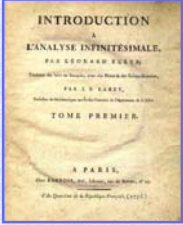


Master in didattica delle Scienze, Udine, 2007
L'infinità dei numeri primi.
Un approccio storico-culturale alle dimostrazioni per la didattica della matematica



Giorgio T. Bagni
 Dipartimento di Matematica e Informatica
 Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.svillogismos.it

Sommario

- **Storia e didattica:** presenza e questioni
- **Considerazioni teoriche:** storia e cultura
- **Un grande teorema:** Euclide, Kummer, Euler
- **Riflessioni conclusive:** elementi storici e didattica



La storia nella didattica:
una presenza e molte questioni

- La **storia** è ormai un elemento di primo piano nella **didattica** della matematica.
- Convegni e iniziative internazionali:
 ICMI-Study, Luminy, Marseille (Fauvel & van Maanen, 2000);
 gruppo HPM (Uppsala 2004);
 ESU-5, Praga 2007...



La storia nella didattica:
una presenza e molte questioni

- Alcune domande “generali”:
- è corretto concepire la storia come un percorso che, attraverso tentativi e rivisitazioni critiche, porti **alla sistemazione moderna?**
- possiamo cioè **riferire l'intera evoluzione storica alle nostre attuali concezioni?**
- quale ruolo va attribuito ai **fattori culturali e sociali?**
- I “momenti di passaggio” verso la formazione della matematica “compiuta” (la nostra?) costituivano ovviamente **la matematica “compiuta” dell'epoca, in base a concezioni socio-culturali precise.**

Sommario

- **Storia e didattica:** presenza e questioni
- **Considerazioni teoriche:** storia e cultura
- **Un grande teorema:** Euclide, Kummer, Euler
- **Riflessioni conclusive:** elementi storici e didattica



La storia nella didattica:
ci sono molti aspetti da considerare

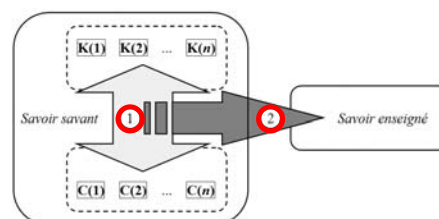
- Lo sviluppo della conoscenza, la *transposition didactique*, il ruolo della storia nella nostra comprensione dello sviluppo del sapere **non sono problemi indipendenti.**
- **Una *transposition didactique* è sempre basata su di una serie di assunzioni epistemologiche sullo sviluppo della conoscenza.**
- Dunque una *transposition didactique* presuppone sempre una teoria della conoscenza. Questo punto è, a nostro avviso, essenziale.

La storia nella didattica: ci sono molti aspetti da considerare

- Distinguiamo fra (almeno) tre tipi di epistemologie:
 - quelle che **non considerano l'aspetto storico**: le *epistemologie a-storiche*;
 - quelle che considerano le radici storiche del sapere **senza però affermare che gli aspetti del contesto culturale** abbiano importanza fondamentale; possono essere denominate *epistemologie storiche*; infine...
 - **quelle che evidenziano la storicità della conoscenza e affermano che gli aspetti culturali hanno un ruolo cognitivo ed epistemologico fondamentale. Possono essere chiamate epistemologie storico-culturali** (ad esempio: Crombie, Radford).
- Scegliamo di collocarci in questo terzo quadro teorico.

La storia nella didattica: ci sono molti aspetti da considerare

- Sarà dunque importante analizzare (1) come le varie "versioni" $K(i)$ di una conoscenza matematica si collegano ai rispettivi contesti culturali $C(i)$ e (2) qual è il ruolo, nella *transposition*, della "storia di K".



Assunzioni della prospettiva storico-culturale (Radford)

- (1) la conoscenza si collega alle **azioni** richieste per risolvere problemi e i problemi sono risolti **nei contesti storico-culturali** dei periodi considerati;
- (2) la conoscenza si costruisce **socialmente**; le istituzioni culturali influenzano gli allievi.
- Nella prospettiva degli "**ostacoli epistemologici**", invece, i collegamenti tra $C(i)$ e $K(i)$ non sono diretti: gli ostacoli epistemologici sono classificati a parte rispetto a quelli culturali. Lo sviluppo della conoscenza non è governato dalla cultura ma dalla Ragione (Piaget) e ciò porta ad una concezione ricapitolazionista in cui gli ostacoli "storici" ricompaiono nella pratica didattica.

Sommario

- **Storia e didattica:** presenza e questioni
- **Considerazioni teoriche:** storia e cultura
- **Un grande teorema:** Euclide, Kummer, Euler
- **Riflessioni conclusive:** elementi storici e didattica



Esaminiamo un esempio classico: quanti sono i numeri primi?

- **I numeri primi sono più di ogni assegnata quantità di primi, ovvero: i numeri primi sono infiniti.**
- E numerose dimostrazioni:
 - **Euclide** (300 a.C.)
 - **Ernst Eduard Kummer** (1878)
 - **Leonhard Euler** (1737 e 1748)
 - **Paul Erdős** (1938)
 - **Harry Fürstenberg** (1955)
 - etc.
- Esaminiamo alcune di esse evidenziando le analogie e le differenze.

Un esempio classico: la dimostrazione di Euclide (300 a.C.)

- **Dimostrazione** (Euclide, 300 a.C.). Siano A, B, C gli assegnati numeri primi. Affermo che ci sono altri numeri primi oltre ad A, B, C . Sia DE il minimo comune multiplo di A, B, C ; si aggiunga l'unità DF a DE .
- A —
 B —
 C —
 E —

G ————

D
 F
- Ora, **EF o è primo o non lo è.**
 - Sia EF primo. Allora abbiamo trovato un numero primo EF oltre ad A, B, C .

Un esempio classico: la dimostrazione di Euclide (300 a.C.)

“**Reductio ad absurdum, which Euclid loved so much, is one of a mathematician’s finest weapons. It is a far finer gambit than any chess play: a chess player may offer the sacrifice of a pawn or even a piece, but a mathematician offers the game**”

Godfrey H. Hardy
(*A Mathematician’s Apology*, 1941)

Un esempio classico: la dimostrazione di Euclide (300 a.C.)

- Una prima questione è però interessante: **si tratta davvero di una “dimostrazione per assurdo”?**
- Certamente la parte centrale (evidenziata) si basa su di una *reductio ad absurdum*. Ma essa si riferisce solo alla sezione seguente: **se un numero (primo) A, B, C divide due numeri consecutivi DE e DF , esso divide la loro differenza DF , cioè l’unità, e questo è impossibile** (si noti che in questo caso la primalità di A, B, C è un’ipotesi non necessaria).
- La dimostrazione di Euclide considera inizialmente alcuni primi (A, B, C), quindi **costruisce un nuovo primo e mostra che esso non è uguale ad alcuno dei primi dati: questa parte è dimostrata per assurdo.**

Un esempio classico: la dimostrazione di Euclide (300 a.C.)

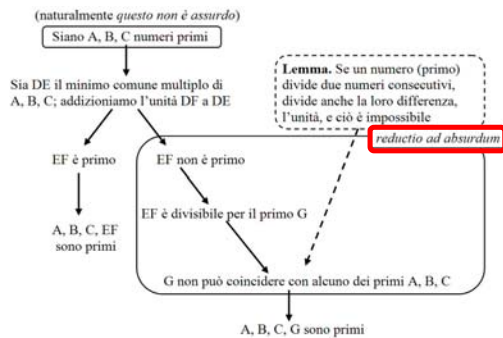
- Una rivisitazione moderna della dimostrazione euclidea può evidenziare con chiarezza il suo carattere sostanzialmente “costruttivo”.
- Sia N_1 un intero positivo maggiore di 1: esso ha (almeno) **un** fattore primo.
- N_1 e N_1+1 sono consecutivi, dunque coprimi. Allora $N_2 = N_1 \cdot (N_1+1)$ ha (almeno) **due** fattori primi diversi.
- N_2 e N_2+1 sono consecutivi, dunque coprimi. Allora $N_3 = N_2 \cdot (N_2+1)$ ha (almeno) **tre** fattori primi diversi.
- Questo procedimento può essere iterato indefinitamente: dunque si dimostra che **esiste una quantità grande a piacere di numeri primi.**

25. November. Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse.

Hr. Kummer machte folgende Mitteilung:
Neuer elementarer Beweis des Satzes, dass die Anzahl aller Primzahlen eine unendliche ist.

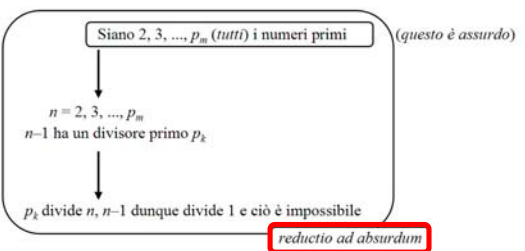
- Ma si noti che spesso le moderne dimostrazioni del teorema considerato sono simili alla seguente:
- **Dimostrazione** (Kummer, 1878).
Supponiamo che esista soltanto la quantità finita di primi $2, 3, \dots, p$.
Sia m il prodotto di tali primi; $m-1$ è un prodotto di primi, dunque ha un divisore primo q in comune con m ; q divide $m-(m-1) = 1$, il che è assurdo.
- In questo caso si afferma che **i numeri primi sono infiniti perché si dimostra che non è possibile considerare un numero finito di primi.**

Confrontiamo la dimostrazione di Euclide e la dimostrazione di Kummer



Confrontiamo la dimostrazione di Euclide e la dimostrazione di Kummer

- Nella versione di Kummer, invece, la proprietà provata per assurdo è il vero **nucleo della dimostrazione:**



Confrontiamo la dimostrazione di Euclide e la dimostrazione di Kummer

- In una dimostrazione per assurdo sia la tesi che la sua negazione hanno un ruolo essenziale, dunque la considerazione di un insieme infinito, in questo tipo di dimostrazione, è inevitabile (il lavoro di Kummer è intitolato *Neuer elementarer Beweis, dass die Anzahl aller Primzahlen einen unendliche ist*).
- La Proposizione IX-20 non fa esplicito riferimento all'infinito, ma è compatibile con la nozione aristotelica di infinito potenziale (*Fisica*, Γ, 6-7, 207a, 22-32).

Un celebre esempio: una dimostrazione di Euler (1748)

- È didatticamente significativo inquadrare le dimostrazioni di Euclide e di Kummer nei rispettivi **contesti culturali**, con particolare riferimento alla concezione di infinito. Ciò consente, innanzitutto, di proporre agli studenti una conoscenza del *savoir* collegata a quella dei momenti storici considerati.
- Dimostrazioni in settori diversi sono interessanti per i **contesti matematico e non matematico**.
- Faremo un omaggio al grande Euler anticipando di alcune settimane gli auguri per il 300° compleanno!



Un celebre esempio: una dimostrazione di Euler (1748)

- Seguiremo: L. Euler, *Introduction à l'Analyse Infinitésimale*, Barrois, Paris 1796, prima edizione francese, vol. I; le figure sono tratte dalle pp. 208, 209 e 213.

172. Donc la série est toujours composée d'un nombre infini de termes, quelque soit le nombre des facteurs, infini ou fini. Par exemple, on aura

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + \&c.$$

EULER, *Introduction à l'Anal. infn.* Tome I. 3 D

- Consideriamo la serie $1/(1-x) = 1+x+x^2+x^3+\dots$ della quale si fornisce l'esempio per $x = 1/2$.
- Consideriamo poi i **due** casi per $x = 1/2$ e $x = 1/3$.

DES SÉRIES RÉSULTANTES

210. série, où se trouvent tous les nombres qui peuvent être formés seulement par la multiplication du nombre deux; c'est-à-dire, toutes les puissances de deux. On aura ensuite

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + \&c.$$

On ne trouve ici que les nombres formés par la combinaison des nombres 2 & 3, ou qui n'ont d'autres diviseurs que 2 & 3.

173. Donc, si au lieu de 2, 3, 5, 7, &c. on écrit l'unité divisée par tous les nombres premiers, & qu'on suppose

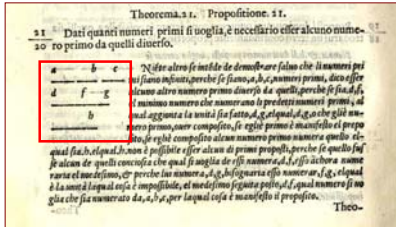
$$P = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11}) \&c.}$$

on aura

$$P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \frac{1}{23} + \frac{1}{29} + \frac{1}{31} + \frac{1}{37} + \frac{1}{41} + \frac{1}{43} + \frac{1}{47} + \frac{1}{53} + \frac{1}{59} + \frac{1}{61} + \frac{1}{67} + \frac{1}{71} + \frac{1}{73} + \frac{1}{79} + \frac{1}{83} + \frac{1}{89} + \frac{1}{97} + \frac{1}{101} + \frac{1}{103} + \frac{1}{107} + \frac{1}{109} + \frac{1}{113} + \frac{1}{127} + \frac{1}{131} + \frac{1}{137} + \frac{1}{139} + \frac{1}{143} + \frac{1}{149} + \frac{1}{151} + \frac{1}{157} + \frac{1}{163} + \frac{1}{167} + \frac{1}{173} + \frac{1}{179} + \frac{1}{181} + \frac{1}{187} + \frac{1}{191} + \frac{1}{193} + \frac{1}{197} + \frac{1}{199} + \frac{1}{211} + \frac{1}{223} + \frac{1}{227} + \frac{1}{229} + \frac{1}{233} + \frac{1}{239} + \frac{1}{241} + \frac{1}{247} + \frac{1}{251} + \frac{1}{257} + \frac{1}{263} + \frac{1}{269} + \frac{1}{271} + \frac{1}{277} + \frac{1}{281} + \frac{1}{283} + \frac{1}{287} + \frac{1}{293} + \frac{1}{299} + \frac{1}{307} + \frac{1}{311} + \frac{1}{313} + \frac{1}{317} + \frac{1}{323} + \frac{1}{329} + \frac{1}{331} + \frac{1}{337} + \frac{1}{341} + \frac{1}{347} + \frac{1}{349} + \frac{1}{353} + \frac{1}{359} + \frac{1}{367} + \frac{1}{371} + \frac{1}{373} + \frac{1}{379} + \frac{1}{383} + \frac{1}{389} + \frac{1}{397} + \frac{1}{401} + \frac{1}{403} + \frac{1}{407} + \frac{1}{413} + \frac{1}{419} + \frac{1}{421} + \frac{1}{427} + \frac{1}{431} + \frac{1}{433} + \frac{1}{437} + \frac{1}{443} + \frac{1}{449} + \frac{1}{451} + \frac{1}{457} + \frac{1}{461} + \frac{1}{463} + \frac{1}{467} + \frac{1}{473} + \frac{1}{479} + \frac{1}{481} + \frac{1}{487} + \frac{1}{491} + \frac{1}{493} + \frac{1}{499} + \frac{1}{503} + \frac{1}{509} + \frac{1}{511} + \frac{1}{517} + \frac{1}{521} + \frac{1}{523} + \frac{1}{527} + \frac{1}{533} + \frac{1}{539} + \frac{1}{541} + \frac{1}{547} + \frac{1}{551} + \frac{1}{557} + \frac{1}{563} + \frac{1}{569} + \frac{1}{571} + \frac{1}{577} + \frac{1}{583} + \frac{1}{587} + \frac{1}{593} + \frac{1}{599} + \frac{1}{601} + \frac{1}{607} + \frac{1}{613} + \frac{1}{617} + \frac{1}{619} + \frac{1}{623} + \frac{1}{629} + \frac{1}{631} + \frac{1}{637} + \frac{1}{641} + \frac{1}{643} + \frac{1}{647} + \frac{1}{653} + \frac{1}{659} + \frac{1}{661} + \frac{1}{667} + \frac{1}{671} + \frac{1}{673} + \frac{1}{677} + \frac{1}{683} + \frac{1}{689} + \frac{1}{691} + \frac{1}{697} + \frac{1}{701} + \frac{1}{703} + \frac{1}{707} + \frac{1}{713} + \frac{1}{719} + \frac{1}{721} + \frac{1}{727} + \frac{1}{731} + \frac{1}{733} + \frac{1}{737} + \frac{1}{743} + \frac{1}{749} + \frac{1}{751} + \frac{1}{757} + \frac{1}{761} + \frac{1}{763} + \frac{1}{767} + \frac{1}{773} + \frac{1}{779} + \frac{1}{781} + \frac{1}{787} + \frac{1}{793} + \frac{1}{799} + \frac{1}{803} + \frac{1}{809} + \frac{1}{811} + \frac{1}{817} + \frac{1}{821} + \frac{1}{823} + \frac{1}{827} + \frac{1}{833} + \frac{1}{839} + \frac{1}{841} + \frac{1}{847} + \frac{1}{851} + \frac{1}{853} + \frac{1}{857} + \frac{1}{863} + \frac{1}{869} + \frac{1}{871} + \frac{1}{877} + \frac{1}{883} + \frac{1}{889} + \frac{1}{891} + \frac{1}{893} + \frac{1}{899} + \frac{1}{901} + \frac{1}{907} + \frac{1}{913} + \frac{1}{917} + \frac{1}{919} + \frac{1}{923} + \frac{1}{929} + \frac{1}{931} + \frac{1}{937} + \frac{1}{943} + \frac{1}{949} + \frac{1}{951} + \frac{1}{953} + \frac{1}{959} + \frac{1}{961} + \frac{1}{967} + \frac{1}{971} + \frac{1}{973} + \frac{1}{977} + \frac{1}{983} + \frac{1}{989} + \frac{1}{991} + \frac{1}{993} + \frac{1}{997} + \frac{1}{1003} + \frac{1}{1009} + \frac{1}{1013} + \frac{1}{1017} + \frac{1}{1019} + \frac{1}{1023} + \frac{1}{1027} + \frac{1}{1033} + \frac{1}{1039} + \frac{1}{1043} + \frac{1}{1049} + \frac{1}{1051} + \frac{1}{1057} + \frac{1}{1063} + \frac{1}{1069} + \frac{1}{1073} + \frac{1}{1079} + \frac{1}{1081} + \frac{1}{1087} + \frac{1}{1093} + \frac{1}{1099} + \frac{1}{1103} + \frac{1}{1109} + \frac{1}{1117} + \frac{1}{1123} + \frac{1}{1127} + \frac{1}{1133} + \frac{1}{1139} + \frac{1}{1147} + \frac{1}{1153} + \frac{1}{1157} + \frac{1}{1163} + \frac{1}{1169} + \frac{1}{1171} + \frac{1}{1177} + \frac{1}{1183} + \frac{1}{1189} + \frac{1}{1193} + \frac{1}{1199} + \frac{1}{1201} + \frac{1}{1207} + \frac{1}{1213} + \frac{1}{1217} + \frac{1}{1219} + \frac{1}{1223} + \frac{1}{1229} + \frac{1}{1231} + \frac{1}{1237} + \frac{1}{1243} + \frac{1}{1249} + \frac{1}{1253} + \frac{1}{1259} + \frac{1}{1261} + \frac{1}{1267} + \frac{1}{1273} + \frac{1}{1279} + \frac{1}{1283} + \frac{1}{1289} + \frac{1}{1291} + \frac{1}{1297} + \frac{1}{1303} + \frac{1}{1309} + \frac{1}{1313} + \frac{1}{1317} + \frac{1}{1321} + \frac{1}{1327} + \frac{1}{1331} + \frac{1}{1337} + \frac{1}{1343} + \frac{1}{1349} + \frac{1}{1351} + \frac{1}{1357} + \frac{1}{1363} + \frac{1}{1369} + \frac{1}{1373} + \frac{1}{1379} + \frac{1}{1381} + \frac{1}{1387} + \frac{1}{1393} + \frac{1}{1399} + \frac{1}{1403} + \frac{1}{1409} + \frac{1}{1411} + \frac{1}{1417} + \frac{1}{1423} + \frac{1}{1429} + \frac{1}{1433} + \frac{1}{1439} + \frac{1}{1447} + \frac{1}{1453} + \frac{1}{1459} + \frac{1}{1463} + \frac{1}{1469} + \frac{1}{1471} + \frac{1}{1477} + \frac{1}{1483} + \frac{1}{1489} + \frac{1}{1493} + \frac{1}{1499} + \frac{1}{1501} + \frac{1}{1507} + \frac{1}{1513} + \frac{1}{1517} + \frac{1}{1519} + \frac{1}{1523} + \frac{1}{1529} + \frac{1}{1531} + \frac{1}{1537} + \frac{1}{1543} + \frac{1}{1549} + \frac{1}{1553} + \frac{1}{1559} + \frac{1}{1561} + \frac{1}{1567} + \frac{1}{1573} + \frac{1}{1579} + \frac{1}{1583} + \frac{1}{1589} + \frac{1}{1591} + \frac{1}{1597} + \frac{1}{1603} + \frac{1}{1609} + \frac{1}{1613} + \frac{1}{1617} + \frac{1}{1621} + \frac{1}{1627} + \frac{1}{1633} + \frac{1}{1639} + \frac{1}{1643} + \frac{1}{1649} + \frac{1}{1651} + \frac{1}{1657} + \frac{1}{1663} + \frac{1}{1669} + \frac{1}{1673} + \frac{1}{1679} + \frac{1}{1681} + \frac{1}{1687} + \frac{1}{1693} + \frac{1}{1699} + \frac{1}{1703} + \frac{1}{1709} + \frac{1}{1717} + \frac{1}{1723} + \frac{1}{1727} + \frac{1}{1733} + \frac{1}{1739} + \frac{1}{1747} + \frac{1}{1753} + \frac{1}{1757} + \frac{1}{1763} + \frac{1}{1769} + \frac{1}{1771} + \frac{1}{1777} + \frac{1}{1783} + \frac{1}{1789} + \frac{1}{1793} + \frac{1}{1799} + \frac{1}{1801} + \frac{1}{1807} + \frac{1}{1813} + \frac{1}{1817} + \frac{1}{1821} + \frac{1}{1827} + \frac{1}{1831} + \frac{1}{1837} + \frac{1}{1843} + \frac{1}{1849} + \frac{1}{1853} + \frac{1}{1859} + \frac{1}{1861} + \frac{1}{1867} + \frac{1}{1873} + \frac{1}{1879} + \frac{1}{1883} + \frac{1}{1889} + \frac{1}{1891} + \frac{1}{1897} + \frac{1}{1903} + \frac{1}{1909} + \frac{1}{1913} + \frac{1}{1917} + \frac{1}{1921} + \frac{1}{1927} + \frac{1}{1933} + \frac{1}{1939} + \frac{1}{1943} + \frac{1}{1949} + \frac{1}{1951} + \frac{1}{1957} + \frac{1}{1963} + \frac{1}{1969} + \frac{1}{1973} + \frac{1}{1979} + \frac{1}{1981} + \frac{1}{1987} + \frac{1}{1993} + \frac{1}{1999} + \frac{1}{2003} + \frac{1}{2009} + \frac{1}{2013} + \frac{1}{2017} + \frac{1}{2021} + \frac{1}{2027} + \frac{1}{2033} + \frac{1}{2039} + \frac{1}{2043} + \frac{1}{2049} + \frac{1}{2053} + \frac{1}{2059} + \frac{1}{2063} + \frac{1}{2069} + \frac{1}{2071} + \frac{1}{2077} + \frac{1}{2083} + \frac{1}{2089} + \frac{1}{2093} + \frac{1}{2099} + \frac{1}{2101} + \frac{1}{2107} + \frac{1}{2113} + \frac{1}{2117} + \frac{1}{2119} + \frac{1}{2123} + \frac{1}{2129} + \frac{1}{2131} + \frac{1}{2137} + \frac{1}{2143} + \frac{1}{2149} + \frac{1}{2153} + \frac{1}{2159} + \frac{1}{2161} + \frac{1}{2167} + \frac{1}{2173} + \frac{1}{2179} + \frac{1}{2183} + \frac{1}{2189} + \frac{1}{2191} + \frac{1}{2197} + \frac{1}{2203} + \frac{1}{2209} + \frac{1}{2213} + \frac{1}{2217} + \frac{1}{2221} + \frac{1}{2227} + \frac{1}{2233} + \frac{1}{2239} + \frac{1}{2243} + \frac{1}{2249} + \frac{1}{2251} + \frac{1}{2257} + \frac{1}{2263} + \frac{1}{2269} + \frac{1}{2273} + \frac{1}{2279} + \frac{1}{2281} + \frac{1}{2287} + \frac{1}{2293} + \frac{1}{2299} + \frac{1}{2303} + \frac{1}{2309} + \frac{1}{2313} + \frac{1}{2317} + \frac{1}{2321} + \frac{1}{2327} + \frac{1}{2333} + \frac{1}{2339} + \frac{1}{2343} + \frac{1}{2349} + \frac{1}{2351} + \frac{1}{2357} + \frac{1}{2363} + \frac{1}{2369} + \frac{1}{2373} + \frac{1}{2379} + \frac{1}{2381} + \frac{1}{2387} + \frac{1}{2393} + \frac{1}{2399} + \frac{1}{2401} + \frac{1}{2407} + \frac{1}{2413} + \frac{1}{2417} + \frac{1}{2421} + \frac{1}{2427} + \frac{1}{2433} + \frac{1}{2439} + \frac{1}{2443} + \frac{1}{2449} + \frac{1}{2453} + \frac{1}{2459} + \frac{1}{2461} + \frac{1}{2467} + \frac{1}{2473} + \frac{1}{2479} + \frac{1}{2483} + \frac{1}{2489} + \frac{1}{2491} + \frac{1}{2497} + \frac{1}{2503} + \frac{1}{2509} + \frac{1}{2513} + \frac{1}{2517} + \frac{1}{2521} + \frac{1}{2527} + \frac{1}{2533} + \frac{1}{2539} + \frac{1}{2543} + \frac{1}{2549} + \frac{1}{2551} + \frac{1}{2557} + \frac{1}{2563} + \frac{1}{2569} + \frac{1}{2573} + \frac{1}{2579} + \frac{1}{2581} + \frac{1}{2587} + \frac{1}{2593} + \frac{1}{2599} + \frac{1}{2603} + \frac{1}{2609} + \frac{1}{2613} + \frac{1}{2617} + \frac{1}{2621} + \frac{1}{2627} + \frac{1}{2633} + \frac{1}{2639} + \frac{1}{2643} + \frac{1}{2649} + \frac{1}{2653} + \frac{1}{2659} + \frac{1}{2663} + \frac{1}{2669} + \frac{1}{2673} + \frac{1}{2679} + \frac{1}{2681} + \frac{1}{2687} + \frac{1}{2693} + \frac{1}{2699} + \frac{1}{2703} + \frac{1}{2709} + \frac{1}{2713} + \frac{1}{2717} + \frac{1}{2721} + \frac{1}{2727} + \frac{1}{2733} + \frac{1}{2739} + \frac{1}{2743} + \frac{1}{2749} + \frac{1}{2753} + \frac{1}{2759} + \frac{1}{2761} + \frac{1}{2767} + \frac{1}{2773} + \frac{1}{2779} + \frac{1}{2783} + \frac{1}{2789} + \frac{1}{2791} + \frac{1}{2797} + \frac{1}{2803} + \frac{1}{2809} + \frac{1}{2813} + \frac{1}{2817} + \frac{1}{2821} + \frac{1}{2827} + \frac{1}{2833} + \frac{1}{2839} + \frac{1}{2843} + \frac{1}{2849} + \frac{1}{2853} + \frac{1}{2859} + \frac{1}{2861} + \frac{1}{2867} + \frac{1}{2873} + \frac{1}{2879} + \frac{1}{2883} + \frac{1}{2889} + \frac{1}{2893} + \frac{1}{2899} + \frac{1}{2903} + \frac{1}{2909} + \frac{1}{2913} + \frac{1}{2917} + \frac{1}{2921} + \frac{1}{2927} + \frac{1}{2933} + \frac{1}{2939} + \frac{1}{2943} + \frac{1}{2949} + \frac{1}{2953} + \frac{1}{2959} + \frac{1}{2963} + \frac{1}{2969} + \frac{1}{2973} + \frac{1}{2979} + \frac{1}{2981} + \frac{1}{2987} + \frac{1}{2993} + \frac{1}{2999} + \frac{1}{3003} + \frac{1}{3009} + \frac{1}{3013} + \frac{1}{3017} + \frac{1}{3021} + \frac{1}{3027} + \frac{1}{3033} + \frac{1}{3039} + \frac{1}{3043} + \frac{1}{3049} + \frac{1}{3053} + \frac{1}{3059} + \frac{1}{3063} + \frac{1}{3069} + \frac{1}{3073} + \frac{1}{3079} + \frac{1}{3081} + \frac{1}{3087} + \frac{1}{3093} + \frac{1}{3099} + \frac{1}{3103} + \frac{1}{3109} + \frac{1}{3113} + \frac{1}{3117} + \frac{1}{3121} + \frac{1}{3127} + \frac{1}{3133} + \frac{1}{3139} + \frac{1}{3143} + \frac{1}{3149} + \frac{1}{3153} + \frac{1}{3159} + \frac{1}{3163} + \frac{1}{3169} + \frac{1}{3173} + \frac{1}{3179} + \frac{1}{3181} + \frac{1}{3187} + \frac{1}{3193} + \frac{1}{3199} + \frac{1}{3203} + \frac{1}{3209} + \frac{1}{3213} + \frac{1}{3217} + \frac{1}{3221} + \frac{1}{3227} + \frac{1}{3233} + \frac{1}{3239} + \frac{1}{3243} + \frac{1}{3249} + \frac{1}{3253} + \frac{1}{3259} + \frac{1}{3263} + \frac{1}{3269} + \frac{1}{3273} + \frac{1}{3279} + \frac{1}{3281} + \frac{1}{3287} + \frac{1}{3293} + \frac{1}{3299} + \frac{1}{3303} + \frac{1}{3309} + \frac{1}{3313} + \frac{1}{3317} + \frac{1}{3321} + \frac{1}{3327} + \frac{1}{3333} + \frac{1}{3339} + \frac{1}{3343} + \frac{1}{3349} + \frac{1}{3353} + \frac{1}{3359} + \frac{1}{3363} + \frac{1}{3369} + \frac{1}{3373} + \frac{1}{3379} + \frac{1}{3381} + \frac{1}{3387} + \frac{1}{3393} + \frac{1}{3399} + \frac{1}{3403} + \frac{1}{3409} + \frac{1}{3413} + \frac{1}{3417} + \frac{1}{3421} + \frac{1}{3427} + \frac{1}{3433} + \frac{1}{3439} + \frac{1}{3443} + \frac{1}{3449} + \frac{1}{3453} + \frac{1}{3459} + \frac{1}{3463} + \frac{1}{3469} + \frac{1}{3473} + \frac{1}{3479} + \frac{1}{3481} + \frac{1}{3487} + \frac{1}{3493} + \frac{1}{3499} + \frac{1}{3503} + \frac{1}{3509} + \frac{1}{3513} + \frac{1}{3517} + \frac{1}{3521} + \frac{1}{3527} + \frac{1}{3533} + \frac{1}{3539} + \frac{1}{3543} + \frac{1}{3549} + \frac{1}{3553} + \frac{1}{3559} + \frac{1}{3563} + \frac{1}{3569} + \frac{1}{3573} + \frac{1}{3579} + \frac{1}{3581} + \frac{1}{3587} + \frac{1}{3593} + \frac{1}{3599} + \frac{1}{3603} + \frac{1}{3609} + \frac{1}{3613} + \frac{1}{3617} + \frac{1}{3621} + \frac{1}{3627} + \frac{1}{3633} + \frac{1}{3639} + \frac{1}{3643} + \frac{1}{3649} + \frac{1}{3653} + \frac{1}{3659} + \frac{1}{3663} + \frac{1}{3669} + \frac{1}{3673} + \frac{1}{3679} + \frac{1}{3681} + \frac{1}{3687} + \frac{1}{3693} + \frac{1}{3699} + \frac{1}{3703} + \frac{1}{3709} + \frac{1}{3713} + \frac{1}{3717} + \frac{1}{3721} + \frac{1}{3727} + \frac{1}{3733} + \frac{1}{3739} + \frac{1}{3743} + \frac{1}{3749} + \frac{1}{3753} + \frac{1}{3759} + \frac{1}{3763} + \frac{1}{3769} + \frac{1}{3773} + \frac{1}{3779} + \frac{1}{3781} + \frac{1}{3787} + \frac{1}{3793} + \frac{1}{3799} + \frac{1}{3803} + \frac{1}{3809} + \frac{1}{3813} + \frac{1}{3817} + \frac{1}{3821} + \frac{1}{3827} + \frac{1}{3833} + \frac{1}{3839} + \frac{1}{3843} + \frac{1}{3849} + \frac{1}{3853} + \frac{1}{3859} + \frac{1}{3863} + \frac{1}{3869} + \frac{1}{3873} + \frac{1}{3879} + \frac{1}{3881} + \frac{1}{3887} + \frac{1}{3893} + \frac{1}{3899} + \frac{1}{3903} + \frac{1}{3909} + \frac{1}{3913} + \frac{1}{3917} + \frac{1}{3921} + \frac{1}{3927} + \frac{1}{3933} + \frac{1}{3939} + \frac{1}{3943} + \frac{1}{3949} + \frac{1}{3953} + \frac{1}{3959} + \frac{1}{3963} + \frac{1}{3969} + \frac{1}{3973} + \frac{1}{3979} + \frac{1}{3981} + \frac{1}{3987} + \frac{1}{3993} + \frac{1}{3999} + \frac{1}{4003} + \frac{1}{4009} + \frac{1}{4013} + \frac{1}{4017} + \frac{1}{4021} + \frac{1}{4027} + \frac{1}{4033} + \frac{1}{4039} + \frac{1}{4043} + \frac{1}{4049} + \frac{1}{4053} + \frac{1}{4059} + \frac{1}{4063} + \frac{1}{4069} + \frac{1}{4073} + \frac{1}{4079} + \frac{1}{4081} + \frac{1}{4087} + \frac{1}{4093} + \frac{1}{4099} + \frac{1}{4103} + \frac{1}{4109} + \frac{1}{4113} + \frac{1}{4117} + \frac{1}{4121} + \frac{1}{4127} + \frac{1}{4133} + \frac{1}{4139} + \frac{1}{4143} + \frac{1}{4149} + \frac{1}{4153} + \frac{1}{4159} + \frac{1}{4163} + \frac{1}{4169} + \frac{1}{4173} + \frac{1}{4179} + \frac{1}{4181} + \frac{1}{4187} + \frac{1}{4193} + \frac{1}{4199} + \frac{1}{4203} + \frac{1}{4209} + \frac{1}{4213} + \frac{1}{4217} + \frac{1}{4221} + \frac{1}{4227} + \frac{1}{4233} + \frac{1}{4239} + \frac{1}{4243} + \frac{1}{4249} + \frac{1}{4253} + \frac{1}{4259} + \frac{1}{4263} + \frac{1}{4269} + \frac{1}{4273} + \frac{1}{4279} + \frac{1}{4281} + \frac{1}{4287} + \frac{1}{4293} + \frac{1}{4299} + \frac{1}{4303} + \frac{1}{4309} + \frac{1}{4313} + \frac{1}{4317} + \frac{1}{4321} + \frac{1}{4327} + \frac{1}{4333} + \frac{1}{4339} + \frac{1}{4343} + \frac{1}{4349} + \frac{1}{4353} + \frac{1}{4359} + \frac{1}{4363} + \frac{1}{4369} + \frac{1}{4373} + \frac{1}{4379} + \frac{1}{4381} + \frac{1}{4387} + \frac{1}{4393} + \frac{1}{4399} + \frac{1}{4403} + \frac{1}{4409} + \frac{1}{4413} + \frac{1}{4417} + \frac{1}{4421} + \frac{1}{4427} + \frac{1}{4433} + \frac{1}{4439} + \frac{1}{4443} + \frac{1}{4449} + \frac{1}{4453} + \frac{1}{4459} + \frac{1}{4463} + \frac{1}{4469} + \frac{1}{4473} + \frac{1}{4479} + \frac{1}{4481} + \frac{1}{4487} + \frac{1}{4493} + \frac{1}{4499} + \frac{1}{4503} + \frac{1}{4509} + \frac{1}{4513} + \frac{1}{4517} + \frac{1}{4521} + \frac{1}{4527} + \frac{1}{4533} + \frac{1}{4539} + \frac{1}{4543} + \frac{1}{4549} + \frac{1}{4553} + \frac{1}{4559} + \frac{1}{4563} + \frac{1}{4569} + \frac{1}{4573} + \frac{1}{4579} + \frac{1}{4581} + \frac{1}{4587} + \frac{1}{4593} + \frac{1}{4599} + \frac{1}{4603} + \frac{1}{4609} + \frac{1}{4613} + \frac{1}{4617} + \frac{1}{4621} + \frac{1}{4627} + \frac{1}{4633} + \frac{1}{4639} + \frac{1}{4643} + \frac{1}{4649} + \frac{1}{4653} + \frac{1}{4659} + \frac{1}{4663} + \frac{1}{4669} + \frac{1}{4673} + \frac{1}{4679} + \frac{1}{4681} + \frac{1}{4687} + \frac{1}{4693} + \frac{1}{4699} + \frac{1}{4703} + \frac{1}{4709} + \frac{1}{4713} + \frac{1}{4717} + \frac{1}{4721} + \frac{1}{4727} + \frac{1}{4733} + \frac{1}{4739} + \frac{1}{4743} + \frac{1}{4749} + \frac{1}{4753} + \frac{1}{4759} + \frac{1}{4763} + \frac{1}{4769} + \frac{1}{4773} + \frac{1}{4779} + \frac{1}{4781} + \frac{1}{4787} + \frac{1}{4793} + \frac{1}{4799} + \frac{1}{4803} + \frac{1}{4809} + \frac{1}{4813} + \frac{1}{4817} + \frac{1}{4821} + \frac{1}{4827} + \frac{1}{4833} + \frac{1}{4839} + \frac{1}{4843} + \frac{1}{4849} + \frac{1}{4853} + \frac{1}{4859} + \frac{1}{4863} + \frac{1}{4869} + \frac{1}{4873} + \frac{1}{4879} + \frac{1}{4881} + \frac{1}{4887} + \frac{1}{4893} + \frac{1}{4899} + \frac{1}{4903} + \frac{1}{4909} + \frac{1}{4913} + \frac{1}{4917} + \frac{1}{4921} + \frac{1}{4927} + \frac{1}{4933} + \frac{1}{4939} + \frac{1}{4943} + \frac{1}{4949} + \frac{1}{4953} + \frac{1}{4959} + \frac{1}{4963} + \frac{1}{4969} + \frac{1$$

Confronto delle dimostrazioni proposte: storia e attività semiotica

- La rappresentazione euclidea dei numeri era basata su segmenti: i numeri venivano dunque oggettivati in entità concrete mediante le quali la rappresentazione di un insieme infinito (o di una quantità infinita) non era possibile.



Confronto delle dimostrazioni proposte: storia e attività semiotica

- Il simbolismo matematico al tempo di Euler **rendeva possibile calcoli impensabili nell'Antichità** o anche nel XVI secolo: la costruzione dell'espressione

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right)\left(1 - \frac{1}{11}\right)} \& c.$$

dalla serie $1/(1-x) = 1+x+x^2+x^3+\dots$ è essenziale.

- Inoltre i segni matematici sono stati elaborati per risolvere un problema mediante **procedure che erano considerate legittime**: ogni cultura ha i propri criteri di distinguere tra procedure dimostrative valide e invalide (Crombie, 1995).

Confronto delle dimostrazioni proposte: storia e attività semiotica

- Il ruolo del simbolo "∞" è molto importante nella dimostrazione di Euler: quando scrive

$$M = \infty = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right)\left(1 - \frac{1}{11}\right)} \& c.$$

Euler si riferisce esplicitamente ad una quantità (un "numero") da considerare "∞" o no.

- Nel momento in cui si confronta un "numero infinito" con una frazione, **l'infinito è coinvolto in una procedura, in un "calcolo"**.

Sommario

- Storia e didattica:** presenza e questioni
- Considerazioni teoriche:** storia e cultura
- Un grande teorema:** Euclide, Kummer, Euler
- Riflessioni conclusive:** elementi storici e didattica



Conclusione: elementi storici e didattica

- Una corretta prospettiva storica mostra che, a parte gli "stili" di dimostrazione, l'universalità della matematica implica una varietà di procedure (Dhombres, 1993, p. 401) in particolari contesti.



Conclusione: elementi storici, didattica, linguaggio

- Naturalmente tale prospettiva richiede un notevole **livello di consapevolezza storica ed epistemologica da parte degli insegnanti**.
- Tuttavia, come abbiamo avuto occasione di ribadire,

ogni transposition didactique richiede necessariamente la presenza di una teoria della conoscenza.

- Per questo le questioni presentate possono essere utilmente considerate nella **formazione degli insegnanti** di matematica.

Conclusione:
la matematica come attività umana

- Dal punto di vista didattico è **utile** proporre diverse dimostrazioni di un teorema: spesso le dimostrazioni suggeriscono “nuovi mondi” di idee matematiche.
- Ma anche introducendo procedure apparentemente legate ad aspetti tecnici, è necessario **riferirsi ad una dimensione culturale ampia e tener conto anche di elementi non matematici.**
- La matematica, come l’arte e la letteratura, è **un’attività umana** che, invece di aver a che fare con verità eterne e astratte, riguarda **costruzioni umane, spesso nate dalla considerazione di problemi.**



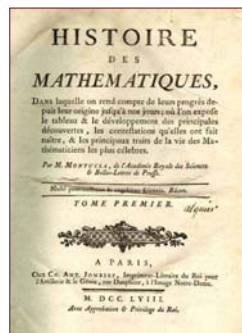
Conclusione:
la matematica come attività umana

- Gli oggetti ai quali il linguaggio della matematica, con il suo simbolismo, fa riferimento sono dunque costruzioni sociali con una precedente storia culturale.
- Negli ultimi dieci anni, nella **ricerca didattica** è emersa la ricerca di concettualizzazioni teoriche che **superino** l’analisi dei contenuti matematici, le tecniche statistiche e la psicologia cognitiva.
- Ci siamo resi conto che **la cognizione è una cosa complicatissima, assai più dell’individuo chiuso in se stesso della filosofia cartesiana (o dell’individuo della sintesi a-storica dell’epistemologia kantiana).**



Conclusione:
la matematica come attività umana

- Siamo dunque diventati consapevoli che la cognizione si trova all’incrocio di numerose strade e che ogni tentativo di comprenderla deve assumere **un atteggiamento multidisciplinare del quale la prospettiva storica è certamente parte integrante.**



Grazie a Tommy Dreyfus (Israele)

A tutti Voi grazie dell’attenzione

“La storiografia, o meglio la storiograficità, in quanto modo di essere dell’Esserci che ricerca, è possibile solo in quanto l’Esserci, nel fondamento del suo essere, è determinato dalla storicità”

*Martin Heidegger
 Sein und Zeit, § 6
 (nella foto, uno dei
 - rarissimi -
 sorrisi di Heidegger)*

