**

65					
65 →	17	24	1	8	15
65 →	23	5	7	14	16
65 →	4	6	13	20	22
65 →	10	12	19	21	3
65 →	11	18	25	2	9
65	65	65	65	65	65

La Sagrada Familia…

- **C'è uno strano "particolare"…**
- … un quadrato magico (di ordine 4) con elementi: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **10, 10,** 11, 13, **14, 14,** 15.
- Costante magica: è **33** (quella di Dürer era: **34**).

Sommario
Dalla Storia alla Matematica

- **Questioni teoriche**: matematica e storia: una presenza e molte questioni

Prima conclusione. La considerazione del contesto permette l'accostamento corretto e utile al dato storico

Seconda conclusione. La matematica cinese e quella occidentale sono "incommensurabili"

- **Terzo esempio.** Dalle dita ai bastoncini: le "bacchette da calcolo"
- **Quarto esempio.** L'algebra cinese: i sistemi di equazioni
- Verso una **conclusione** "aperta"

Dalle dita ai bastoncini (*bacchette da calcolo*)

- Come indicare i numeri usando **bastoncini**? Possiamo riferirci alle dita della mano: un dito, due dita…

𝍠 𝍡 𝍢 𝍣 𝍤

- A 5 unità (corrispondenti a 5 dita) qualcosa cambia: dobbiamo ricorrere all'altra mano, **ma indicare che abbiamo già considerato una mano completa**.

𝍥 𝍦 𝍧 𝍨

- **Prima di raggiungere il 10 dobbiamo** prepararci ad una situazione importante: per evitare di restare bloccati (avendo esaurito le dita delle mani, come aggiungeremo altre unità?) introdurremo le **decine**.

I numeri in Cina
Disposizioni di bacchette *Tsung* e *Heng*

- Le **decine** si possono indicare mediante le stesse disposizioni di bacchette usate per le unità, **spostate più a sinistra**. Tuttavia per evitare malintesi, i Cinesi utilizzavano per le decine delle disposizioni (*Heng*) leggermente diverse da quelle per le unità (*Tsung*):

𝍩 𝍪 𝍫 𝍬 𝍭 𝍮 𝍯 𝍰 𝍱

- Per le centinaia le disposizioni usate erano *Tsung*, per le migliaia *Heng* etc.
- Riassumendo:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Tsung	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
Heng	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

Le bacchette da calcolo
Uno strumento molto antico

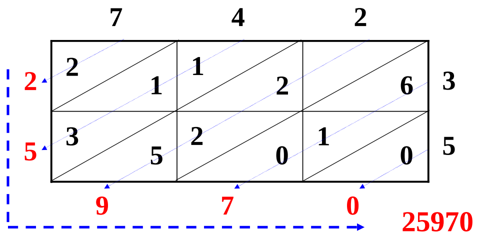
- Fino al XII sec. lo **zero** era indicato da uno spazio vuoto: **proprio questa assenza ha reso opportuno l'uso di due gruppi di simboli** (*Tsung* e *Heng*).
- Le **bacchette** (*suan*) sono un artefatto diffusissimo dalla dinastia Qin (221-206 a.C., ma sono più antiche). La forma descritta è ripresa da Sun Tzu (280 d.C.):
- ***"Le unità sono verticali, le decine orizzontali, le centinaia erette, le migliaia distese, così le migliaia e le decine sembrano la stessa cosa le decine di migliaia e le centinaia si assomigliano".***
- Dal 200 a.C. i Cinesi indicano anche **numeri negativi** (distinguendo il colore delle bacchette: rosse e nere).

Venti secoli di calcoli

- Le bacchette erano un ausilio per il calcolo: esse davano la possibilità di **formare praticamente i "numerali-bacchette"** su di una superficie piana (tavola da calcolo aritmetica, quadrettata, in cui le operazioni erano eseguite sfruttando le caratteristiche della notazione posizionale) e di cancellare facilmente i numeri che non servivano più.
- L'uso delle bacchette tramonta nella tarda epoca Ming (1368-1644) quando furono soppiantate dall'**abaco**.
- Introduciamo intanto un primo (celebre) esempio…

Moltiplicazioni e tabelle
Un esempio dal *Jiuzhang Suan Fa*

- Come tecnica pratica, la **moltiplicazione per graticola** ("gelosia") si trova in India, presso gli Arabi e in Cina.
- Eseguiamo la moltiplicazione: **742 × 35** = 25970



Attenzione: l'esempio è divertente…
ma il *Jiuzhang Suan Fa* è del XV sec.!

- Spesso le cifre erano "scritte", talvolta **era indicato lo zero** (*ling*, dal 1247): le bacchette erano meno usate.
- Ecco uno schema dal *Jiuzhang Suan Fa* (1450) ed uno (1427) di Al-Kashi, uno degli ultimi matematici arabi.

- Il nostro primo esempio dunque non è molto felice: dedicheremo la nostra ricerca a un esempio **più storicamente fondato**.
- Ma possiamo già fissare qualche considerazione…

Moltiplicazioni e tabelle
Il primo esempio ci porta a riflettere

Suang Fa Thung Tsung, 1593

- La tecnica illustrata fornisce un esempio di **uso di uno strumento**: **le bacchette da calcolo.**
- Tale uso, nel caso visto, richiede la conoscenza di **regole e di modalità:** **la moltiplicazione per graticola (o "gelosia").**
- Questo rapporto tra lo strumento e le "istruzioni per l'uso" è importante.

Sommario
Dalla Storia alla Matematica

- **Questioni teoriche**: matematica e storia: una presenza e molte questioni

Prima conclusione. La considerazione del contesto permette l'accostamento corretto e utile al dato storico

Seconda conclusione. La matematica cinese e quella occidentale sono "incommensurabili"

Terza conclusione. I "bastoncini da calcolo" sottolineano il ruolo della manualità

- **Quarto esempio.** L'algebra cinese: i sistemi di equazioni
- Verso una **conclusione** "aperta"

Che cos'è l'*algebra*?
Algebra cinese e "carattere posizionale"

- La disciplina che consente la risoluzione di **equazioni espresse mediante simboli specifici** risale al XVI sec. (a partire da Viète c'è la possibilità di parametrizzare, dunque di considerare non più un singolo problema ma una classe di problemi).
- Ma una disciplina espressa meno tecnicamente (algebra **sincopata**) può risalire al III secolo.
- L'espressione di problemi in forma **geometrica** risale al III sec. a.C. (algebra **geometrica**).
- E i problemi che noi oggi risolviamo algebricamente sono presenti a partire dal **II millennio a.C.**

Che cos'è l'*algebra*?
Algebra cinese e "carattere posizionale"

- In **Cina** l'algebra è presente dal II sec. a.C. in forma retorica o sincopata (ideogrammi monosillabici per quantità e operazioni) con un importante **"carattere posizionale"** (Needham 1959, p. 112), come abbiamo visto per le (tarde) tecniche moltiplicative.
- La **tavola da calcolo algebrica** cinese era impostata in modo che **determinate posizioni fossero occupate sempre da particolari tipi di grandezze** (incognite, potenze etc.)
- e tale convenzione può considerarsi un importante **artefatto secondario (una "regola del gioco")**.

Che cos’è l’*algebra*?
Algebra cinese e “carattere posizionale”

termine noto
coeff. x
coeff. x^2

Nel presente studio esamineremo un esempio significativo di “calcolo mediante tabelle”

E si noti l’uso di **bacchette!**

- Ad esempio, questa tabella (*sangi*) indica l’equazione:
  $851x^2-3450x+2691 = 0$
  (si osservino i diversi colori e l’assenza dello zero).

Calcolo mediante tabelle: *Chiu Chang*, “nove capitoli sulle arti matematiche”

- Consideriamo il **problema** seguente che riprende, con variazioni numeriche, un problema del capitolo VIII (***Fang Cheng***) del ***Chiu Chang*** (precedente al I sec.):
- Cinque covoni di grano di tipo A aggiunti a tre covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 19 sheng. Tre covoni di grano di tipo A aggiunti a due covoni di grano di tipo B hanno il rendimento di 12 sheng. Quali rendimenti hanno un covone di grano di tipo A e un covone di grano di tipo B?
- **Oggi** indicheremmo rispettivamente con x e con y (in sheng) i rendimenti di un covone di tipo A e di un covone di tipo B ed imposteremmo un sistema…

Il problema del *Chiu Chang* porta ad un sistema lineare

- Consideriamo il sistema di equazioni lineari costituito da:
  $$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$
- Riportiamo in una tabella i coefficienti e i termini noti.

5	3	19
3	2	12

- Operiamo ora per modificare la tabella sapendo che:

Regole: **(1)** si possono variare **in proporzione** tutti i termini delle righe e **(2)** a una riga si può sostituire la riga ottenuta **sommando** o **sottraendo i termini** corrispondenti di due righe.

Il problema del *Chiu Chang* porta ad un sistema lineare

Una possibilità è operare sulle righe per rendere uguali i primi elementi:

- moltiplichiamo la prima riga per 3,
- e la seconda per 5.

1	0	2
0	1	3

mcm = 15

- Ora alla seconda riga sottraiamo la prima,
- moltiplichiamo questa seconda riga per 9
- e alla prima riga sottraiamo la seconda.
- Infine si divide la prima riga per 15 e la seconda per 9.

Il problema del *Chiu Chang* porta ad un sistema lineare

- Eravamo partiti da un sistema di equazioni lineari:
  $$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$
- e siamo pervenuti alla sua soluzione:
  $$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

1	0	**2**
0	**1**	**3**
coeff. di x	coeff. di y	rendim. (sheng)

Carattere posizionale: **un artefatto secondario essenziale**

…ma riferito a *quale* artefatto primario?

Il procedimento precedente può essere riprodotto con le bacchette da calcolo

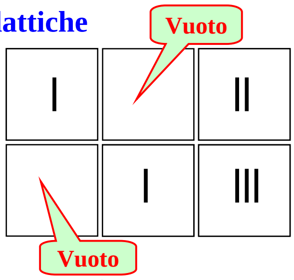
Il sistema è:
$$\begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ 3x + 2y = 12 \end{cases}$$

- Moltiplichiamo la prima riga per 3
- e la seconda per 5.

- Ora alla seconda riga sottraiamo la prima,
- moltiplichiamo questa seconda riga per 9
- e alla prima riga sottraiamo la seconda.
- Infine dividiamo la prima riga per 15 e dividiamo ancora la seconda riga per 9.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

Uso delle **bacchette da calcolo** e opportunità didattiche



- Molto importante è il ruolo dello **zero**:
- la "sparizione" di uno dei coefficienti rende **fisicamente** possibile **risolvere l'equazione**.
- Il significato di tale elemento è rilevante in quanto può **contribuire a "suggerire" la strategia risolutiva.**
- Possibili **errori**: "eliminazione" di bacchette; aggiunta delle stesse bacchette a tutte le caselle di una riga.

Sommario
Dalla Storia alla Matematica

- **Questioni teoriche**: matematica e storia: una presenza e molte questioni

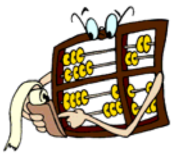
Prima conclusione. La considerazione del contesto permette l'accostamento corretto e utile al dato storico

Seconda conclusione. Anche la storiografia risente dell'influenza del contesto socio-culturale

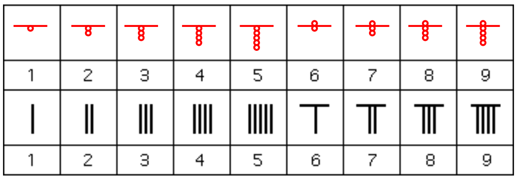
Terza conclusione. I "bastoncini da calcolo" sottolineano il ruolo della manualità

Quarta conclusione. L'algebra cinese ha raggiunto risultati assai importanti e innovativi

- Verso una **conclusione** "aperta"



- La prima illustrazione dell'abaco risale al 1436, ma Needham suggerisce che potrebbe risalire al VI sec.



Matematica, dunque, "multiculturale"

- L'inserimento dei contributi dalla storia delle varie culture deve scongiurare rischi per molti versi opposti:
- da un lato, l'inglobamento di una comunità culturale in un'altra, o nella cosiddetta comunità internazionale, con le conseguenti **perdite di originalità** che possono portare addirittura a fenomeni di sterilizzazione;
- d'altro canto deve essere evitato che la proclamazione delle diversità sia causa di **isolamento culturale**.
- Il confronto dialettico tra gruppi di ricercatori e di studenti appartenenti a tradizioni diverse può invece portare al **reciproco sostanziale arricchimento**, allo stimolo di una visione generale più ampia ed articolata che risulta certamente più feconda.

Verso una conclusione "aperta"

- La crescente attenzione da parte della comunità scientifica non esaurisce il problema: la creazione di un ambiente culturale in cui i contributi (**"storici", ma non solo!**) delle varie tradizioni siano visti come veri arricchimenti resta un processo difficoltoso, anche dal punto di vista sociale ed economico.
- Riteniamo che un **corretto approccio culturale**, un approccio ad esempio che tragga origine dal mondo della scuola e che nel mondo della scuola possa radicarsi, costituisca una premessa importante per la nascita di una mentalità tesa a valorizzare **"la diversità, piuttosto che l'universalità"** (L. Grugnetti, L. Rogers, 2000).

Ho citato:

Bartolini Bussi (2002) The Theoretical Dimension of Mathematics: a Challenge for Didacticians, *24 Canad. Math. Ed. St. Group*
B.B. (2003) Instruments for semiotic mediation in primary school classrooms, *For the Learning of Mathematics*
Egenstroem (1990) When is a tool? Multiple meanings of artefacts in human activity, in *Learning, Working and Imagining*, Helsinki
Lakoff, Núñez (2000) *Where mathematics comes from*, Basic Books
Martzloff (1987) *Histoire des mathématiques chinoises*, Masson
Needham (1959) *Science and civilisation in China*, Cambridge University Press
Steinbring (2002) What makes a sign a mathematical sign?, *PME-26*
Vygotskij (1974) *Storia dello sviluppo delle funzioni psichiche superiori*, Giunti
V. (1987) *Il processo cognitivo*, Boringhieri
Wartofsky (1979) Perception, representation and the forms of action, *Models*, Reidel

A tutti Voi grazie dell'attenzione