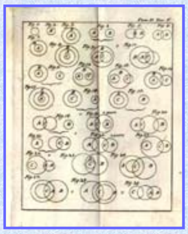
Udine, Polo Rizzi, 9 marzo 2007

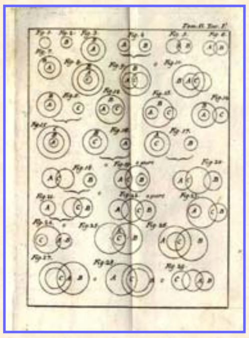
Diagrammi di Eulero-Venn
Insiemi e registri rappresentativi visuali



Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine
bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Sommario



Diagrammi di Eulero-Venn: la loro realizzazione

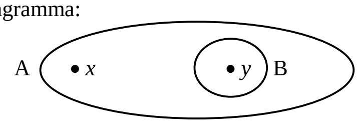
- Nella pratica didattica il ricorso a **diversi registri rappresentativi** è una risorsa preziosa.
- Fondamentali sono le considerazioni di Duval (1995).
- Un problema riferito all'insegnamento-apprendimento degli insiemi è il seguente:

  è certamente possibile definire completamente una qualsiasi situazione (alcuni insiemi, alcuni elementi) enunciando le relazioni tra insiemi ed elementi;

  ma come viene effettivamente ottenuta, sulla base di questa, la rappresentazione con i diagrammi di Eulero-Venn?

Diagrammi di Eulero-Venn: la loro realizzazione

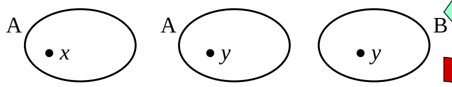
- La realizzazione di una rappresentazione, come un diagramma di Eulero-Venn, richiede un **processo** (e da questo punto di vista potremmo ricordare il **procept** teorizzato da D. Tall).
- Passare dalla proposizione: $x \in A \land y \in A \land y \in B$
  al diagramma:



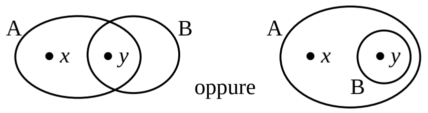
non è, come vedremo, immediato e privo di difficoltà.

il primo passaggio traduce facilmente la proposizione, ma il secondo…

- Potremmo ad esempio distinguere (almeno) tre livelli:
- **proposizionale-simbolico**: $x \in A \land y \in A \land y \in B$
- **proposizionale-visuale**:



- **visuale di Eulero-Venn**:

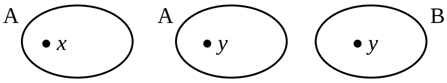


Diagrammi di Eulero-Venn: la loro realizzazione

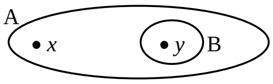
- In effetti la rappresentazione proposizionale-simbolica
  $x \in A \land y \in A \land y \in B$
  riguarda soltanto **le relazioni di appartenenza**;
- mentre **la rappresentazione di Eulero-Venn è più ricca di informazioni (evidenzia, ad esempio, le diverse intersezioni e le inclusioni).**
- Tuttavia nella pratica didattica la realizzazione di una completa rappresentazione di Eulero-Venn sulla base delle semplici relazioni di appartenenza dei singoli elementi ai singoli insiemi viene talvolta data per scontata…

Diagrammi di Eulero-Venn: la loro realizzazione

- Esaminiamo il passaggio "delicato". Da qui:



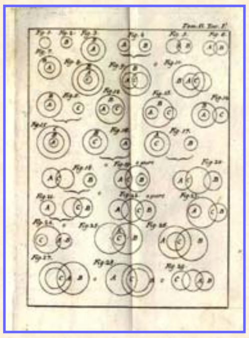
- si deve passare ad esempio a:



- Nella rappresentazione finale tutti gli elementi (x, y) e tutti gli insiemi (A, B) **compaiono una sola volta.** Ci sarebbero due possibilità per giungere a ciò…

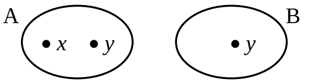
Sommario

- **Il problema**
  insiemi e figure
- **Gli allievi:**
  Prima il contenitore!
- **Ma c'è una "regola"?**
  Brutte sorprese
- **Simboli e figure**
  Considerazioni importanti
- **Riflessioni conclusive**
  Linguaggi, linguaggio



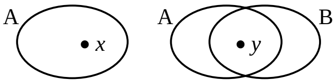
Diagrammi di Eulero-Venn: c'è ad esempio una "fase intermedia"?

- Potremmo inizialmente "unificare" **gli insiemi:**



Intermedia- -insiemi

- Oppure, seconda possibilità: "unificare" **gli elementi:**



Intermedia- -elementi

- La prima può essere la "fase intermedia dei singoli insiemi" e la seconda "dei singoli elementi". Come ottenerle? **Descrivono i comportamenti degli allievi?**

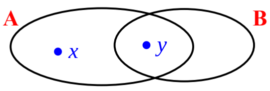
Diagrammi di Eulero-Venn: il comportamento degli studenti

- Alcune esperienze (in progress) hanno coinvolto studenti della scuola primaria e secondaria di I grado (9-12 anni) e hanno evidenziato che molti tendono a:
  – tracciare **prima gli insiemi ("contenitori");**
  – e **successivamente inserire gli elementi.**
- Ciò può collegarsi (anche) alla struttura predicativa **"l'elemento appartiene all'insieme"** (più spesso utilizzata rispetto a "l'insieme contiene l'elemento").
- Tuttavia **non** è stata riscontrata la presenza di fasi intermedie come quelle precedentemente ipotizzate.
- **Problema: come si realizza lo "schema grafico"?**

Alcuni studenti cercano di predisporre uno schema grafico generale…

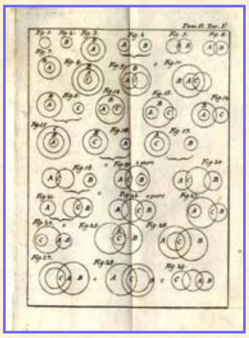
- Seguiamo alcuni allievi: **si può rappresentare una situazione insiemistica** (descritta proposizionalmente mediante le singole relazioni di appartenenza) **in un diagramma di Eulero-Venn "precostituito"?**
- Qualche allievo tende a **predisporre uno schema "della massima generalità"** in cui inserire gli elementi, sulla base delle relazioni di appartenenza:

$x \in A \wedge y \in A \wedge y \in B$



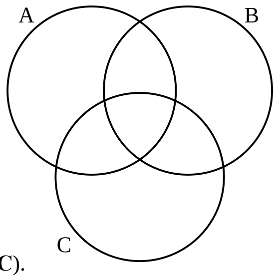
Sommario

- **Il problema**
  Insiemi e figure
- **Gli allievi**
  Prima il contenitore!
- **Ma c'è una "regola"?**
  Brutte sorprese
- **Simboli e figure**
  Considerazioni importanti
- **Riflessioni conclusive**
  Linguaggi, linguaggio



C’è una *regola* per disegnare insiemi?

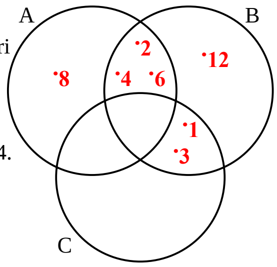
- **“Regola”:** disegnare un diagramma col numero dato di insiemi (ad esempio: **3**) in modo da ottenere **“tutte le intersezioni possibili”**.
- Si contrassegnano gli insiemi con le lettere indicanti gli insiemi dati (ad esempio: **A, B, C**).



- Poi si rappresentano gli insiemi **in forma tabulare**,
- si determinano **tutte le intersezioni degli insiemi**
- e **si inseriscono gli elementi** nel diagramma.

C’è una *regola* per disegnare insiemi?

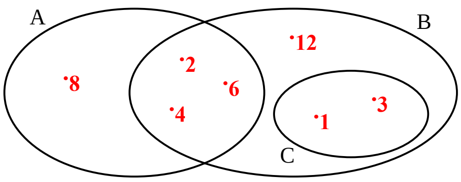
- **Ad esempio,** siano: **A** insieme dei naturali pari tra 1 e 9; **B** l’insieme dei divisori di 12; **C** l’insieme dei naturali dispari tra 0 e 4.
- A = {2; 4; 6; 8}
  B = {1; 2; 3; 4; 6; 12}
  C = {1; 3}
- $A \cap B$ = {2; 4; 6}
  $A \cap C = \varnothing$
  $B \cap C$ = {1; 3}
- $A \cap B \cap C = \varnothing$



- Ora disponiamo di una rappresentazione che potrà essere utile per impostare la risoluzione di esercizi…

C’è una *regola* per disegnare insiemi?

- La rappresentazione ottenuta può essere presentata diversamente. Ad esempio, nel diagramma:



“di Eulero” **non ci sono i sottoinsiemi vuoti.**

- Analizziamo però più in dettaglio questa “regola” e in particolare le modalità di rappresentazione **“a fiore”**.

Un’osservazione… combinatoria

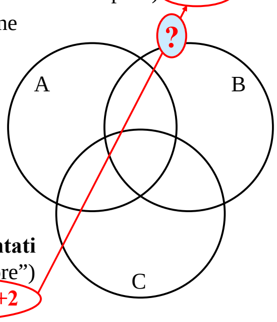
- Con riferimento alla rappresentazione che si ottiene operando come descritto finora (nel caso, ad esempio, di tre insiemi A, B, C), quante possibilità abbiamo per la “collocazione” di un elemento x?

	abbreviamo:
$x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$	**A**
$x \in B \wedge x \notin A \wedge x \notin C$	**B**
$x \in C \wedge x \notin A \wedge x \notin B$	**C**
$x \in A \wedge x \in B \wedge x \notin C$	**AB**
$x \in A \wedge x \in C \wedge x \notin B$	**AC**
$x \in B \wedge x \in C \wedge x \notin A$	**BC**
$x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C$	**ABC**
$x \notin A \wedge x \notin B \wedge x \notin C$	$\varnothing$

Un’osservazione… combinatoria

- Evidentemente **3 insiemi portano a 8 possibilità** diverse (ricordiamo l’insieme delle parti): **$2^3 = 8$**
- Il caso $n = 3$ riflette bene questa situazione:

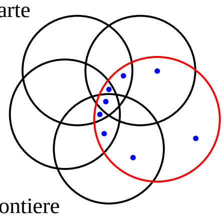
  il piano viene infatti suddiviso in 8 parti.



- Ma in generale, per esprimere il numero di parti in cui il piano viene suddiviso da n insiemi **così rappresentati** (con uno schema “a fiore”) troviamo: **$P(n) = n^2-n+2$**

Un’osservazione… combinatoria

- Dimostriamo **per induzione** che: $P(n) = n^2-n+2$
- $P(1) = 2$ (un insieme non vuoto e non coincidente con tutto il piano, individua una parte “interna” e una “esterna”).
- Sia poi: $P(m) = m^2-m+2$
- L’aggiunta di un **insieme** (come in figura) fa aumentare il numero di parti di $2m$: la frontiera del “nuovo” insieme tocca $2m$ volte le “vecchie” frontiere (e genera **$2m$ nuove parti**, nel disegno, il caso $m = 4$)



- $P(m+1) = P(m)+2m = (m^2-m+2)+2m =$
  $= m^2+2m+1-m-1+2 = (m+1)^2-(m+1)+2$ c.v.d.

Un’osservazione… combinatoria

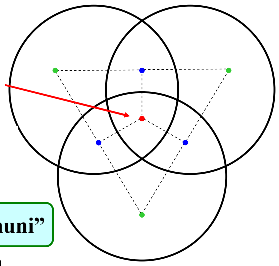
- Ai nostri allievi possiamo inoltre proporre un **ricavo elementare** di $P(n) = n^2 - n + 2$. Sia ancora $n = 3$.

1 parte comune a tutti

3 parti comuni a 2 insiemi

3 parti (2·3/2) “non comuni”

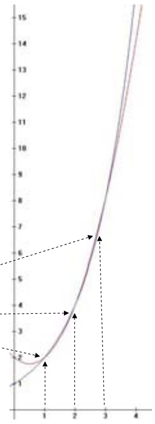
…e la parte “esterna”



Totale: 8 parti

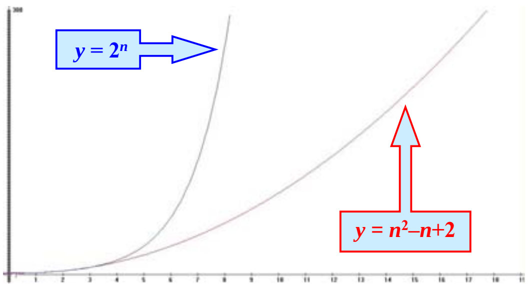
Le parti: quante sono?

- Se prendiamo dunque in considerazione il caso generale, il numero delle parti ottenute graficamente **non coincide** con quello calcolato per via combinatoria.
- Infatti $\boldsymbol{n^2 - n + 2 = 2^n}$ soltanto per i valori:
- $n = 1$
- $n = 2$
- $n = 3$



Le parti: quante sono?

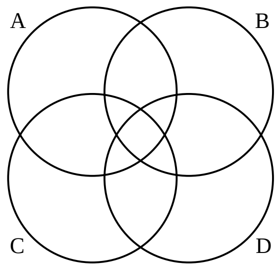
- Un esame qualitativo dei diagrammi in un riferimento non monometrico ($0 \le y \le 300$) evidenzia che $n^2 - n + 2$ è sempre “più piccolo” rispetto a 2^n al crescere di $n > 3$.



Un… controesempio

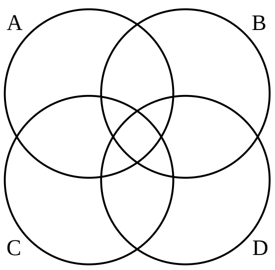
- Dunque il procedimento presentato per rappresentare n insiemi può rivelarsi **insufficiente** quando $n > 3$.
- Consideriamo un esempio in cui sia $n = 4$:
- A = {1}
- B = {2}
- C = {2}
- D = {1}
- Risulta:
- A∩D = {1}
- B∩C = {2}

  e tutte le altre intersezioni sono ∅.



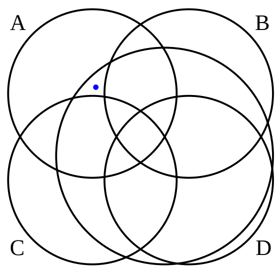
Un… controesempio

- Si noti che la rappresentazione “a fiore” della quale ci stiamo occupando consente di considerare le parti indicate da (con il solito significato dei simboli):
- A B C D
- AB BD CD AC
- ABC ABD BDC ACD
- ABCD
- Chiaramente “manca qualcosa”: l’esercizio proposto richiede di considerare **AD**, **BC**.



Un… controesempio

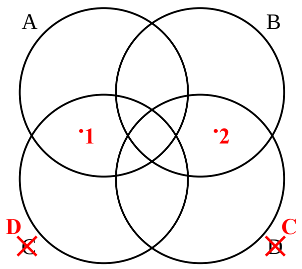
- Una possibile variazione dello “schema generale” per migliorare la situazione, ad esempio per ottenere AD, potrebbe essere ottenuta “aumentando” le dimensioni della rappresentazione dell’insieme D.
- In questo modo si ha a disposizione AD…
- … ma si perde ABC.
- Si può concludere che nel caso di 4 insiemi lo schema **non è “generale”!**



Un… controesempio

- Il procedimento può essere modificato diversamente.
- Si osservi che (nel nostro caso) una soluzione si ottiene cambiando la disposizione degli insiemi.
- A = {1}
- B = {2}
- C = {2}
- D = {1}
- Risulta:
- A∩D = {1}
- B∩C = {2}

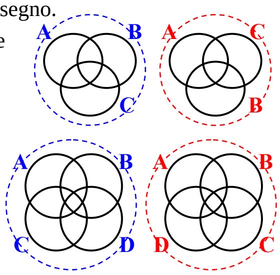
  e tutte le altre intersezioni sono ∅



Un… controesempio

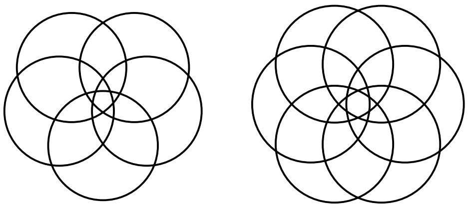
- La differenza tra il caso n = 3 e i casi con valori superiori di n si collega (anche) a come gli insiemi dati sono disposti nel disegno.
- Per n = 3 una variazione non porta cambiamenti di insiemi "confinanti"

  (si notino le possibilità di intersezione di due soli insiemi).
- Per n = 4 la variazione **porta cambiamenti!**
- **A diverse disposizioni corrispondono dunque diverse assunzioni implicite.**



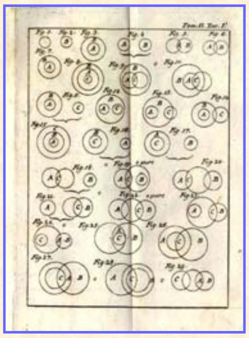
Un… controesempio

- Situazioni più complicate si presentano quando si considera un numero **più elevato** di insiemi.
- Ma la loro incidenza didattica è meno rilevante e non ce ne occuperemo.



Sommario

- **Il problema**
  Insiemi e figure
- **Gli allievi**
  Prima il contenitore!
- **Ma c'è una "regola"?**
  Brutte sorprese
- **Simboli e figure**
  Considerazioni importanti
- **Riflessioni conclusive**
  Linguaggi, linguaggio

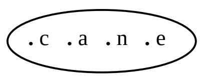


Prima considerazione: le assunzioni implicite

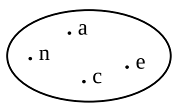
- L'uso della rappresentazione visua… Eulero-Venn) può essere molto in… **scorrette assunzioni implicite.**
- Consideriamo ad esempio l'insiem… la parola *cane* scritto in rappresent…
  {c, a, n, e}
- Esso **non deve far pensare ad un "ordine"** tra gli elementi (un ordine corrispondente all'ordine delle lettere nell'ordinaria scrittura della parola).
- Si tratterebbe di un'assunzione del tutto **estranea alla nozione di insieme!**

Prima considerazione: le assunzioni implicite

- Una rappresentazione visuale (mediante i diagrammi di Eulero-Venn) può risultare utile. Ad esempio, l'insieme delle lettere della parola *cane* può essere:



ma anche:



- Il secondo è preferibile:
  non "suggerisce" un ordine!
- Tuttavia anche la rappresentazione visuale richiede prudenza…

Prima considerazione:
le assunzioni implicite

- Alcune assunzioni implicite possono infatti riguardare **i “rapporti” di due o più insiemi.**
- L’esempio precedentemente proposto mostra che la scelta di una particolare disposizione di insiemi, rappresentati mediante i diagrammi di Eulero-Venn, può determinare dei vincoli.
- **Perché accade ciò?**
- Tali vincoli, come sopra osservato, **possono influenzare negativamente in modo determinante la comprensione** di una situazione e rendere impossibile la risoluzione di un esercizio.

Seconda considerazione:
un esercizio “delicato”

- Cinque amici, 1, 2, 3, 4, 5, hanno visitato alcune tra le città A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. In particolare:

  1 ha visitato A, B, H, I $\mathbf{1\in A \wedge 1\in B \wedge 1\in H \wedge 1\in I}$

  2 ha visitato B, C, F, J $\mathbf{2\in B \wedge 2\in C \wedge 2\in F \wedge 2\in J}$

  3 ha visitato C, D, G, I $\mathbf{3\in C \wedge 3\in D \wedge 3\in G \wedge 3\in I}$

  4 ha visitato D, E, H, J $\mathbf{4\in D \wedge 4\in E \wedge 4\in H \wedge 4\in J}$

  5 ha visitato A, E, F, G $\mathbf{5\in A \wedge 5\in E \wedge 5\in F \wedge 5\in G}$

  (con chiaro significato dei simboli). Dunque:

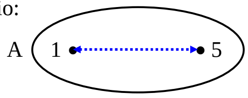
  A = {1, 5}; B = {1; 2}; C = {2; 3}; D = {3; 4};
  E = {4; 5}; F = {2; 5}; G = {3; 5}; H = {1; 4};
  I = {1; 3}; J = {2; 4}

Seconda considerazione:
un esercizio “delicato”

- **Esercizio: rappresentare mediante un diagramma di Eulero-Venn la situazione ora esposta.**
- Notiamo che le scritture:

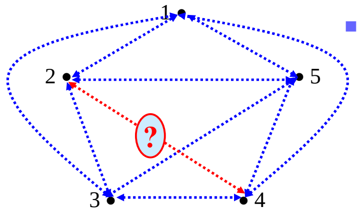
  A = {1, 5}; B = {1; 2}; C = {2; 3}; D = {3; 4};
  E = {4; 5}; F = {2; 5}; G = {3; 5}; H = {1; 4};
  I = {1; 3}; J = {2; 4}

  richiedono di “collegare” ogni elemento in uno stesso insieme con ciascuno degli altri elementi.
- Ad esempio:



Seconda considerazione:
un esercizio “delicato”

- Si tratterebbe allora di realizzare un **grafo con cinque nodi completo** (per le caratteristiche del problema) e **planare** (in modo da permettere il disegno dei diagrammi di Eulero-Venn), ma…



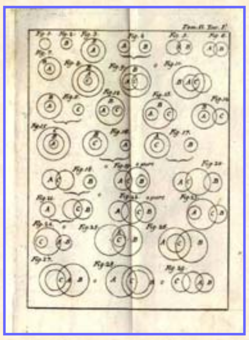
- **… il grafo completo con cinque nodi K_5 (uno dei grafi di Kuratowski) non è un grafo planare!**

Seconda considerazione:
un esercizio “delicato”

- Pertanto: l’esercizio precedente **non** può essere risolto: la situazione descritta da:
  $\mathbf{1\in A \wedge 1\in B \wedge 1\in H \wedge 1\in I \wedge 2\in B \wedge 2\in C \wedge 2\in F \wedge 2\in J \wedge 3\in C \wedge 3\in D \wedge 3\in G \wedge 3\in I \wedge 4\in D \wedge 4\in E \wedge 4\in H \wedge 4\in J \wedge 5\in A \wedge 5\in E \wedge 5\in F \wedge 5\in G}$
- **non può essere espressa mediante un diagramma di Eulero (se non rinunciando alla connessione).**
- I diagrammi di Eulero **non** hanno uno statuto epistemologico equivalente a quello della scrittura simbolica.
- **I due modi di esprimersi hanno una diversa “profondità”, un contenuto informativo diverso!**

Sommario

- **Il problema**
  Insiemi e figure
- **Gli allievi**
  Prima il contenitore!
- **Ma c’è una “regola”?**
  Brutte sorprese
- **Simboli e figure**
  Considerazioni importanti
- **Riflessioni conclusive**
  Linguaggi, linguaggio



Diagrammi di Eulero-Venn: riflessioni conclusive

- La presente ricerca può essere considerata una prosecuzione di quella esposta in: Bagni, G.T.: 2006, Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of Set Theory. *Educational Studies in Mathematics* 62 (3), 259-280.
- In tale articolo si affermava: "le espressioni fondamentali della Teoria degli Insiemi sono di tipo predicativo, mentre i diagrammi di Eulero-Venn le illustrano mediante punti in una figura piana.
- **Gli studenti sono 'affetti' [*affected*] dai segni, nel senso che questi offrono ad essi alcuni percorsi di sviluppo concettuale** (Radford, 2002)".

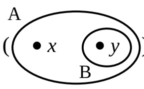
Diagrammi di Eulero-Venn: riflessioni conclusive

- "Le rappresentazioni visuali (i diagrammi di Euler-Venn) inducono gli studenti ad ottenere una certa comprensione di predicabilità. […]
- Attraverso il ricorso a ciascuno di questi registri di rappresentazione semiotica **gli studenti costruiscono aspetti parziali della 'immagine concettuale' dell'oggetto**, aspetti che restano tuttavia in 'compartimenti separati', almeno per quanto riguarda certi modo di procedere".
- **Inoltre quanto sopra visto mostra che i diversi registri di rappresentazione semiotica non sempre risultano "equivalenti".**

Diagrammi di Eulero-Venn: riflessioni conclusive

- È dunque molto importante (seguendo ancora: Duval, 1995) controllare il coordinamento dei registri rappresentativi…
- … ma è anche necessario **chiedersi in che misura tale coordinamento risulti possibile.**
- La rappresentazione mediante i diagrammi di Eulero-Venn è **un processo certamente non banale** e non è "isomorfa" alla rappresentazione simbolica proposizionale delle singole relazioni di appartenenza.
- È ovviamente indispensabile che l'insegnante di matematica tenga conto di ciò!

Diagrammi di Eulero-Venn: riflessioni conclusive

- Che cosa dunque "rappresentano" le rappresentazioni?
- E più in particolare: come si lega una rappresentazione simbolico-proposizionale ($x \in A \wedge y \in A \wedge y \in B$) ad una grafica (

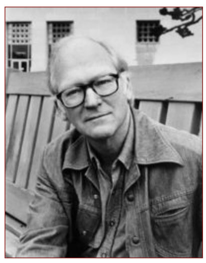
)?
- "Le proposizioni" non devono più essere "pensate come espressioni dell'esperienza, né come rappresentazioni di una realtà extra-esperienziale", bensì "come stringhe di segni e rumori usati dagli esseri umani **nello sviluppo e nella ricerca di pratiche sociali**" (Rorty, 1994, p. 146).

Diagrammi di Eulero-Venn: riflessioni conclusive

- Ogni modalità mediante la quale esprimiamo la matematica **ha caratteristiche proprie e può sintetizzare tipi diversi di informazione** (la singole relazioni di appartenenza, le inclusioni etc.).
- Ogni modalità inoltre si collega ai diversi usi, alle pratiche sociali.
- Non appare dunque corretto pensare alle varie modalità di espressione matematica come a dei linguaggi sostanzialmente equivalenti, isomorfi, come a **forme diverse (basate su diverse convenzioni) di un preteso, assoluto "linguaggio matematico".**

Diagrammi di Eulero-Venn: riflessioni conclusive

- "[…] Non esiste qualcosa come un linguaggio, se un linguaggio deve somigliare a quel che hanno creduto molti filosofi e linguisti. […] Dobbiamo abbandonare il tentativo di far luce su come comunichiamo facendo appello a convenzioni".



Donald Davidson

(A Nice Derangement of Epitaphs. In: *Truth and Interpretation*. Blackwell, Oxford 1986, pp. 445-446.)

A tutti Voi grazie dell'attenzione

Ai nostri allievi e agli insegnanti buon lavoro e buon divertimento con la teoria degli insiemi…

***…e con* "la più originale creazione dello spirito umano: la matematica"**
(Alfred N. Whitehead)