Udine, Polo Rizzi, 2 marzo 2007

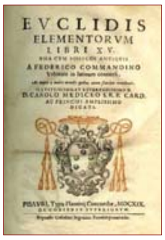
Euclide tra rigore e vivacità culturale: alle radici storiche della matematica

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica e Informatica
Università di Udine

bagni@dimi.uniud.it
www.syllogismos.it

Alle radici storiche della matematica

- "È lecito affermare, senza tema di essere tacciati di esagerazione, che **la storia delle matematiche comincia con la storia della civiltà**"
(Gino Loria, 1929)



- Ma che cos'è la ***matematica***?
- Per rispondere rifletteremo su alcune antichissime esperienze matematiche…
- …e su di un grande protagonista della storia della cultura umana.

Sommario. Gli Elementi nella matematica e nella cultura greca

- **Introduzione**: matematica e scrittura
- **Il quadro teorico**: matematica e storia
- **Un capolavoro**: numeri primi e infinito
- **La storia dell'algebra**: parole, figure e simboli
- **Riflessioni conclusive**: rigore e vivacità di Euclide

Introduzione: matematica e scrittura

- "È lecito affermare, senza tema di essere tacciati di esagerazione, che **la storia delle matematiche comincia con la storia della civiltà**" (Loria, 1929).
- Torniamo a questa affermazione che (sostanzialmente giusta) richiede qualche approfondimento.
- Lo sviluppo del **pensiero** e lo sviluppo del **linguaggio** (pur non coincidendo) si influenzano reciprocamente (Vygotskij, 1934). E la registrazione del pensiero espresso dal linguaggio richiede la **scrittura**.
- Storicamente ha dunque senso domandarsi **quale attività matematica può essere associata alla nascita della scrittura**.

Introduzione: primi documenti scritti

- La nascita della scrittura in Mesopotamia, in Egitto e nell'Egeo non avviene contemporaneamente: **nell'Asia anteriore e nella valle del Nilo compare nel IV millennio a.C. mentre i sigilli di Arkhanès, a Creta, risalgono alla fine del III millennio a.C.**
- Tuttavia i processi che portano alla comparsa dei primi documenti scritti sono analoghi.
- Faremo riferimento ai complessi sorti a Creta con funzioni **economiche, politiche e cultuali** denominati convenzionalmente **palazzi** (Godart, 2001), simili a complessi dello stesso tipo costruiti in molte zone dell'Asia anteriore.

La tavoletta PH-11 di Festo

- **1700 a.C.**
- Proviene dal vano XXV del palazzo di Festo: l'argilla è stata cotta dall'incendio che ha distrutto il palazzo.
- Compaiono **sbarrette** verticali e sbarrette orizzontali:
- **le verticali rappresentano unità,**
- **le orizzontali decine.**

La tavoletta **PH-8** di Festo

- Compaiono sbarrette abbinate a **ideogrammi** (o “logogrammi”).
- Un numero (ad esempio 7) non basta per effettuare una chiara registrazione:

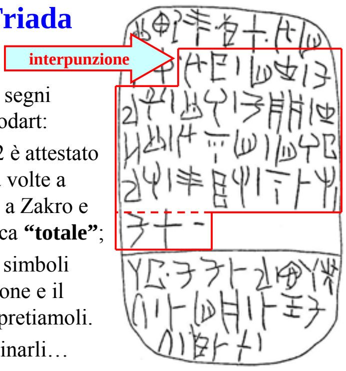
  nella prima riga sono registrati dei **panieri**.
- In altre tavolette (**PH-7**) la registrazione è corredata da **annotazioni in scrittura lineare A.**

Le tavolette di Festo: osservazioni

- Passando da PH-11 a PH-8 il sistema viene reso più specifico, **suscettibile di particolarizzazione**.
- Inoltre, come era accaduto nel caso della scrittura della lingua sumerica, **l’espressione di concetti astratti** diventava progressivamente possibile.
- Si può inizialmente associare ad un segno che rappresenta un oggetto la parola che ha più o meno lo stesso suono (classico esempio sumerico: il disegno di una canna può indicare sia una canna che “restituire”: entrambi i vocaboli corrispondono al suono “gi”).
- La conoscenza di tali corrispondenze può portare alla formazione di un’élite culturale e politica.

La tavoletta **HT-117** di Haghia Triada

- **1450 a.C.**
- Interpretiamo i segni seguendo L. Godart:
- il gruppo 81-02 è attestato quasi quaranta volte a Haghia Triada, a Zakro e a Festo: significa **“totale”**;
- consideriamo i simboli tra l’interpunzione e il “totale” e interpretiamoli.
- Possiamo riordinarli…

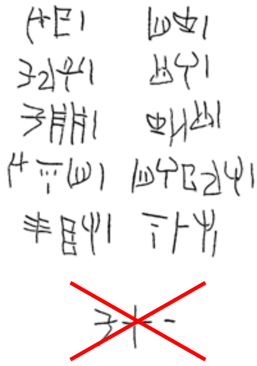


La tavoletta **HT-117** di Haghia Triada

- Ci sono dieci tipi di “oggetti” diversi,

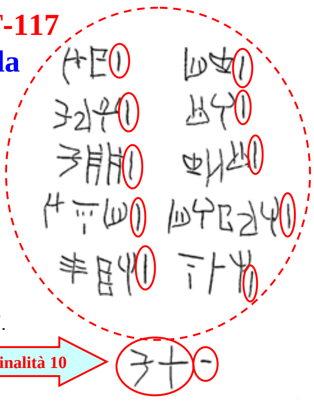
  un oggetto per tipo

  e un totale (10).
- Ci troviamo di fronte a un’antica addizione?
- Qualcosa non torna: **manca l’omogeneità** degli addendi!
- L’interpretazione non è così semplice…



La tavoletta **HT-117** di Haghia Triada

- I segni per indicare l’unità esprimono la presenza di “un” elemento.
- La considerazione della globalità è evidenziata dalla presenza del termine che significa “totale”.



l’insieme considerato ha cardinalità 10

Ruolo dei numerali in HT-117

- La rappresentazione è preceduta da una descrizione introduttiva (scandita da due interpunzioni).
- I numerali in HT-117 hanno **ruoli differenti**:

  quelli unitari esprimono il coinvolgimento di un (singolo) elemento nell’insieme da considerare;

  l’ultimo (10), preceduto dal termine “totale”, esprime la cardinalità dell’insieme.
- Nelle tavolette PH-11 e PH-8 la valutazione quantitativa era ben più elementare.
- **La nascita della scrittura come attività di simbolizzazione è quindi strettamente collegata all’attività matematica.**

Quale matematica da PH-11 a HT-117?

PH-11	numerali primitivi	valutazione quantitativa di **insiemi** concreti **di oggetti**
PH-8	ideogrammi	
HT-117	numerali per "indicare appartenenza" e numerali per esprimere la cardinalità; lineare A	valutazione quantitativa di **insiemi introdotti a partire da oggetti descritti**

Una matematica cretese?

- La nascita della scrittura (con numerali primitivi e sillabogrammi) a Creta è collegata all'evoluzione della **situazione economica**: nel periodo protopalaziale si sviluppano sistemi amministrativi il cui scopo è informare il palazzo su movimenti legati ai magazzini.
- **Ma si tratta di "matematica"?**
- Certamente la testimonianza di un'attività di conteggio (elementare o evoluta) è significativa.
- Tuttavia per trovare le radici della matematica come essa è intesa oggi nella cultura occidentale dovremo precisare un adeguato **quadro teorico**.
- E fare un balzo in avanti nel tempo.

Undici secoli dopo: Euclide di Alessandria

*e che Euclide scrisse il più importante libro di **MATEMATICA** di tutti i tempi!*

- La vita di Euclide è del tutto sconosciuta.
- La stessa indicazione geografica è incerta: a volte venne confuso con il filosofo **Euclide di Megara**.
- Sappiamo che alcuni discepoli di Euclide operavano nel III sec. a.C. in Alessandria…

Sommario. Gli Elementi nella matematica e nella cultura greca

- **Introduzione**: matematica e scrittura
- **Il quadro teorico**: matematica e storia
- **Un capolavoro**: numeri primi e infinito
- **La storia dell'algebra**: parole, figure e simboli
- **Riflessioni conclusive**: rigore e vivacità di Euclide

Matematica e conoscenze (Drouhard)

Il quadro teorico a cui faremo riferimento è introdotto da una domanda proposta da J.-P. Drouhard

- **Conoscenza del I ordine**: i "contenuti" di ogni (vera) affermazione matematica (definizioni, teoremi…).
- **Conoscenza del II ordine**: ciò che permette al discorso matematico di funzionare. Due tipi: uno **semiotico** ed uno riguardante la **validità** e la verità. Per fare matematica è necessario esprimersi nei registri rappresentativi (simbolico, grafico etc.) e sapere che ci sono regole per argomentare e dedurre.
- **Le tavolette cretesi coinvolgono conoscenze del I ordine e del II ordine (aspetto semiotico).**

Matematica e conoscenze (Drouhard)

- **Conoscenza del III ordine**: riguarda le concezioni della natura della conoscenza del I e II ordine (interpretazione stretta: c'è una sola conoscenza del III ordine, secondo la quale l'attività matematica consiste nell'operare con la conoscenza del I ordine secondo le "regole" date dalla conoscenza del II ordine).
- Dunque le conoscenze del III ordine fanno capire che si sta facendo **"matematica" (e non qualcos'altro)**.
- La conoscenza del III ordine sarebbe in particolare collegata ad una **definizione della matematica** (ma c'è completo accordo su di essa?).
- **Ciò non può essere riferito alle tavolette cretesi.**

Sommario. Gli Elementi nella matematica e nella cultura greca

- **Introduzione**: matematica e scrittura
- **Il quadro teorico**: matematica e storia
- **Un capolavoro**: numeri primi e infinito
- **La storia dell'algebra**: parole, figure e simboli
- **Riflessioni conclusive**: rigore e vivacità di Euclide

Torniamo a Euclide: alcune dimostrazioni di rara eleganza

- Vogliamo dimostrare che: **se A (ipotesi) allora B (tesi)**
- La **dimostrazione per assurdo** consiste nel negare la tesi (supporre che essa *non* sia vera) e da ciò dedurre una conseguenza assurda (oppure contraria a quanto era stato ammesso per ipotesi).
- La tesi, dunque, **non può non essere vera** quindi (tertium non datur)... è vera!
- Euclide è un maestro nell'applicazione di questa raffinatissima tecnica logica. Come vedremo, uno dei suoi più eleganti risultati è dimostrato per assurdo.

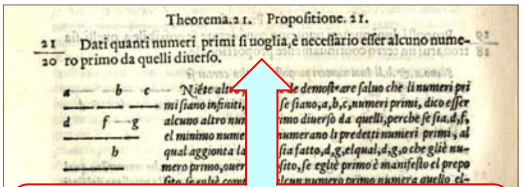
Euclide e i "mattoni" dell'aritmetica: i fondamentali numeri primi

Un numero intero maggiore di 1:

- si dice **primo** se gli **unici** suoi divisori sono se stesso e l'unità: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, …
  (17 = 1·17; **non** ci sono altri interi il cui prodotto è 17)
- si dice **composto** se non è primo: 4 = 2·2, 15 = 3·5, …
- Ogni composto è prodotto di primi: 187 = 11·17 …
- Ma **esiste il "massimo numero primo"?** Esiste un numero al di là del quale tutti i numeri sono composti, si ottengono moltiplicando i precedenti?
- La risposta (**no**) è in uno splendido teorema euclideo, dimostrato per assurdo.

Ma attenzione: Euclide non afferma che i numeri primi sono "infiniti"!

- Esaminiamo gli *Elementi* curati da **Tartaglia** (1569):


Theorema.21. Propositione.21.
21 Dati quanti numeri primi si voglia, è necessario esser alcuno numero primo da quelli diverso.

Il teorema *originale* di Euclide è formulato così: "Assegnata una qualsiasi quantità di numeri primi, esiste un numero primo diverso da quelli dati"

Mai Euclide avrebbe trattato un'infinità attuale di numeri primi!

- In Euclide l'infinito è **potenziale, non attuale**.
- Il teorema di Euclide è un capolavoro di eleganza. ed è un capolavoro di **coerenza**.
- Un teorema che afferma esplicitamente che i numeri primi sono **infiniti** è stato pubblicato **nel XIX secolo da E.E. Kummer**.
- La dimostrazione di Kummerè molto simile a quella euclidea, ma…
- … il contesto socio-culturale in cui i teoremi sono stati elaborati è ben diverso!

Sommario. Gli Elementi nella matematica e nella cultura greca

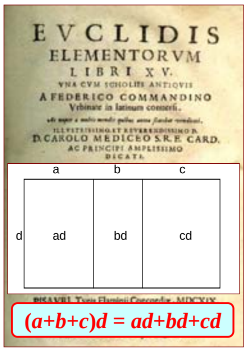
- **Introduzione**: matematica e scrittura
- **Il quadro teorico**: matematica e storia
- **Un capolavoro**: numeri primi e infinito
- **La storia dell'algebra**: parole, figure e simboli
- **Riflessioni conclusive**: rigore e vivacità di Euclide

Che cos'è l'algebra? Una domanda da "storicizzare"

- Il settore della matematica che consente di risolvere problemi come:
  "Trovare il valore da assegnare a x affinché sia: 2x+1 = 7"
  dunque equazioni espresse mediante simboli specifici, risale al XVI secolo: **algebra simbolica**.
- Una disciplina espressa meno tecnicamente può risalire al III secolo: **algebra sincopata**.
- Ma i problemi che noi oggi risolviamo algebricamente sono presenti a partire dal II millennio a.C., espressi mediante descrizioni verbali: **algebra retorica**.

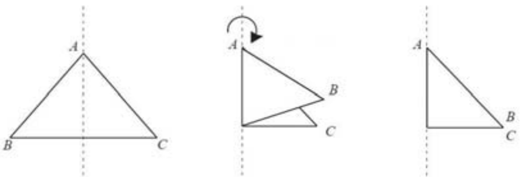
Ma… non corriamo troppo: Euclide e l'algebra geometrica

- **Proposizione 1, II libro degli *Elementi*:** "Se si dànno due segmenti, e si divide uno di essi in quante parti si voglia, il rettangolo compreso dai due segmenti è equivalente alla somma dei rettangoli compresi dal segmento indiviso e da ciascuna delle parti dell'altro".



Seconda riflessione: attualità (anche didattica) di Euclide

- Seguendo la classificazione di D. Tall (2001), molte dimostrazioni possono basarsi sulla **visualizzazione**.
- In geometria, ad esempio, l'aspetto visuale può essere collegato ad attività "fisiche". Dimostriamo che un triangolo con due lati uguali ha due angoli uguali:



Attualità di Euclide: visualizzazione e dimostrazione

- Ma Euclide usa la visualizzazione geometrica **anche per dimostrare delle proprietà algebriche.**
- Nello spirito del II libro degli *Elementi*, ad esempio, dimostriamo che $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
  [Ad es.: $9^2 - 5^2 = (9+5)(9-5)$, infatti: $81 - 25 = 56 = 14 \cdot 4$]

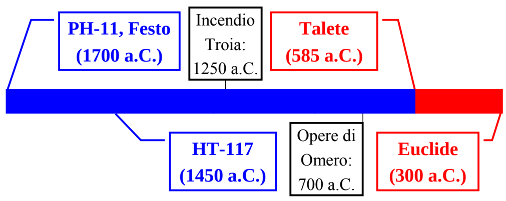
Un approccio recentemente rivalutato dalla didattica della matematica!

Sommario. Gli Elementi nella matematica e nella cultura greca

- **Introduzione**: matematica e scrittura
- **Il quadro teorico**: matematica e storia
- **Un capolavoro**: numeri primi e infinito
- **La storia dell'algebra**: parole, figure e simboli
- **Riflessioni conclusive**: rigore e vivacità di Euclide

La grande stagione della matematica culminata negli *Elementi* di Euclide

- Euclide può essere considerato il **punto di arrivo** di una grande stagione della matematica, iniziata quasi tre secoli prima con Talete di Mileto.
- La **preistoria** della matematica greca (anche facendola decorrere solo dalle tavolette di Festo) è molto lunga…



Euclide e lo statuto epistemologico della matematica

- Con **la grande stagione della matematica greca** culminata negli *Elementi* la matematica assume una struttura teorica chiara.
- C'è coinvolgimento di conoscenze:

  del **I ordine** (contenuti)

  del **II ordine** (regole per rappresentare e dedurre)

  del **III ordine** (in rapporto allo statuto epistemologico).

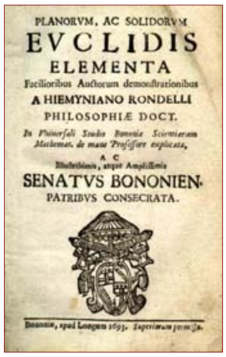
- **definizioni**
- **teoremi**

- **convenzioni rappresentative**
- **tecniche di dimostrazione**

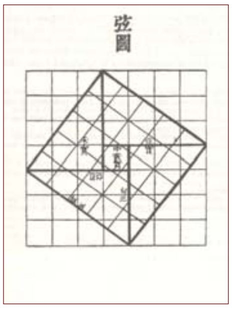
- **(ad esempio) rifiuto di usare l'infinito attuale in matematica**

Euclide e l'importanza della dimostrazione

- I risultati da dimostrare (ad esempio per assurdo) erano ricavati euristicamente, con tecniche che i Greci non accettavano come vere dimostrazioni.
- Nella mentalità eleatico-platonica, la conoscenza non poteva essere ottenuta mediante i sensi: **era la dimostrazione che "stabiliva la verità".**

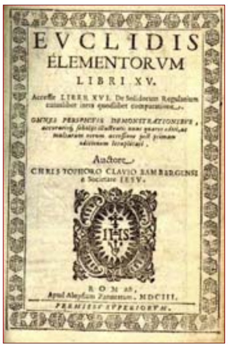


Storia e geografia della matematica: Euclide e la cultura occidentale



- In altre tradizioni matematiche la dimostrazione **non** era considerata come l'elemento fondamentale.
- Ad esempio, in Cina le **dimostrazioni non avevano un ruolo primario**.
- Gli antichi matematici cinesi distinguevano le dimostrazioni *bian* (per il convincimento) e *xiao* (per la comprensione).

Storia e geografia della matematica: Euclide e la cultura occidentale



- Gli *Elementi* tradotti in cinese (1594-1607) da **M. Ricci** e da Xu Guangqi furono apprezzati solo parzialmente in Cina.
- Questo libro fa parte della **"nostra"** matematica. Anzi…

L'impostazione ipotetico-deduttiva degli *Elementi* identifica la matematica occidentale

Grazie a
Jean-Philippe Drouhard (IREM de Nice)
Luis Radford (Ontario)

Per risorse, materiali (scaricabili) e indicazioni bibliografiche si può consultare il sito di servizio per docenti e studenti:
www.syllogismos.it

A tutti Voi grazie dell'attenzione