I

Insiemi e funzioni

1. TEORIA DEGLI INSIEMI

1.1. Insiemi

Dal punto di vista intuitivo, il concetto di insieme può essere fatto corrispondere all'atto mentale mediante il quale associamo alcuni elementi in un tutto unico detto *insieme*. Tale descrizione è però vaga e imprecisa: la teoria degli insiemi può essere introdotta assiomaticamente: l'applicazione del metodo assiomatico alla teoria degli insiemi ebbe in Ernest Zermelo (1871-1953) il principale protagonista (dedicheremo a tale argomento l'appendice A).

In questa fase ci limiteremo ad introdurre le principali nozioni insiemistiche mantenendo un punto di vista intuitivo. Non è richiesta alcuna particolare omogeneità tra gli elementi che costituiscono un insieme: è possibile associare nello stesso insieme un numero qualsiasi di elementi di qualsiasi genere (anche se nel paragrafo 5.2 ci occuperemo della questione dell'eventuale appartenenza di un insieme a se stesso come elemento).

Esempio. È possibile parlare di un insieme a cui appartengono il nome del monte più alto della Terra, l'ultima lettera dell'alfabeto italiano e le soluzioni dell'equazione: $x^2+6 = 5x$. Tale insieme ha elementi: Everest, Z, 2, 3.

Un insieme privo di elementi si dice *insieme vuoto*; si indica col simbolo $\varnothing$.

Esempio. L'insieme costituito dalle soluzioni intere di: $x^3 = 2$ è l'insieme vuoto, $\varnothing$: ciò equivale ad affermare che l'equazione data non ha radici intere.

Affinché una collezione di elementi possa essere classificata come un insieme vero e proprio, deve sempre essere possibile stabilire se un qualsiasi elemento appartiene (o non appartiene) all'insieme così introdotto.

Esempio. Ha senso, nella teoria degli insiemi, parlare dell'insieme costituito dai numeri reali maggiori di 4. Infatti è possibile stabilire oggettivamente se un qualsiasi elemento appartiene o no a tale insieme: per appartenere all'insieme, un elemento deve (contemporaneamente):

- essere un numero reale;
- essere maggiore di 4.

Dunque all'insieme introdotto apparterranno certamente elementi come 59, $\sqrt{19}$, 33/8; mentre non vi apparterranno elementi come −1, 31/8, 4 (che sono numeri reali, ma non sono maggiori di 4), o come Firenze, Hemingway, un esagono regolare, il numero $\sqrt{-5}$ (che non sono numeri reali).

(Contro)esempio. Non ha senso, nella teoria degli insiemi, parlare dell'insieme costituito dai libri *interessanti*: non è infatti possibile affermare oggettivamente se un libro è interessante oppure se non lo è.

È convenzione spesso accettata indicare gli insiemi con lettere maiuscole (A, B, C, ...) e gli elementi con lettere minuscole (*a*, *b*, *c*, ...). L'appartenenza dell'elemento *a* all'insieme A si indica con la scrittura: $a \in \mathrm{A}$ nella quale il simbolo "$\in$" si legge: "appartiene a". La non appartenenza di *b* a B si indica con: $b \notin \mathrm{B}$. Quindi la condizione richiesta per poter parlare di insieme, espressa precedentemente, è: *affinché I sia un insieme, è richiesto che, per ogni elemento a, sia possibile stabilire che l'affermazione* $a \in \mathrm{I}$ *sia vera o falsa*.

Per indicare dettagliatamente gli insiemi, con i loro elementi, si possono scegliere diversi procedimenti. Un primo metodo, detto *rappresentazione tabulare*, consiste nell'elencare tutti gli elementi che costituiscono l'insieme in questione tra parentesi graffe; ad esempio, la scrittura $\mathrm{I} = \{1; 2; 5\}$ significa che all'insieme I appartengono (solamente) gli elementi 1, 2, 5. Notiamo che l'ordine con cui si elencano gli elementi è privo di importanza. Un insieme non presuppone alcun particolare ordinamento dei suoi elementi (a meno che ciò venga esplicitamente indicato); con le scritture:

$$\{1; 2; 5\} \quad \{1; 5; 2\} \quad \{2; 1; 5\} \quad \{2; 5; 1\} \quad \{5; 1; 2\} \quad \{5; 2; 1\}$$

intendiamo lo stesso insieme, avente per elementi 1, 2, 5 (indipendentemente dall'ordine), qualsiasi rappresentazione si scelga tra le sei indicate.

Talvolta la rappresentazione tabulare può essere scomoda e addirittura impraticabile quando l'insieme in questione è costituito da infiniti elementi. La *rappresentazione caratteristica* si ottiene evidenziando (ove ciò sia possibile) una condizione necessaria e sufficiente per l'appartenenza di un elemento all'insieme considerato. La scrittura dell'insieme avrà forma:

{x: x rispetta un'assegnata condizione}

nella quale il simbolo ":" (talvolta sostituito da " |") si legge 'tale che".

Esempio. Indichiamo l'insieme I di interi il cui quadrato è minore di 15:

- rappresentazione tabulare: I = {–3; –2; –1; 0; 1; 2; 3};
- rappresentazione caratteristica: I = {x: x è un numero intero e $-3 \leq x \leq 3$}.

Nell'esempio precedente abbiamo scritto (usando parole tratte dalla lingua italiana) che l'elemento x 'è un numero intero", cioè appartiene all' *insieme costituito dai numeri interi*. Questo insieme è generalmente indicato con il simbolo **Z**. Anche altri insiemi numerici sono di uso frequente:

$\mathbf{N}$	insieme dei numeri naturali
$\mathbf{N_0}$	insieme dei numeri naturali non nulli
$\mathbf{Z}$	insieme dei numeri interi
$\mathbf{Z_0}$	insieme dei numeri interi non nulli
$\mathbf{Z^+}$	insieme di numeri interi positivi
$\mathbf{Z^-}$	insieme dei numeri interi negativi
$\mathbf{Q}$	insieme dei numeri razionali
$\mathbf{Q_0}$	insieme dei numeri razionali non nulli
$\mathbf{Q^+}$	insieme dei numeri razionali positivi
$\mathbf{Q^-}$	insieme dei numeri razionali negativi
$\mathbf{R}$	insieme dei numeri reali
$\mathbf{R_0}$	insieme dei numeri reali non nulli
$\mathbf{R^+}$	insieme dei numeri reali positivi
$\mathbf{R^-}$	insieme dei numeri reali negativi
$\mathbf{C}$	insieme dei numeri complessi

e dunque l'insieme dei numeri interi il cui quadrato è minore di 15 può scriversi $\{x: x \in \mathbf{Z} \text{ e } -2 \leq x \leq 2\}$ oppure $\{x \in \mathbf{Z}: -2 \leq x \leq 2\}$.

1.2. Sottoinsiemi e inclusione

Considerato un insieme A, diremo sottoinsieme B di A un insieme al quale *non appartengono elementi non appartenenti ad A*: dunque B può essere costituito da alcuni elementi di A, o da tutti gli elementi di A, o da nessun elemento.

Definizione. L'insieme B si dice *sottoinsieme* dell'insieme A se ogni elemento di B è elemento di A; si dice anche che B è *incluso* in A e si scrive: $B \subseteq A$.

Tra tutti i sottoinsiemi di un insieme dato A troviamo sempre l'insieme A stesso e l'insieme vuoto $\varnothing$: essi sono detti *sottoinsiemi impropri* di A; un sottoinsieme di A diverso da A stesso e da $\varnothing$ si dice *sottoinsieme proprio* di A.

L'insieme vuoto ammette uno ed un solo sottoinsieme (improprio): $\varnothing$. Un insieme costituito da un solo elemento, $A = \{a\}$, ammette due sottoinsiemi impropri, $\varnothing$ ed A stesso, e non ammette alcun sottoinsieme proprio.

Definizione. Si dice *insieme delle parti* di un insieme I l'insieme $\wp(I)$ avente per elementi tutti i sottoinsiemi (propri ed impropri) di I: $\wp(I) = \{J: J \subseteq I\}$.

Si può verificare che se l'insieme I è costituito da *n* elementi (si dice anche che la *cardinalità* di I è *n*: riprenderemo ed amplieremo il concetto di cardinalità nella sezione II), l'insieme delle parti di I è costituito da 2^n elementi (ovvero: la cardinalità di $\wp(I)$ è 2^n: dimostreremo ciò nel capitolo 7).

Esempio. Consideriamo l'insieme (avente cardinalità 3): $I = \{5; w; z\}$. I suoi sottoinsiemi propri sono:

$$\{5\}, \{w\}, \{z\}, \{5; w\}, \{5; z\}, \{w; z\}$$

I suoi sottoinsiemi impropri sono: $\varnothing$, $\{5; w; z\}$.

L'insieme delle parti (proprie e improprie) dell'insieme I ha cardinalità $2^3 = 8$ ed è, in rappresentazione tabulare:

$$\wp(I) = \{\varnothing, \{5\}, \{w\}, \{z\}, \{5; w\}, \{5; z\}, \{w; z\}, \{5; w; z\}\}$$

Il concetto di inclusione ci permette di riprendere quello di *uguaglianza di due insiemi*. Diremo dunque che i due insiemi A e B sono *uguali*, e scriveremo $A = B$, quando A è sottoinsieme di B e contemporaneamente B è sottoinsieme di A, cioè quando: $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

1.3. Operazioni con gli insiemi: unione, intersezione, differenza

Definizione. L'insieme $A \cup B$, *unione* degli insiemi A, B, è l'insieme al quale appartengono gli elementi che appartengono almeno ad uno degli insiemi A, B: $A \cup B = \{x: x \in A \text{ o } x \in B\}$.

Esempio. L'unione degli insiemi: A = {$x \in \mathbf{R}$: $1<x<5$} e B = {$x \in \mathbf{R}$: $3<x<15$} è l'insieme: $A \cup B$ = {$x \in \mathbf{R}$: $1<x<15$}.

Definizione. L'insieme $A \cap B$, *intersezione* degli insiemi A, B, è l'insieme al quale appartengono gli elementi che appartengono contemporaneamente agli insiemi A, B: $A \cap B = \{x: x \in A \text{ e } x \in B\}$.

Esempio. L'intersezione di: A = {$x \in \mathbf{R}$: $1<x<5$}, B = {$x \in \mathbf{R}$: $3<x<15$} è l'insieme: $A \cap B$ = {$x \in \mathbf{R}$: $3<x<5$}.

Due insiemi la cui intersezione è $\varnothing$ si dicono *disgiunti*. Si verifica che:

$I \cup I = I$ (infatti all'unione di I e di I appartengono tutti e soltanto gli elementi appartenenti a I o a I).

$I \cup \varnothing = I$ (infatti all'unione di I e di $\varnothing$ appartengono tutti e soltanto gli elementi appartenenti a I o a $\varnothing$; ma a $\varnothing$ non appartiene alcun elemento...).

$I \cap I = I$

$I \cap \varnothing = \varnothing$

$I \cup J = J \cup I$ (proprietà commutativa)

$I \cap J = J \cap I$ (proprietà commutativa)

$I \cup (J \cup K) = (J \cup I) \cup K$ (proprietà associativa)

$I \cap (J \cap K) = (J \cap I) \cap K$ (proprietà associativa)

$I \cup (J \cap K) = (I \cup J) \cap (I \cup K)$ (proprietà distributiva)

$I \cap (J \cup K) = (I \cap J) \cup (I \cap K)$ (proprietà distributiva)

Definizione. L'insieme $A \setminus B$, *differenza* degli insiemi A e B, è l'insieme al quale appartengono gli elementi che appartengono ad A ma non appartengono a B: $A \setminus B = \{x: x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

Esempio. La differenza di A = {$x \in \mathbf{R}$: $1<x<5$} e B = {$x \in \mathbf{R}$: $3<x<15$} è l'insieme: $A \setminus B$ = {$x \in \mathbf{R}$: $1<x\leq 3$}.

Per quanto riguarda le proprietà dell'operazione introdotta, si verifica che:

$I \setminus I = \varnothing$ $\quad$ $I \setminus \varnothing = I$ $\quad$ $\varnothing \setminus I = \varnothing$

1.4. Il prodotto cartesiano di due insiemi

Quanto finora esposto a proposito del concetto di insieme non fa riferimento all'ordine con cui gli elementi di un insieme sono elencati. È però possibile, in determinati casi, specificare un particolare ordinamento all'interno di un dato insieme: è quanto ci accingiamo a fare introducendo la *coppia ordinata*.

Siano dati gli insiemi A, B, che supporremo inizialmente non vuoti. Una coppia ordinata di elementi di A e di B si indica con il simbolo: (a; b) (alcuni Autori preferiscono utilizzare il simbolo $<a; b>$).

Intuitivamente, essa è un particolare insieme costituito da due elementi, il *primo* dei quali appartenente ad A, il *secondo* a B. Più precisamente, la coppia ordinata (a; b) può essere introdotta sulla base del concetto di coppia ordinaria (cioè non ordinata) $\{a; b\}$: si può ad esempio scegliere due elementi esterni all'insieme considerato (nel nostro caso, agli insiemi A, B), ad esempio 1, 2, e definire (a; b) come $\{\{1; a\}; \{2; b\}\}$. Alternativamente si può "specificare" quale dei due elementi è da ritenere il primo della coppia ordinata, considerando per (a; b) ad esempio: $\{\{a\}; \{a; b\}\}$.

Definizione. L'insieme A×B, *prodotto cartesiano* degli insiemi A e B, è l'insieme avente per elementi tutte le coppie ordinate (a, b), con $a \in$ A e $b \in$ B: A×B = $\{(a; b)$: $a \in$ A e $b \in$ B$\}$.

Nel caso in cui (almeno) uno dei due insiemi A, B sia ∅, A×B è vuoto.

Esempio. Il prodotto cartesiano di A = $\{c; d\}$ e B = $\{2; 4; 7\}$ è A×B = $\{(c; 2); (d; 2); (c; 4); (d; 4); (c; 7); (d; 7)\}$.

Introduciamo le *proiezioni*. Faremo riferimento ad un qualche sottoinsieme S⊆A×B (l'importanza dei sottoinsiemi del prodotto cartesiano apparirà evidente a partire dal prossimo paragrafo).

Definizione. Sia S⊆A×B. Di dice proiezione di S su A (rispettivamente: su B) l'insieme U = $\{x$: $x \in$ A e $(x; b) \in$ S per almeno un $b\}$ (rispettivamente: $\{y$: $y \in$ B e $(a; y) \in$ S per almeno un $a\}$).

Evidentemente la proiezione di tutto l'insieme (non vuoto) A×B su A è A stesso e su B è B stesso.

Esempio. Sia S il sottoinsieme di **N**×**N** costituito dalle coppie (n; m) tali che $n+m = 3$. Lasciamo al lettore di verificare che S = $\{(0; 3); (1; 2); (2; 1); (3; 0)\}$.

La proiezione di S su **N** è U = {0; 1; 2; 3}.

In questo caso con **N** indichiamo indifferentemente sia il primo che il secondo degli insiemi dei quali viene considerato il prodotto cartesiano **N**×**N**. Tuttavia in generale è necessaria una loro distinzione, come apparirà chiaro dall'esempio seguente.

Esempio. Sia T il sottoinsieme di **N**×**N** costituito dalle coppie (n; m) tali che $2n+m = 4$. Lasciamo al lettore di verificare che T = {(0; 4); (1; 2); (2; 0)}.

La proiezione di S sul *primo* degli insiemi **N** è U_1 = {0; 1; 2}.

La proiezione di S sul *secondo* degli insiemi **N** è U_2 = {0; 2; 4}.

2. RELAZIONI E LORO PROPRIETÀ

2.1. Sottoinsiemi del prodotto cartesiano

Siano dati gli insiemi A, B, A×B. Come sappiamo, ad A×B appartengono tutte le coppie ordinate costituite da un primo elemento tratto da A e da un secondo elemento tratto da B. Può essere opportuno, in alcuni casi, evidenziare alcuni particolari sottoinsiemi di A×B: ad esempio, per sottolineare che alcune coppie di A×B rispettano una qualche proprietà, verificano una legge.

Definizione. Si dice *relazione* tra gli insiemi A e B un sottoinsieme del prodotto cartesiano A×B.

Esempio. Consideriamo gli insiemi:

A = {Arno; Po; Tevere}   B = {Firenze; Pisa; Torino}

e il loro prodotto cartesiano:

A×B = {(Arno; Firenze); (Arno; Pisa); (Arno; Torino);
(Po; Firenze); (Po; Pisa); (Po; Torino);
(Tevere; Firenze); (Tevere; Pisa); (Tevere; Torino)}

Tra tutte le coppie aventi per primo elemento un elemento di A (in questo caso, un fiume) e per secondo un elemento di B (una città), individuiamo *quelle costituite dal nome di un fiume e da quello di una città bagnata da tale fiume*:

R = {(Arno; Firenze); (Arno; Pisa); (Po; Torino)}

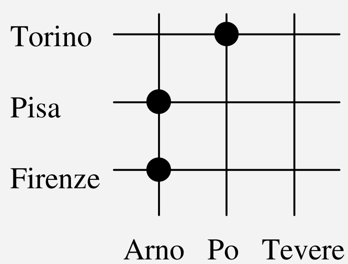
L'importanza del sottoinsieme R di $A \times B$ è evidente: esso sottolinea che tutte (e soltanto) le coppie ad esso appartenenti verificano una determinata proprietà, ovvero sono costituite da un fiume e da una città bagnata da esso.

Il sottoinsieme R ora indicato è uno dei possibili sottoinsiemi di $A \times B$: altri sottoinsiemi possono essere individuati da altre considerazioni (tutte ugualmente valide dal punto di vista insiemistico).

Quando si considera la coppia (a; b) appartenente ad un dato sottoinsieme R di $A \times B$, si dice che l'elemento $a \in A$ ha per corrispondente $b \in B$ nella relazione R, oppure che gli elementi a, *b sono in relazione fra loro*.

Una relazione, come ogni sottoinsieme del prodotto cartesiano di insiemi, può essere rappresentata graficamente.

Esempio. Il grafico rappresenta la relazione introdotta nel precedente esempio.



2.2. Relazioni tra un insieme e se stesso. Loro proprietà

Per la definizione del prodotto cartesiano di due insiemi, sopra introdotta, non è necessario che gli insiemi in questione siano distinti: è cioè possibile parlare del prodotto cartesiano $I \times I$, costituito dall'insieme di tutte le coppie ordinate (a, b) con $a \in I$ e $b \in I$. Esamineremo le caratteristiche delle relazioni definite in $I \times I$.

Le relazioni tra un insieme I e se stesso possono infatti godere di interessanti proprietà, introdotte dalle definizioni seguenti:

Definizione. Si dice che la relazione $R \subseteq I \times I$ gode della proprietà *riflessiva* se, per *ogni* $a \in I$ è: $(a; a) \in R$.

Cioè: una relazione definita tra gli elementi di un insieme gode della proprietà riflessiva (si dice anche: è riflessiva) se *ogni* elemento dell'insieme considerato è in relazione con se stesso.

Definizione. Si dice che la relazione $R \subseteq I \times I$ gode della proprietà *antiriflessiva* se, per *ogni* $a \in I$ è: $(a; a) \notin R$.

Cioè: una relazione definita tra gli elementi di un insieme gode della proprietà antiriflessiva (si dice anche: è antiriflessiva) se *nessun* elemento dell'insieme considerato è in relazione con se stesso.

Definizione. Si dice che la relazione $R \subseteq I \times I$ gode della proprietà *simmetrica* se per *ogni* $a \in I$ e per *ogni* $b \in I$ tali che $(a; b) \in R$, è: $(b; a) \in R$.

Cioè: una relazione definita tra gli elementi di un insieme gode della proprietà simmetrica (si dice anche: è simmetrica) quando, per *ogni* coppia di elementi a, b dell'insieme considerato, accade che se a è in relazione con b, allora anche b è in relazione con a.

Definizione. Si dice che la relazione $R \subseteq I \times I$ gode della proprietà *antisimmetrica* se $(a; b) \in R$ e $(b; a) \in R$ implica che sia: $a = b$.

Cioè: una relazione definita tra gli elementi di un insieme gode della proprietà antisimmetrica (si dice anche: è antisimmetrica) quando, per due elementi a, b dell'insieme considerato, il contemporaneo essere a in relazione con b e b in relazione con a implica che $a = b$.

Definizione. Si dice che la relazione $R \subseteq I \times I$ gode della proprietà *transitiva* se per *ogni* $a \in I$, per *ogni* $b \in I$ e per *ogni* $c \in I$ tali che $(a; b) \in R$ e $(b; c) \in R$, è: $(a; c) \in R$.

Cioè: una relazione definita tra gli elementi di un insieme gode della proprietà transitiva (si dice anche: è transitiva) quando, per *ogni* terna di elementi a, b, c dell'insieme considerato, accade che se a è in relazione con b e b è in relazione con c, allora a è in relazione con c.

Esempio. Consideriamo nell'insieme I delle rette del piano la $R \subseteq I \times I$:

$$R = \{(r; s): r \text{ è coincidente o parallela a } s\}$$

Tale relazione gode delle proprietà:

- *riflessiva*, perché ogni retta è coincidente o parallela a se stessa (nel caso specifico: coincidente);
- *simmetrica*, perché se la retta *r* è coincidente o parallela alla retta *s*, allora anche *s* è coincidente o parallela a *r*;
- *transitiva*, perché se la retta *r* è coincidente o parallela alla retta *s* e la retta s è coincidente o parallela alla retta *t*, allora la retta *r* risulta coincidente o parallela a *t*.

Il lettore verificherà che la relazione R non gode delle altre proprietà sopra esaminate (antiriflessiva, antisimmetrica).

Esempio. Consideriamo, nell'in sieme J delle lunghezze dei segmenti del piano, la $S \subseteq J \times J$:

$$S = \{(a; b) \text{: la lunghezza } a \text{ è non minore di quella } b\}$$

Tale relazione gode delle proprietà:

- *riflessiva*, perché la lunghezza di ogni segmento è non minore di se stessa;
- *antisimmetrica*, perché se la lunghezza di un primo segmento è non minore della lunghezza di un secondo ed inoltre la lunghezza del secondo segmento è non minore di quella del primo, allora i due segmenti considerati hanno la stessa lunghezza;
- *transitiva*, perché se la lunghezza *a* di un segmento è non minore di quella *b* e la lunghezza *b* è non minore di quella *c*, allora la lunghezza *a* è non minore di quella *c*.

La relazione S non gode delle altre proprietà sopra esaminate (antiriflessiva, simmetrica).

Esempio. Consideriamo, nell'insieme I delle rette del piano, la $T \subseteq I \times I$:

$$T = \{(r; s) \text{: } r \text{ è perpendicolare a } s\}$$

Tale relazione gode delle proprietà:

- *antiriflessiva*, perché nessuna retta è perpendicolare a se stessa;
- *simmetrica*, perché se una retta *r* è perpendicolare ad una retta *s*, allora la retta *s* è perpendicolare a *r*.

La relazione T non gode delle altre proprietà sopra esaminate (riflessiva, antisimmetrica, transitiva).

Segnaliamo infine che con il termine *chiusura transitiva* di una relazione A si indica la più piccola relazione Â transitiva tale che A⊆Â. Si dimostra che per ogni relazione A, la chiusura transitiva Â esiste ed è unica.

La chiusura transitiva di una relazione A può dunque essere intesa come l'intersezione di tutte le relazioni transitive che contengono A: così facendo si otterrà ancora una relazione Â contenente A, transitiva e con la proprietà di essere la più piccola possibile, appunto perché intersezione di tutte quelle soddisfacenti i requisiti.

Alternativamente, la chiusura transitiva Â di una relazione A può essere costruita considerando tutte le coppie (x, x') che sono estremi di catene $(x, x_1, x_2, \ldots, x_n, x')$ di cui ogni coppia consecutiva (x, x_1), (x_1, x_2), …, (x_n, x') appartiene ad A. Che tale relazione sia transitiva è chiaro: se (x, x') e (x', x'') appartengono ad Â, allora esisterà una successione (x, x_1), (x_1, x_2), …, (x_n, x'), …, (x_m, x'') che ci consentirà di affermare che anche (x, x'')∈Â. Inoltre ogni relazione transitiva che contenga A dovrà contenere tutte le coppie estremi di catene finite come quelle descritte.

Esempio. Consideriamo l'insieme X dei punti di una città (il termine "punto" si intenda, in questo caso, infomalmente, dunque più in senso "geografico" che geometrico). Sia A la relazione tra elementi di X individuata dalla proprietà "essere collegati da un autobus". Lasciamo al lettore il compito di verificare che essa è non riflessiva e simmetrica. Inoltre la relazione A non è transitiva in quanto può accadere che sia impossibile andare dal punto P al punto Q utilizzando un solo autobus.

Per costruire la chiusura transitiva Â, minima relazione transitiva contenente A, dobbiamo "ampliare" A considerando in relazione anche punti di X raggiungibili tra di loro mediante un certo numero (finito, anche se non fissato) di autobus da prendere uno di seguito all'altro: e questa è proprio l'operazione che comunemente viene fatta di chi utilzza i mezzi pubblici (da: Bellacicco & Labella, 1979, p. 72).

2.3. Relazioni di equivalenza e insieme quoziente

Definizione. Una relazione R⊆I×I si dice *relazione di equivalenza* se gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Esempio. Consideriamo, nell'insieme I delle rette del piano, la relazione:

$$R = \{(r; s): r \text{ è coincidente o parallela a } s\}$$

già esaminata in un precedente esempio.

La relazione data è una relazione di equivalenza in quanto gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

Definizione. Si dice *classe di equivalenza* $[a]$ dell'elemento $a \in \mathrm{I}$ rispetto alla relazione di equivalenza $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{I} \times \mathrm{I}$ il sottoinsieme di I costituito dagli elementi x tali che $(a; x) \in \mathrm{R}$.

Si noti che le classi di equivalenza sono non vuote (per la proprietà riflessiva delle relazioni di equivalenza, alla classe $[a]$ appartiene sempre l'elemento a) e a due a due disgiunte. Proviamo quest'ultima affermazione.

Proposizione. Siano a, b, due elementi distinti di I e siano $[a]$, $[b]$ le classi di equivalenza di a e di b rispetto alla relazione di equivalenza $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{I} \times \mathrm{I}$; allora $[a]$ e $[b]$ sono disgiunte.

Dimostrazione. Mostreremo che se esiste un elemento $x \in \mathrm{I}$ tale che:

$$x \in [a] \quad \text{e} \quad x \in [b]$$

allora deve essere $[a] = [b]$. Infatti, per definizione, se $x \in [a]$ significa che $(a; x) \in \mathrm{R}$ e se $x \in [b]$ significa che $(b; x) \in \mathrm{R}$. Dunque, per la proprietà transitiva della relazione di equivalenza R:

$$(a; x) \in \mathrm{R} \quad \text{e} \quad (b; x) \in \mathrm{R} \qquad \Rightarrow \qquad (a; b) \in \mathrm{R} \qquad \Rightarrow \qquad [a] = [b]. \ \text{cvd}$$

Definizione. Si dice *insieme quoziente* dell'insieme I rispetto alla relazione R l'insieme I/R delle classi di equivalenza degli elementi di I rispetto alla relazione di equivalenza R.

L'insieme quoziente costituisce una *partizione* di I in classi di equivalenza: con ciò intendiamo che tali classi, non vuote, sono a due a due disgiunte (come sopra dimostrato) e che l'unione di tutte le classi è I.

Esempio. Consideriamo, nell'insieme I delle rette del piano, la relazione di equivalenza:

$$\mathrm{R} = \{(r; s): r \text{ è coincidente o parallela a s}\}$$

già esaminata in precedenti esempi. Le classi di equivalenza rispetto a tale relazione sono i sottoinsiemi di I del tipo:

$$[s] = \{r \in \mathrm{I}: r \text{ è coincidente o parallela a } s\}$$

Ciascuno degli elementi dell'insieme quoziente I/R è costituito da un insieme di rette parallele: esso può essere identificato con la comune *direzione* di esse.

2.4. Relazioni d'ordine

Definizione. Una relazione $R \subseteq I \times I$ si dice *relazione d'ordine* (o *di ordine largo*) se gode delle proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Definizione. Una relazione $R \subseteq I \times I$ si dice *relazione di ordine stretto* se gode delle proprietà antiriflessiva e transitiva.

Esempio. Consideriamo nell'insieme J dei segmenti del piano la $S \subseteq J \times J$:

$$S = \{(a; b): \text{la lunghezza di } a \text{ è non minore di quella di } b\}$$

già esaminata in un precedente esempio. La relazione data è una relazione d'ordine (o di ordine largo) in quanto gode delle proprietà riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

Esempio. Consideriamo nell'insieme J dei segmenti del piano la $U \subseteq J \times J$:

$$U = \{(a; b): \text{la lunghezza di } a \text{ è maggiore di quella di } b\}$$

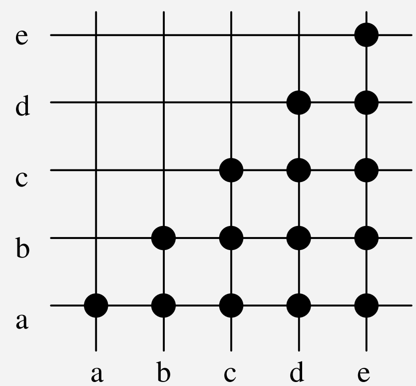
La relazione data gode delle proprietà:

- *antiriflessiva*, perché nessun segmento può avere lunghezza maggiore della propria stessa lunghezza;
- *transitiva*, perché se un segmento *a* ha lunghezza maggiore di quella di un segmento *b* ed il segmento *b* ha lunghezza maggiore di quella di un segmento *c*, allora *a* ha lunghezza maggiore di *c*.

La relazione U non gode delle altre proprietà esaminate nel paragrafo precedente; è una relazione d'ordine stretto.

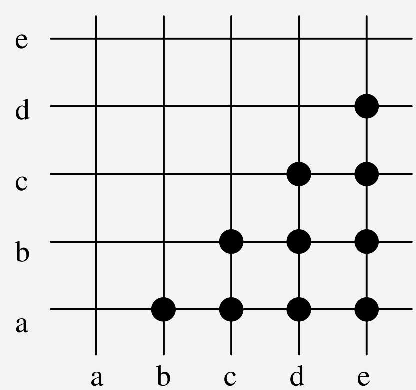
Notiamo che se utilizziamo la rappresentazione di relazioni mediante grafico, una relazione d'ordine largo comprende tutti gli elementi individuati dai punti individuati dalla diagonale del "quadrante" considerato, come illustrato nell'esempio seguente.

Esempio. Il grafico seguente rappresenta una relazione di ordine largo.



Invece una relazione d'ordine stretto non comprende tutti gli elementi individuati dai punti individuati dalla diagonale del "quadrante" considerato.

Esempio. Il grafico seguente rappresenta una relazione di ordine stretto.



Nel paragrafo seguente introdurremo un'importante distinzione tra relazioni d'ordine (largo o stretto).

2.5. Relazioni d'ordine totale e d'ordine parziale

Le relazioni d'ordine (largo o stretto) definite tra gli elementi di un insieme I consentono spesso di *confrontare* due elementi di I, stabilendo quale dei due elementi in questione preceda l'altro in una "classifica" basata sull'ordinamento indotto dalla relazione. Ad esempio, occupiamoci della relazione d'ordine largo S introdotta nell'insieme J delle lunghezze dei segmenti del piano: S = $\{(a; b)$: la lunghezza a è non minore di quella $b\}$, già precedentemente esaminata: in base ad essa, è possibile "ordinare" l'insieme J delle lunghezze dei segmenti del piano:

- se $(a; b)\in S$, allora a precede b nell'ordinamento
- se $(b; a)\in S$, allora b precede a nell'ordinamento

In tale caso, qualsiasi siano gli elementi a, b scelti in J, si verifica sempre *uno* dei due casi $(a; b)\in S$ o $(b; a)\in S$ (e per segmenti non aventi la stessa lunghezza tali possibilità, chiaramente, si escludono a vicenda): infatti, assegnati due a, b, accade sempre che:

- la lunghezza a è non minore di quella b
  oppure:
- la lunghezza b è non minore di quella a

Ma accade *sempre* così? In altri termini: assegnata in un qualsiasi insieme una qualsiasi relazione d'ordine S, accade sempre che, detti a, b due qualsiasi elementi di tale insieme, si verifichi una delle due possibilità $(a; b)\in S$ o $(b; a)\in S$? Oppure può accadere che per almeno una coppia di elementi c, d dell'insieme esaminato risulti $(c; d)\notin S$ ed anche $(d; c)\notin S$?

Situazioni come quella descritta sono possibili: la distinzione ora presentata è collegata alla possibilità di confrontare tutte le coppie di elementi dell'insieme I in base alla relazione d'ordine assegnata in I e da ciò dipende la possibilità di ordinare tutti gli elementi di I in base a quanto considerato nella relazione.

Una relazione d'ordine S definita in un insieme I e tale che, per ogni coppia di elementi a, b di I si verifica sempre uno dei casi $(a; b)\in S$ o $(b; a)\in S$ (ovvero che consenta il confronto di tutte le coppie di elementi di I) si dice *relazione d'ordine totale*; una relazione d'ordine S che non per tutte le coppie consenta tale confronto, ovvero tale che per almeno una coppia di elementi c, d dell'insieme considerato accada che $(c; d)\notin S$ e che $(d; c)\notin S$, si dice *relazione d'ordine parziale*.

Osservazione. Il problema, ora presentato nel caso di una relazione d'ordine largo, si può estendere alle relazioni d'ordine stretto, come la U presentata nell'esempio precedente. Le possibilità, in quest'ultimo caso, non sono più due, ma tre: alle $(a; b)\in U$, $(b; a)\in U$, corrispondenti ai casi in cui la lunghezza di a è maggiore di quella di b e viceversa, deve essere aggiunto il caso in cui le lunghezze sono uguali.

Esempio. Sia I l'insieme avente per elementi tutti i sottoinsiemi di **R** (cioè l'insieme delle parti di **R**); definiamo la relazione $S\subseteq I\times I$:

$$S = \{(A; B): A\subseteq B\}$$

Tale relazione è una relazione d'ordine, in quanto gode delle proprietà:

- *riflessiva*, perché per ogni A è: $A\subseteq A$;
- *antisimmetrica*, perché da $(A\subseteq B)$ e $(B\subseteq A)$ segue $A = B$;
- *transitiva*, perché da $(A\subseteq B)$ e $(B\subseteq C)$ segue $A\subseteq C$.

La S è una relazione d'ordine parziale: infatti è possibile trovare coppie di sottoinsiemi C, D di **R** tali che $(C; D)\notin S$ e $(D; C)\notin S$.

Ad esempio se C, D sono definiti da:

$$C = \{x\in \mathbf{R}: 0<x<2\} \qquad D = \{x\in \mathbf{R}: 1<x<3\}$$

non essendo $C\subseteq D$ né $D\subseteq C$, risulta:

$$(C; D)\notin S \ \text{ e } \ (D; C)\notin S$$

3. FUNZIONI

3.1. La definizione di funzione

Le funzioni o applicazioni sono relazioni tra gli elementi di un insieme D e di un insieme B tali che ad ogni elemento dell'insieme D corrisponda esattamente un elemento (ovvero: *uno ed uno solo*) di B. La corrispondenza tra gli elementi del primo insieme D e quelli del secondo insieme B indotta da una funzione si realizza quando:

- ogni elemento di D ha un corrispondente in B;
- nessun elemento di D ha più di un corrispondente in B.

Definizione. Una relazione $R \subseteq D \times B$ si dice *funzione* (o *applicazione*) se per ogni $a \in D$ esiste *uno ed un solo* $b \in B$ tale che: $(a; b) \in R$.

Osservazione. Se $f \subseteq D \times B$ è una funzione e se $b_1 \in B$, $b_2 \in B$, $b_1 \neq b_2$, in base alla definizione data risulta:

$$(x; b_1) \in f \quad \Rightarrow \quad (x; b_2) \notin f$$
$$(x; b_2) \in f \quad \Rightarrow \quad (x; b_1) \notin f$$

Possibile è invece che esistano $b \in B$, $x_1 \in D$, $x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$ tali che:

$$(x_1; b) \in f \ \text{ e } \ (x_2; b) \in f$$

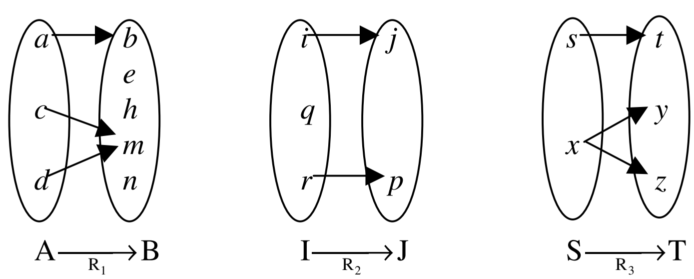
Una funzione si indica spesso con la lettera f; si scrive: $f \subseteq D \times B$, o: f: $D \rightarrow B$; il primo insieme, D, si dice *dominio* della funzione f. A ciascun elemento x del dominio della f corrisponde un'(unica) *immagine*, indicata da $f(x) \in B$, e si scrive: f: $x \rightarrow f(x)$. Analogamente, si dice che $x \in D$ è *controimmagine* di $f(x) \in B$.

Talvolta l'insieme B si indica con il termine *codominio*.

Definizione. Data la funzione f: $D \rightarrow B$, l'insieme $C \subseteq B$ costituito dalle immagini degli elementi di D si dice *insieme delle immagini* della f.

Pertanto l'insieme delle immagini della funzione f: $D \rightarrow B$ è quel sottoinsieme di B costituito dagli elementi di B aventi (almeno) una controimmagine in D.

Esempio. Consideriamo le relazioni rappresentate da:



La prima di esse è una funzione, mentre le altre due non rispettano la definizione di funzione.

Infatti, in $R_1 \subseteq A \times B$, ad ogni elemento di A corrisponde una ed una sola immagine in B; l'insieme delle immagini della funzione R_1 è $C = \{b; m\}$.

Nella relazione $R_2 \subseteq I \times J$, a $q \in I$ non corrisponde alcun elemento in J, contro la definizione di funzione. Nella relazione $R_3 \subseteq S \times T$, allo stesso elemento $x \in S$ corrispondono i distinti elementi $y \in T$ e $z \in T$, contro la definizione di funzione.

Esempio. Sia P l'insieme dei punti del piano e sia Z l'insieme delle circonferenze tracciate nel piano. Consideriamo le relazioni $R \subseteq P \times Z$ e $S \subseteq Z \times P$:

R = {(p; z): il punto $p \in P$ è il centro della circonferenza $z \in Z$}
S = {(z; p): la circonferenza $z \in Z$ ha per centro il punto $p \in P$}

Esaminiamo la R: in essa, ad ogni punto p del piano corrispondono infinite circonferenze z, in quanto ogni punto può essere centro di infinite circonferenze (concentriche): la R non rispetta la definizione di funzione.

Nel caso della S, invece, ad ogni circonferenza z corrisponde (in qualità di centro) uno ed un solo punto p: pertanto, la S è una funzione.

Osservazione. La definizione di funzione richiede che, per assegnare una funzione f: $D \to B$, siano assegnati un insieme D, detto dominio, un secondo insieme B al quale apparterranno le immagini, e una legge che ad ogni $x \in D$ fa corrispondere una ed una sola $f(x) \in B$. Spesso, però, quando si considerano funzioni definite in un sottoinsieme D di **R** ed aventi immagini reali, una funzione f viene assegnata indicando la legge che ad ogni $x \in D$ fa corrispondere la $f(x) \in R$, *senza fissare esplicitamente il dominio*; anzi, frequentemente la determinazione del dominio viene lasciata come esercizio. In questo caso, con il termine dominio si intende il più grande $D \subseteq \mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in D$ sia possibile calcolare $f(x) \in \mathbf{R}$.

Esempio. Se la funzione f viene indicata con la scrittura:

$$f\colon x \to \sqrt{x}$$

allora il più grande $D \subseteq \mathbf{R}$ tale che per ogni $x \in D$ sia possibile calcolare $\sqrt{x} \in \mathbf{R}$ è $\{x \in \mathbf{R}: x \geq 0\}$. Dunque si dice che il dominio della $f\colon x \to \sqrt{x}$ è $\{x \in \mathbf{R}: x \geq 0\}$.

Questo modo di procedere è spesso accettato: è però opportuno *specificare esplicitamente il dominio nei casi in cui possano sorgere malintesi*.

(Contro)esempio. Consideriamo la funzione $x \to f(x)$ espressa da:

$f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$

Qual è il dominio di questa funzione?

Se cerchiamo un dominio D$\subseteq$**R** affinché il denominatore sia non nullo e la radice quadrata sia reale, dobbiamo imporre la condizione: x>1.

Ma attenzione: a x = 0 (considerato come numero complesso) corrisponde $f(0) = \dfrac{0}{\sqrt{0-1}} = 0/i = 0$ (dove $i = \sqrt{-1}$, $i \in$ **C**; il lettore ricorderà dagli studi secondari che lo 0 complesso diviso per un complesso non nullo dà sempre come quoziente lo 0 complesso).

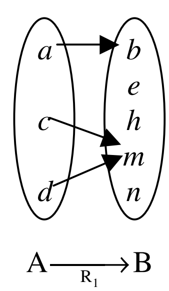
Abbiamo dunque visto che $f(0) = 0$ (lo zero in **C**), e ciò potrebbe indurre a considerare 0 come appartenente al dominio di f; ma non si dimentichi che per eseguire il calcolo di $f(0)$ è necessario considerare lo 0 come elemento di **C** ed estrarre quindi (sempre in **C**) la radice quadrata di −1: e tutto ciò porta a *non* considerare 0 come appartenente al dominio di f.

In situazioni come quella ora descritta è evidentemente consigliabile precisare a priori il dominio in cui è definita la funzione, al fine di evitare ambiguità.

3.2. Funzioni iniettive, suriettive, biiettive

Nel paragrafo precedente abbiamo dato la definizione di funzione: abbiamo cioè precisato che una relazione tra due insiemi è detta funzione quando ad ogni elemento del primo insieme (dominio) corrisponde una ed un sola immagine nel secondo insieme.

Riflettiamo ora su di una funzione già esaminata precedentemente:



Dal suo esame, appare evidente che la definizione di funzione:

- *non* impone che due distinti elementi del dominio abbiano immagini distinte (ricordiamo l'osservazione posta dopo la definizione di funzione);
- *non* impone che tutti gli elementi del secondo insieme abbiano una controimmagine nel dominio (ovvero che l'insieme delle immagini della funzione coincida con l'intero secondo insieme).

Quelle (particolari) funzioni che rispettano una di queste due ulteriori condizioni (oppure entrambe) vengono indicate con denominazioni specifiche.

Definizione. La funzione f: D→B si dice *iniettiva* se per ogni $x_1 \in$ D e per ogni $x_2 \in$ D, con $x_1 \neq x_2$ e con $b \in$ B: $(x_1; b) \in f \Rightarrow (x_2; b) \notin f$.

Dunque una funzione f: D→B si dice iniettiva se ad *ogni* coppia di elementi *distinti* di D corrisponde una coppia di elementi *distinti* di B, ovvero se nessun elemento di B è dotato di più di una controimmagine in D.

Definizione. La funzione f: D→B si dice *suriettiva* se per ogni $b \in$ B esiste (almeno) un $x \in$ D tale che: $(x; b) \in f$.

Dunque una funzione f: D→B si dice suriettiva se *ogni* elemento dell'insieme B ha (almeno) una controimmagine nel dominio ovvero se l'insieme delle immagini di f coincide con *tutto* l'insieme B.

Definizione. La funzione f: D→B si dice *biiettiva* se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.

Una funzione biiettiva viene talvolta indicata con i termini *biiezione* o *corrispondenza biunivoca*.

Esempio. La funzione R_1: A→B introdotta in un precedente esempio non è iniettiva, in quanto ai due (distinti) elementi del dominio $c \in$ A, $d \in$ A corrisponde la stessa immagine $m \in$ B. Essa non è suriettiva, in quanto gli elementi del secondo insieme $e \in$ B, $h \in$ B, $n \in$ B non hanno alcuna controimmagine nel dominio A (cioè: l'insieme delle immagini della funzione, C = $\{b; m\}$, non coincide con tutto B). Non essendo iniettiva né suriettiva, la funzione non è certamente biiettiva.

Esempio. Consideriamo la funzione S introdotta in un esempio precedente. Sia P l'insieme dei punti del piano e sia Z l'insieme delle circonferenze tracciate nel piano stesso. La relazione $S \subseteq Z \times P$:

$$S = \{(z; p): \text{la circonferenza } z \in Z \text{ ha per centro il punto } p \in P\}$$

rispetta la definizione di funzione; è iniettiva, suriettiva, biiettiva?

Essa non è iniettiva: esistono coppie di circonferenze distinte aventi lo stesso centro (concentriche). È suriettiva: ogni punto del piano è centro di (almeno) una circonferenza (di infinite circonferenze, ma la precisazione è ininfluente per quanto riguarda la suriettività). Non è biiettiva, non essendo iniettiva.

Esempio. Sia f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la funzione che ad ogni $x \in \mathbf{R}$ fa corrispondere il doppio di x, $2x \in \mathbf{R}$ (si verifichi innanzitutto per esercizio che essa rispetta la definizione di funzione). Si tratta di una funzione iniettiva. suriettiva, biiettiva?

La risposta a tutte le domande è: sì.

La funzione f è iniettiva, in quanto ad ogni coppia di reali distinti corrispondono coppie di doppi distinti: se le immagini $2a$ e $2b$ coincidessero, non potrebbero che coincidere anche a e b. La funzione f è inoltre suriettiva, in quanto ogni elemento del secondo insieme ha una controimmagine nel dominio: ovvero ogni reale y è il doppio di un (opportuno) reale $y/2$. Essendo iniettiva e suriettiva, la funzione f è biiettiva.

4. FUNZIONI COMPOSTE E FUNZIONI INVERSE

4.1. La funzione composta

Consideriamo tre insiemi A, B, C e le funzioni: f: $A \to B$, g: $B \to C$. La f fa corrispondere ad ogni $x \in A$ uno ed un solo $b \in B$; a tale elemento b, la g fa corrispondere uno ed un solo $c \in C$. Possiamo così riassumere quanto detto:

$$a \xrightarrow[f]{} b \xrightarrow[g]{} c$$

ovvero, con riferimento all'elemento $a \in A$ da cui trae origine la corrispondenza:

$$a \xrightarrow[f]{} f(a) \xrightarrow[g]{} g[f(a)]$$

È possibile considerare una *nuova* funzione che faccia direttamente corrispondere all'elemento $a \in \mathrm{A}$ l'elemento $g[f(a)] \in \mathrm{C}$. Essa è denominata funzione *composta* delle due funzioni considerate e si indica con la scrittura:

$g \bullet f$ oppure: gf

Attenzione: per convenzione, *si indica per prima la funzione che opera per ultima*! Ciò viene scelto per analogia con la scrittura $g[f(a)]$ dell'elemento corrispondente di a nella funzione composta $g \bullet f$.

Definizione. Date le funzioni f: A→B e g: B→C, si dice *funzione composta* $g \bullet f$ la funzione che ad ogni elemento $a \in \mathrm{A}$ fa corrispondere l'elemento $g[f(a)] \in \mathrm{C}$.

Esempio. Siano date le funzioni f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ e g: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definite da:

f: $x \to 3x$ g: $x \to x+2$

Determiniamo le funzioni composte $f \bullet g$ e $g \bullet f$. Ricordiamo che, nelle funzioni composte, la funzione componente ad operare per prima è quella scritta per seconda. Iniziamo quindi con il ricavo dell'espressione di $f \bullet g$:

$$f \bullet g \colon x \xrightarrow[g]{} x+2 \xrightarrow[f]{} 3(x+2)$$

Osserviamo che la f, che all'elemento del dominio fa corrispondere il suo triplo, non opera sulla x, bensì sull'elemento $(x+2)$, già trasformato dalla precedente azione della funzione g. Per quanto riguarda la $g \bullet f$, otteniamo:

$$g \bullet f \colon x \xrightarrow[f]{} 3x \xrightarrow[g]{} 3x+2$$

Le due funzioni composte richieste sono quindi:

$f \bullet g$: $x \to 3x+6$ $g \bullet f$: $x \to 3x+2$

Confrontando le funzioni $f \bullet g$ e $g \bullet f$: ricavate nell'esempio precedente, possiamo notare che la composizione di funzioni *non gode della proprietà commutativa*. Si verifica invece che la composizione di funzioni *gode della proprietà associativa*; ovvero, assegnate le tre funzioni f, g, h, risulta:

$(f\bullet g)\bullet h = f\bullet(g\bullet h)$

4.2. L'applicazione della definizione di funzione composta

La definizione afferma che, date le funzioni f: A→B e g: B→C, si dice funzione composta $g\bullet f$ la funzione che ad ogni elemento $a\in$ A fa corrispondere l'elemento $g[f(a)]\in$ C. Talvolta l'applicabilità di tale definizione richiede cautela. Non sempre, infatti, saremo chiamati a comporre due funzioni f: A→B e g: B→C, ovvero tali che l'insieme delle immagini di f (che essendo f: A→B è un sottoinsieme di B) sia incluso nel dominio (l'insieme B) di g.

(Contro)esempio. Siano date le funzioni f: **R**→**R** e g: D_g→**R**, essendo $D_g = \{x \in \mathbf{R}: x \geq 1\}$:

$f: x \to x^2$ $\qquad\qquad$ $g: x \to \sqrt{x-1}$

Vogliamo considerare la composta $g\bullet f$; teniamo però presente che l'insieme delle immagini di f: $CD_f = \{x\in \mathbf{R}: x\geq 0\}$ *non* è un sottoinsieme del dominio di g, $D_g = \{x\in \mathbf{R}: x\geq 1\}$: l'applicazione della definizione richiede alcune precisazioni.

Quanto esposto nel precedente esempio conferma che l'applicabilità della definizione può richiedere qualche modifica della situazione proposta. Il problema è far sì che l'insieme delle immagini di f sia un sottoinsieme del dominio di g. A tale scopo, dobbiamo effettuare la composizione *non* tra f: D→**R** con insieme delle immagini D e g: D_g→C, bensì tra f_0: D_0→**R** con insieme delle immagini CD_0 e g, essendo f_0 una funzione definita dalla *stessa* legge che definisce la f, ma *ristretta ad un dominio* $D_0 \subset D$, in modo tale che l'insieme delle immagini di f_0 sia un sottoinsieme del dominio di g. Sceglieremo f_0: D_0→**R** con insieme delle immagini CD_0 in modo che D_0 sia il massimo dominio possibile tale che $CD_0 \subseteq D_g$.

La funzione f_0: D_0→**R** si dice *restrizione* della funzione f: D→**R**, con $D_0 \subseteq D$.

Esempio. Siano date le funzioni f: **R**→**R**, g: D_g→**R**, con $D_g = \{x\in \mathbf{R}: x \geq 1\}$:

$f: x \to x^2$ $\qquad\qquad$ $g: x \to \sqrt{x-1}$

come nell'esempio precedente. Per definire $g\bullet f$, restringiamo prima la funzione:

f: $x \rightarrow x^2$ $\quad$ f: $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, con insieme delle immagini: $\{x \in \mathbf{R}: x \geq 0\}$

(che non è un sottoinsieme di $D_g = \{x \in \mathbf{R}: x \geq 1\}$) alla funzione:

f_0: $x \rightarrow x^2$
f_0: $\{x \in \mathbf{R}: x \leq -1 \vee x \geq 1\} \rightarrow \mathbf{R}$ con insieme delle immagini: $\{x \in \mathbf{R}: x \geq 1\}$

che *è* un sottoinsieme (improprio) di $D_g = \{x \in \mathbf{R}: x \geq 1\}$.
La definizione è ora applicabile e la funzione composta richiesta è:

$$g \bullet f: x \rightarrow \sqrt{x^2 - 1}$$

Il suo dominio è: $\{x \in \mathbf{R}: x \leq -1 \text{ o } x \geq 1\}$.

Osservazione. Non sempre i passaggi indicati nel presente paragrafo (la restrizione della prima funzione che opera in una composizione di funzioni) vengono esplicitamente espressi in esercizi ed in applicazioni. Talvolta, cioè, per trovare la funzione composta $g \bullet f$ date le f: $x \rightarrow x^2$ e g: $x \rightarrow \sqrt{x-1}$, ci si limita a scrivere:

$$g \bullet f: x \rightarrow \sqrt{x^2 - 1}$$

sottintendendo che il dominio è $\{x \in \mathbf{R}: x \leq -1 \text{ o } x \geq 1\}$.

4.3. Il dominio della funzione composta

Quanto notato nel paragrafo precedente (e nell'osservazione conclusiva) indica che è necessario prestare attenzione alla determinazione del dominio di una funzione composta, questione che, in alcuni casi, può rivelarsi assai delicata.

Infatti, non sempre i domini (e gli insiemi delle immagini) di entrambe le funzioni componenti vengono indicati esplicitamente. Ciò potrebbe talvolta portare a situazioni problematiche: come abbiamo rilevato nel precedente paragrafo, affinché ad un elemento $a \in A$ corrisponda un elemento $g[f(a)]$ attraverso la funzione composta, è necessario che l'immagine di a attraverso la funzione f, $f(a)$, appartenga al dominio della funzione g. Ebbene, se questo dominio è indicato esplicitamente, il controllo è immediato; ma nell'esempio seguente illustreremo un caso in cui è richiesta una qualche cautela.

(Contro)esempio. Siano date le funzioni f: D$\rightarrow$**R** (dove è: D$\subseteq$**R**) e g: **R**$\rightarrow$**R** definite da:

$$f: x \rightarrow \sqrt{x} \qquad g: x \rightarrow (-1-x^2)$$

Determiniamo (se possibile) la funzione composta $f \bullet g$.

Attenzione: il dominio della funzione f (che è la funzione che, essendo scritta per prima in $f \bullet g$, opera per seconda) è:

$$D_f = \{x \in \mathbf{R}: x \geq 0\}$$

in quanto la radice quadrata non è calcolabile reale per radicandi negativi.

Notiamo inoltre che l'insieme delle immagini della g (che opera per prima) è:

$$CD_g = \{x \in \mathbf{R}: x \leq -1\}$$

in quanto, per ogni $x \in \mathbf{R}$, risulta:

$$-1-x^2 \leq -1$$

Concludendo: l'insieme delle immagini della funzione che opera per prima è costituito dai reali non maggiori di -1; il dominio della funzione che opera per seconda è costituito dai reali non negativi. Pertanto tale dominio e tale insieme delle immagini sono disgiunti, e nessun elemento x del dominio della g che opera per prima avrà immagine appartenente al dominio della f che opera per seconda: quindi nessun elemento x avrà immagine nella funzione composta $f \bullet g$.

Quanto affermato può essere confermato dal ricavo (inutile) dell'espressione analitica della funzione composta $f \bullet g$:

$$f \bullet g: x \xrightarrow[g]{} (-1-x^2) \xrightarrow[f]{} \sqrt{-1-x^2}$$

Al lettore il semplice compito di verificare che il dominio di $f \bullet g$ sarebbe $\varnothing$ (nell'ambito dei numeri reali).

Generalizzando quanto osservato nell'esempio precedente, possiamo ribadire che affinché la funzione composta $f \bullet g$ abbia dominio non vuoto è necessario e sufficiente che l'insieme delle immagini di g, CD_g, e il dominio di f, D_f, non siano disgiunti, ovvero che sia: $D_f \cap CD_g \neq \varnothing$.

4.4. La funzione identità

Definizione. Dato un insieme I, si dice *identità*, e si indica con i, la funzione di I×I che ad ogni elemento $a \in$ I associa se stesso: $i = \{(a;\, a)\colon a \in \mathrm{I}\}$.

Lasciamo al lettore il compito di rendersi conto che la i così introdotta è una funzione biiettiva. Considerata la funzione (qualsiasi) f: A→B, si verifica che:

$$f \bullet i = i \bullet f = f$$

4.5. La relazione inversa

Si consideri una relazione tra gli elementi degli insiemi A e B: $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{B}$.

Consideriamo quindi una *nuova* relazione, che indicheremo con R^{-1}, tra gli elementi degli insiemi B e A: $\mathrm{R}^{-1} \subseteq \mathrm{B} \times \mathrm{A}$ definita nel modo seguente:

$$(y;\, x) \in \mathrm{R}^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad (x;\, y) \in \mathrm{R}$$

Tale nuova relazione R^{-1} è denominata *relazione inversa* della relazione R, come espresso dalla definizione seguente.

Definizione. Data la relazione $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{B}$, si dice *relazione inversa* R^{-1} della R la relazione $\mathrm{R}^{-1} \subseteq \mathrm{B} \times \mathrm{A}$ tale che:

$$\mathrm{R}^{-1} = \{(b;\, a)\colon (a;\, b) \in \mathrm{R}\}$$

Esempio. Sono dati gli insiemi A = {1; 2; 5}, B = {1; 3} e la relazione $\mathrm{R} \subseteq \mathrm{A} \times \mathrm{B}$:

$$\mathrm{R} = \{(a;\, b)\colon a \le b\} = \{(1;\, 1);\, (1;\, 3);\, (2;\, 3)\}$$

La relazione inversa R^{-1} è la seguente:

$$\mathrm{R}^{-1} = \{(b;\, a)\colon b \ge a\} = \{(1;\, 1);\, (3;\, 1);\, (3;\, 2)\}$$

Spesso è richiesto di determinare la relazione inversa di una funzione espressa nella forma: $x \rightarrow f(x)$. Nell'esempio seguente è illustrato il procedimento per ricavare l'espressione della relazione inversa.

Esempio. Consideriamo la funzione f: $\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ definita da:

$$f: x\rightarrow 2x-3$$

Ricaviamo l'espressione della relazione inversa. Indichiamo con: $y = 2x-3$ l'immagine dell'elemento x. La data relazione si indica ora con la scrittura:

$$(x; y)\in f$$

Per ricavare la cercata espressione della relazione inversa, in base alla definizione, dobbiamo ottenere una scrittura del tipo:

$$(y; x)\in f^{-1}$$

ovvero "scambiare" le posizioni ed i ruoli di x e y. Nel passaggio dalla funzione data alla sua relazione inversa, l'espressione $y = 2x-3$ diventerà quindi $x = 2y-3$, dalla quale, esplicitando la y, ricaviamo:

$$y = \frac{x+3}{2}$$

che è l'immagine di x nella relazione inversa. Pertanto la relazione inversa della funzione: f: $x\rightarrow 2x-3$ è espressa dalla (nuova) funzione:

$$f^{-1}: x\rightarrow \frac{x+3}{2}$$

Osservazione. Concludiamo notando che nel caso esaminato nell'esempio precedente la relazione inversa di una funzione è un'altra funzione (cioè una relazione che rispetta la definizione di funzione). Ma non sempre accadrà ciò.

Abbiamo introdotto la relazione inversa di una relazione data. Sappiamo che alcune relazioni (*non* tutte), in base alle loro caratteristiche, soddisfano anche la definizione di funzione; in questo paragrafo ci occuperemo di una questione che si rivelerà importante: in base alla definizione di relazione inversa, l'inversa di una funzione è una relazione, ma è addirittura una *funzione*?

In generale la risposta è: no. Nei due esempi seguenti potremo esaminare due diverse situazioni: nella prima, la relazione inversa di una funzione data sarà ancora una funzione; nella seconda, ciò non accadrà: la relazione inversa della funzione proposta non rispetterà la definizione di funzione.

Esempio. Si consideri la funzione f: $\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ definita da:

$$f: x\rightarrow 2x$$

si ricavi l'espressione della relazione inversa e si dica se tale relazione rispetta la definizione di funzione.

La relazione inversa della funzione che ad ogni x fa corrispondere il suo doppio è quella che ad ogni x fa corrispondere la sua metà. Ovvero:

$$f^{-1} : x\rightarrow x/2$$

Non è difficile rendersi conto che questa relazione rispetta la definizione di funzione: ad ogni x reale corrisponde infatti una ed una sola metà $x/2$.

(Contro)esempio. Si consideri la funzione g: $\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ definita da:

$$g: x\rightarrow x^2$$

si ricavi l'espressione della relazione inversa e si dica se tale relazione rispetta la definizione di funzione.

In questo caso, la situazione è più delicata: infatti la relazione inversa associa ad ogni elemento *non negativo* la sua radice quadrata, ma sia con il segno "+" che con il segno " –". Insomma, se:

$$g = \{(x; x^2): x\in\mathbf{R}\} \qquad \Rightarrow \qquad g^{-1} = \{(x^2; x): x\in\mathbf{R}\}$$

risulta: $(9; 3)\in g^{-1}$, ma anche: $(9; -3)\in g^{-1}$.

Possiamo concludere che questa relazione inversa *non* rispetta la definizione di funzione. E ciò per ben due ragioni: primo, non per tutti i numeri reali è possibile calcolare (reale) la radice quadrata (ma soltanto per i reali non negativi); in secondo luogo, per ogni reale positivo x, esistono due reali (e non uno solo) che elevati al quadrato danno come risultato x: essi sono $+\sqrt{x}$ e $-\sqrt{x}$.

Abbiamo constatato che in alcuni casi la relazione inversa di una funzione è ancora una funzione, mentre in alcuni casi non lo è. Ebbene, perché accade ciò? Quali caratteristiche deve avere una funzione affinché anche la sua relazione inversa rispetti la definizione di funzione?

Non è difficile rispondere a questa domanda, se si tiene presente quanto richiesto dalla stessa definizione di funzione: affinché una relazione tra due insiemi sia una funzione bisogna che ogni elemento del primo insieme (dominio) abbia una ed una sola immagine.

Ricordiamo che l'inversione di una relazione comporta lo scambio dei due insiemi: il primo insieme diventa il secondo e viceversa. Quindi, per stabilire se la relazione inversa rispetta la definizione di funzione dobbiamo esaminare:

- se ogni elemento del primo insieme (nella relazione inversa) è dotato di almeno una immagine. Ovvero: se ogni elemento del secondo insieme (nella relazione originaria) è dotato di almeno una controimmagine. E pertanto: la funzione originaria deve essere *suriettiva*.
- se ogni elemento del primo insieme (nella relazione inversa) è dotato di una sola immagine. Ovvero: se ogni elemento del secondo insieme (nella relazione originaria) è dotato di una sola controimmagine. E pertanto: la funzione originaria deve essere *iniettiva*.

Possiamo concludere che le condizioni affinché la relazione inversa di una funzione f rispetti la definizione di funzione sono l'iniettività e la suriettività della funzione originaria f: tale funzione, quindi, deve essere *biiettiva*.

Definizione. Una funzione si dice *invertibile* quando anche la sua relazione inversa rispetta la definizione di funzione.

Proposizione. Una funzione è *invertibile* se e soltanto se è *biiettiva*.

Dunque si identifica una funzione biiettiva f: A→B in una relazione che ad *ogni* elemento di A fa corrispondere *uno ed un solo* elemento di B *e viceversa*.

Ricordando la definizione di identità e indicate una funzione invertibile e la propria funzione inversa rispettivamente con f, f^{-1}, è semplice ricavare:

$$f \bullet f^{-1} = f^{-1} \bullet f = i$$

5. CENNI SULLE ANTINOMIE DELLA TEORIA DEGLI INSIEMI

5.1. Le antinomie

Concludiamo la sezione dedicata alla teoria degli insiemi presentando alcune importanti considerazioni storiche, dedicate ad uno degli argomenti più affascinanti della logica matematica: ci riferiamo alla questione delle antinomie, frasi apparentemente ingannevoli, strane ma eleganti, nelle quali sembrano "convivere" verità e falsità (la letteratura su antinomie e paradossi è vastissima; ci limitiamo ad indicare: Hamblin, 1970; Falletta, 1989).

Il termine "antinomia" deriva dal greco "anti" (contro) e "nomos" (legge, norma); esso è utilizzato per indicare il verificarsi di una contraddizione, ovvero, ad esempio, la presenza di una particolare proposizione che al contempo risulta essere vera e falsa, nell'ambito di una teoria. L'improponibile contrasto tra i valori di verità risulta allora inevitabile, finendo così per ledere la stessa validità del sistema logico nel quale viene scoperta l'antinomia in questione.

Verso la fine del XIX secolo, vengono proposte numerose antinomie sulla teoria degli insiemi. Alcune di esse sono antinomie semantiche, ovvero collegate al significato attribuito a particolari termini del linguaggio; altre invece sono antinomie logiche, ovvero connesse alla struttura delle frasi in questione, come la celebre antinomia di Russell, che esamineremo nel paragrafo seguente.

> "*L'enunciato che segue è falso.*
> *L'enunciato che precede è vero.*
> Congiuntamente questi enunciati danno lo stesso risultato del paradosso di Epimenide. Eppure, separatamente, sono enunciati innocui e perfino potenzialmente utili".
>
> Douglas R. Hofstaedter

Una delle più celebri antinomie semantiche è *l'antinomia del mentitore* (o *di Epimenide*), nota sino dall'antichità (Koiré, 1947; Rivetti Barbò, 1964; Martin, 1970; Maracchia, 1990). Essa è sintetizzata nella frase: *Io sto mentendo.*

Riflettendo su questa affermazione, ci rendiamo conto che:

- se chi pronuncia tale frase dice la verità, allora egli sta effettivamente mentendo, e questa è una contraddizione;
- se chi pronuncia tale frase mente, allora egli non sta mentendo e, di conseguenza, sta dicendo la verità: anche questa è una contraddizione.

Illustriamo un'altra semplice ed elegante antinomia semantica (detta di Berry-Russell, ma la proposta originale è di Richard).

È noto che il numero delle sillabe dei nomi con i quali si indicano, nella lingua inglese, i numeri interi positivi tende a crescere al crescere del numero nominato. Pertanto, i nomi di alcuni numeri interi positivi devono essere costituiti da almeno diciannove sillabe; fra questi, ne esisterà uno più piccolo di tutti gli altri. Chiameremo tale numero (che, in inglese, è 111777) "il più piccolo intero non definibile con meno di diciannove sillabe". Ma... *il più piccolo intero non definibile con meno di diciannove sillabe* è (in inglese) una "definizione" costituita da diciotto sillabe!

La contraddizione appare evidente: "il più piccolo intero non definibile con meno di diciannove sillabe" è stato definito con sole diciotto sillabe. Anche in questo caso, però, le radici dell'antinomia vanno ricercate nel significato attribuito ai termini utilizzati, e segnatamente al valore assunto dal termine "definire": anche l'antinomia ora proposta, quindi, è un 'antinomia semantica.

5.2. Gottlob Frege e Bertrand Russell

Il progetto culturale di Gottlob Frege (1848-1925), uno dei massimi logici dell'intera storia della cultura, può essere sintetizzato nel tentativo di ricondurre interamente la matematica alla logica (attraverso la teoria degli insiemi). Nel 1902, proprio alla vigilia della pubblicazione della seconda parte della grande opera logica fregeana (*Princìpi dell'Aritmetica derivati ideograficamente*), il trentenne Bertrand Russell (1872-1970) rilevò una contraddizione nel capolavoro del logico tedesco: essa è riassunta nella celebre *antinomia di Russell* o *antinomia degli insiemi normali* (Garciadiego, 1992).

La formulazione originale dell'antinomia di Russell è basata sulla definizione di insieme normale, che illustreremo. L'idea di insieme, come sappiamo, non è introdotta da una definizione, ma è un concetto primitivo; non ci sono particolari restrizioni al tipo di elementi che possono appartenere all'insieme dato. È quindi possibile (perché no?) richiedere che ad un certo insieme appartenga se stesso come elemento.

Ecco dunque la definizione di Russell: un insieme I si definisce *normale* quando ha la proprietà di non contenere se stesso come elemento.

Esempio. L'insieme: I = $\{ x\in \mathbf{N}: x<5\} = \{0; 1; 2; 3; 4\}$ è un insieme normale, in quanto non contiene I stesso come elemento: $I\notin I$.

L'insieme J = $\{0; 1; 2; 3; 4; J\}$ *non* è un insieme normale, in quanto contiene I stesso come elemento: $J\in J$.

Consideriamo ora l'insieme N avente per elementi tutti e soltanto gli insiemi normali: N *contiene se stesso come elemento?*

- Una prima possibilità è che N contenga se stesso come elemento. Ma N è l'insieme formato da tutti e soltanto gli insiemi normali, ovvero da tutti e soltanto quegli insiemi che non contengono se stesso come elemento; perciò dovremmo concludere che se N appartiene a N risulta che N non può contenere se stesso come elemento! La nostra prima risposta finisce quindi per essere contraddittoria.

- La rimanente possibilità è che N non contenga se stesso come elemento. Ma in tale caso N risulterebbe essere un insieme normale e, di conseguenza, dovrebbe proprio appartenere a N. Ed anche questa risposta è contraddittoria.

In simboli, la definizione dell'insieme N è: $N = \{I: I \notin I\}$ e le due possibili ipotesi sull'appartenenza dell'insieme N a N stesso portano alle implicazioni:

$$N \in N \quad \Rightarrow \quad N \notin N \qquad\qquad N \notin N \quad \Rightarrow \quad N \in N$$

ovvero a un'inevitabile contraddizione.

Osservazione. Per molti versi analoga all'antinomia degli insiemi normali è l'*antinomia del barbiere* (lo stesso Bertrand Russell la ricorda come pressoché equivalente alla propria antinomia: si veda ad esempio: Aimonetto, 1975).

In un paese isolato, uno degli abitanti è il barbiere e rade tutti (e soltanto) coloro che non si radono da sé. Domanda: in quel paese, chi rade il barbiere?

Ammettiamo che il barbiere si rada da sé; ma allora è proprio il barbiere che lo rade, mentre avevamo affermato che il barbiere rade tutti e soltanto coloro che non si radono da sé! Questa prima risposta è quindi contraddittoria.

Ammettiamo allora che il barbiere non si rada da sé; ma in tale caso dovrebbe essere proprio il barbiere a raderlo, in quanto avevamo affermato che il barbiere rade tutti e soltanto coloro che non si radono da sé: quindi egli si rade da sé. Ed anche questa seconda risposta si rivela contraddittoria.

Esercizi sul Capitolo 1

1.1. Scrivere (se è possibile in forma tabulare) gli insiemi risultato delle operazioni seguenti:

a. $\{x\in \mathbf{Z}: -1\leq x\leq 7\}\cap\{x\in \mathbf{Z}: x^2\leq 5\}$
b. $\{x\in \mathbf{N}: x^3\geq 1\}\cup\{x\in \mathbf{N}: x^3\leq 9\}$
c. $\{x\in \mathbf{Q}: (x-2)^2\leq 100\}\cap\{x\in \mathbf{Q}: x^3\leq 2\}\cap\{x\in \mathbf{Q}: (x-1)^2\leq 0\}$
d. $\{x\in \mathbf{R}: (5x-6)^2+(7x-6)^2\leq 0\}\cup\{x\in \mathbf{R}: 4+(3x-2)^2\leq 0\}\cup\{x\in \mathbf{R}: (6x+1)^2\leq 0\}$
e. $\{x\in \mathbf{Z}: -1\leq x\leq 3\}\cup\{x\in \mathbf{Z}: -2\leq x\leq 5\}\cap\{x\in \mathbf{Z}: -4\leq x\leq 5\}$
f. $\{x\in \mathbf{N}: x^3\leq 20\}\backslash\{x\in \mathbf{N}: x^3\geq 1\}$
g. $\{x\in \mathbf{Z}: (x-3)^2\leq 4\}\backslash\{x\in \mathbf{Z}: (7x-3)^2\geq 0\}$

1.2. Scrivere tutti i sottoinsiemi comuni agli insiemi: $\{x\in \mathbf{Z}: 1000\leq x\leq 1002\}$ e $\{x\in \mathbf{Z}: 3\leq x\leq 4\}$.

1.3. Dati gli insiemi: $A = \{x\in \mathbf{Z}: -1\leq x\leq 2\}$ e $B = \{x\in \mathbf{Z}: 3<x<6\}$ indicare:

a. $A\times B$.
b. $B\times A$.
c. $A\times A$.
d. $B\times B$.

1.4. Sia I l'insieme delle circonferenze del piano; si consideri la relazione:

$\{(a; b): a\in I \text{ e } b\in I \text{ e } a, b \text{ hanno lo stesso centro}\}$

Dire se si tratta di una relazione di equivalenza, di ordine largo, di ordine stretto.

1.5. Sia I l'insieme delle figure piane; si consideri la relazione:

$\{(a; b): a\in I \text{ e } b\in I \text{ e } a \text{ è equivalente ad una parte propria di } b\}$

("*a* è equivalente ad una parte propria di *b*" significa che *a* ed una parte propria di *b*, cioè *non* coincidente con *tutta* la figura *b*, hanno la stessa area). Dire se si tratta di una relazione di equivalenza, di ordine largo, di ordine stretto.

1.6. Sia I l'insieme delle parti di **N**; si consideri la relazione:

$\{(A; B): A\in I \text{ e } B\in I \text{ e } A\subseteq B \text{ e } B\subseteq A\}$

Dire, giustificando la risposta, se si tratta di una relazione di equivalenza, di ordine largo, di ordine stretto.

1.7. Siano A l'insieme dei punti del piano, B l'insieme dei quadrati del piano con i lati di lunghezza assegnata e C l'insieme dei cerchi del piano con i raggi di lunghezza assegnata; dire se le relazioni $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq A \times C$ definite da:

$R = \{(a, b) \in A \times B$: a è il centro di $b\}$
$S = \{(a, b) \in A \times B$: a è il centro di $b\}$

sono funzioni.

1.8. Dati gli insiemi $I(m) = \{z \in \mathbf{R}: 2^{-m-1} \leq z \leq 2^{m+1}\}$, con m parametro naturale, si consideri la relazione definita da:

$I(a)$ è in relazione con $I(b)$ se e solo se $I(a) \subseteq I(b)$

Dire, giustificando la risposta, se:

si tratta di una relazione di equivalenza;
si tratta di una relazione di ordine largo;
si tratta di una relazione di ordine stretto;
si tratta di una relazione di ordine totale;
si tratta di una relazione di ordine parziale.

1.9. Sia α un parametro reale; si consideri l'insieme $D = \{x \in \mathbf{R}: x^2 \leq 2\alpha^2 - 8\}$. Per quali valori di α la funzione f: $D \to \mathbf{R}$ definita da:

$\forall x \in D, \qquad f(x) = 5$

è iniettiva? E per quali valori di α è suriettiva?

1.10. Sia α un parametro reale; si consideri l'insieme $D = \{x \in \mathbf{R}: x^2 \leq 1\}$. Per quali valori di α la funzione f: $D \to \mathbf{R}$ definita da:

$\forall x \in D, \qquad f(x) = (6 - 5\alpha + \alpha^2)(x+1)$

è iniettiva? E per quali valori di α è biiettiva?

1.11. Siano α, β due parametri reali; si consideri l'insieme $D = \{x \in \mathbf{R}: x^2 \leq 9\}$. Per quali valori di α e di β la funzione f: $D \to \mathbf{R}$ definita da:

$\forall x \in D, \qquad f(x) = (1 + \alpha + \beta + \alpha\beta)(3x+2)$

è iniettiva? E per quali valori di α e di β è biiettiva?

1.12. Data la funzione $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$, f: $x \to f(x)$ espressa da:

$f(x) = x^n$ per $-1<x<1$
$f(x) = x$ per gli altri valori reali di x,

dire al variare del numero naturale n se f è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

1.13. Sono assegnate le funzioni $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$:

$f: x\to k+5-x^2$ $g: x\to\sqrt{x}$

Per quali valori del parametro $k\in\mathbf{R}$ entrambe le funzioni composte $f\bullet g$ e $g\bullet f$ hanno dominio non vuoto?

1.14. Data la funzione $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$:

$f: x\to x^5$

a. si determini la funzione: $f\bullet f^{-1}$.
b. si determini la funzione: $f\bullet f\bullet f^{-1}\bullet f^{-1}$.
c. si determini la funzione: $f\bullet f$.
d. si determini la funzione: $f\bullet f\bullet f\bullet f^{-1}\bullet f^{-1}\bullet f$.

1.15. Dopo aver verificato che la seguente funzione f: $\mathbf{Z}\to\mathbf{Z}$ è non invertibile:

$f: x\to(-1)^x+5$

si indichi un sottoinsieme di $\mathbf{Z}$ (detto "dominio di invertibilità") tale che la restrizione della funzione considerata a tale dominio risulti invertibile; tale sottoinsieme rappresenta l'unica possibile soluzione dell'esercizio?

Soluzioni degli esercizi sul Capitolo 1

1.1. a. $\{-1; 0; 1; 2\}$. b. $\mathbf{N}$. c. $\{1\}$. d. $\{-1/6\}$. e. $\{x\in \mathbf{Z}: -2\leq x\leq 5\}$. f. $\{0\}$. g. $\varnothing$.

1.2. I due insiemi sono disgiunti: il loro unico sottoinsieme comune è $\varnothing$.

1.3. a. $\{(-1; 4); (0; 4); (1; 4); (2; 4); (-1; 5); (0; 5); (1; 5); (2; 5)\}$.
b. $\{(4; -1); (4; 0); (4; 1); (4; 2); (5;-1); (5; 0); (5; 1); (5; 2)\}$.
c. $\{(-1; -1); (0; -1); (1; -1); (2; -1); (-1; 0); (0; 0); (1; 0); (2; 0); (-1; 1); (0; 1); (1; 1); (2; 1); (-1; 2); (0; 2); (1; 2); (2; 2)\}$.
d. $\{(4; 4); (5; 4); (4; 5); (5; 5)\}$.

1.4. Si tratta di una relazione di equivalenza (gode infatti delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva).

1.5. Si tratta di una relazione di ordine stretto.

1.6. $A\subseteq B$ e $B\subseteq A$ equivale a: $A = B$: quindi la relazione data è una relazione di equivalenza.

1.7. R non è una funzione; S è una funzione.

1.8. Si tratta (soltanto) di una relazione di ordine largo e di ordine totale.

1.9. Per $\alpha = \pm 2$ la funzione è iniettiva. Non è suriettiva per alcun valore di α.

1.10. Per $\alpha \neq 2$ e $\alpha \neq 3$ la funzione è iniettiva. Non è biiettiva per alcun valore di α.

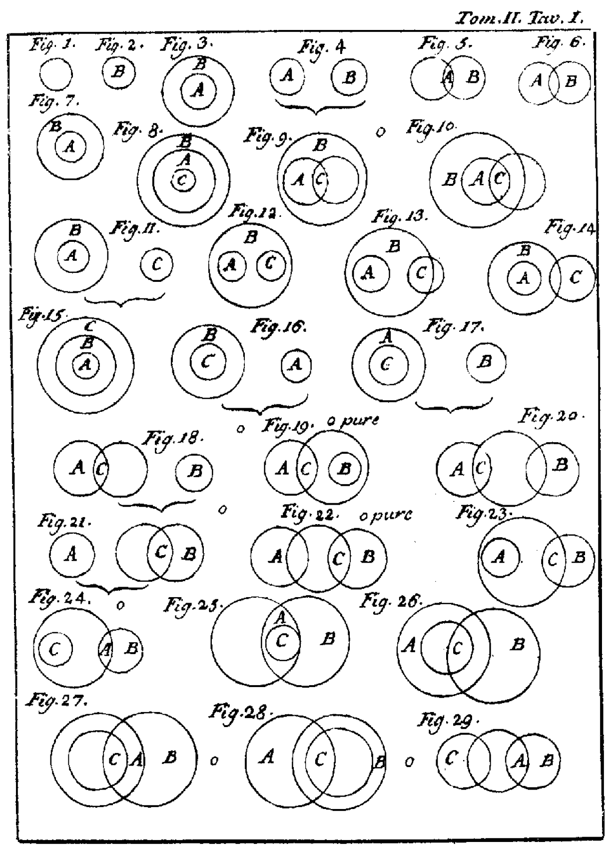
1.11. Per ogni scelta di α, β per cui nessuno dei parametri assuma valore -1 la funzione nè iniettiva. Non è biiettiva per alcun valore di α e di β.

1.12. Se n è 0 o è pari la funzione non è iniettiva, né suriettiva, né biiettiva. Se n è dispari la funzione è iniettiva, suriettiva, biiettiva.

1.13. Per $k\geq -5$.

1.14. a. $x\rightarrow x$. b. $x\rightarrow x$. c. $x\rightarrow x^{25}$. d. $x\rightarrow x^{25}$.

1.15. Un possibile dominio di invertibilità è $\{0; 1\}$, ma non è l'unica soluzione dell'esercizio.



La tavola di *Lettres à une princesse d'Allemagne* (*Lettere ad una principessa d'Alemagna sopra diversi soggetti di fisica e di filosofia*: Napoli 1787) in cui Leonhard Euler ha introdotto la rappresentazione, oggi diffusissima, per indicare gli insiemi