Bollettino dei Docenti di Matematica, 46 (2003), 73-79

Alice e lo Stregatto colorano il piano

Giorgio T. Bagni
Dipartimento di Matematica,
Università di Roma "La Sapienza"

Riassunto L'articolo propone alcune considerazioni elementari sul minimo numero di colori che servono per colorare il piano $\mathbf{R}^2$ in modo che ogni coppia di punti distanti 1 sia associata a due diversi colori. Si tratta di un problema aperto (2003).

Abstract In this work we propose some elementary considerations about the least number of colours needed in order to colour $\mathbf{R}^2$ being any couple of point whose distance is 1 associated to two different colours. It is an open problem (2003).

Era una mattinata davvero molto calda. Per qualche istante la bambina appoggiò dolcemente la testa sul banco: forse chiuse gli occhi e la voce dell'insegnante sembrò affievolirsi…

«Alice! Alice! Non ti starai addormentando, vero?»

ALICE: «Oh, ciao caro Stregatto! Scusami, forse stavo proprio per appisolarmi: stamattina non riesco a concentrarmi sulle cose serie».

STREGATTO: «E quali sarebbero queste cose serie?»

ALICE: «Beh, quello che sta spiegando l'insegnante sarà di certo una cosa seria».

STREGATTO: «Sì, può darsi; ma il guaio è che quest'aula è tutta troppo scura, triste. Voi ragazzi dovreste ravvivarla con qualche colore brillante… Guarda la lavagna, ad esempio: così, tutta nera, concilia il sonno!»

ALICE: «E tu di che colore la vorresti?»

STREGATTO: «Non di un colore solo, ma di tanti colori: sarebbe molto più allegra».

ALICE: «È vero: come la giubba di Arlecchino!»

STREGATTO: «Facciamo così: la coloreremo in modo che tutti i punti distanti un'unità (diciamo un pollice, per fissare le idee) siano di colore diverso».

ALICE: «E quanti colori servono? Tantissimi, la lavagna è piuttosto grande».

STREGATTO: «Ma no, vedrai. Anzi, faremo di più: cercheremo il minimo numero di colori necessari per colorare in quel modo una lavagna grande quanto vuoi tu! Una lavagna grandissima… infinitamente grande».

ALICE: «Ecco, Stregatto: il sonno mi è già passato!»

STREGATTO: «Lo sapevo. Ma adesso mettiamoci al lavoro e cerchiamo di capire di quanti colori diversi abbiamo bisogno».

ALICE: «Vediamo un po': un colore ovviamente non basta, la lavagna è grande…»

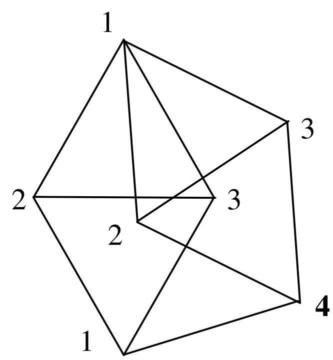
STREGATTO: «E nemmeno due».

ALICE: «Credo proprio di no: ma perché?»

STREGATTO: «Alice, mi meraviglio di te: se costruisci un triangolo equilatero di lato unitario, i vertici devono essere colorati diversamente l'uno dall'altro!»

ALICE: «Benissimo. Ma allora forse potrebbero essere sufficienti tre colori: potrei costruire due triangoli equilateri di lato unitario con un solo lato in comune e i quattro vertici della figura potrebbero essere colorati correttamente con tre colori».

STREGATTO: «Cara bimba, sbagli ancora, ma hai avuto un'idea carina: la figura che hai immaginato di disegnare ti servirà: traccia infatti la tua coppia di triangoli che richiederà tre colori, chiamali 1, 2, 3; quindi disegna un'altra coppia di triangoli, immaginando di ruotare la figura intorno al vertice più in alto in modo che il vertice più in basso si sposti di una distanza unitaria. A questo punto puoi colorare tutto con i tuoi tre colori iniziali, ma non quest'ultimo vertice: ti servirà un quarto colore. La figura che hai disegnato si chiama "fuso di Moser"».



ALICE: «Davvero ingegnoso! Dimmi, allora: possiamo essere sicuri che bastano quattro colori, sempre?»

STREGATTO: «Ahi, qui la cosa diventa difficile… Ma invece di ragionare in termini così generali, di parlare di dimostrazioni, comincia concretamente a colorare una parte del piano; o almeno immagina di farlo! Ricorda che devi usare il minimo numero di colori possibile: quindi ti conviene non cambiare troppo spesso colore, almeno se non sarai obbligata a fare ciò dalle regole del gioco».

ALICE: «Dunque, comincio da un punto qualsiasi con il colore numero 1: finché resto abbastanza vicina a quel punto posso usare lo stesso colore».

STREGATTO: «Che cosa significa "abbastanza"?»

ALICE: «Beh, diciamo che potrei colorare con uno stesso colore tutti i punti interni ad una figura geometrica la cui massima corda sia unitaria: penso ad esempio ad un cerchio di diametro unitario. Escluderò magari una semicirconferenza».

STREGATTO: «D'accordo, la tua idea mi sembra proprio buona: in parole povere tu stai cercando di considerare delle figure geometriche senza coppie di punti a distanza unitaria che abbiano la massima area. Ti anticipo però che questa non è una condizione indispensabile. Comunque secondo me il cerchio potrebbe non essere una figura molto conveniente per il tuo scopo».

ALICE: «Perché?»

STREGATTO: «Perché il cerchio non tassella».

ALICE: «E che cosa vuol dire?»

STREGATTO: «Prova a ricoprire completamente un piano con dei cerchi: ce la fai?»

ALICE: «No, mi resteranno sempre delle piccole zone tra un cerchio e l'altro: un po' come accade quando delle bottiglie sono affiancate, in una cassa o su di uno scaffale».

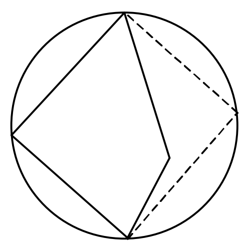
STREGATTO: «Appunto: il cerchio non tassella! E allora ti restano sempre quelle piccole zone da colorare e ciò può voler dire tanti colori…Meglio puntare su di un'altra figura geometrica».

ALICE: «Una figura in grado di "tassellare", come dici tu: che cosa mi consigli?»

STREGATTO: «Io non do consigli, ti faccio solo ragionare: e tu ragioni bene! Sempre seguendo la tua idea di usare figure con l'area più grande possibile, io punterei su figure che possano essere inscritte in una circonferenza».

ALICE: «E perché proprio inscritte in una circonferenza?»

STREGATTO: «Beh, considera una figura non inscrivibile in una circonferenza, per semplicità pensa ad un poligono, e traccia la circonferenza avente per diametro la corda massima della tua figura, che come sai deve essere unitaria: almeno uno dei vertici si troverà all'interno di quella circonferenza. Ebbene, è facile costruire una nuova figura inscrivibile con l'area maggiore della figura di partenza, sempre con la corda massima unitaria. E questa nuova figura ti consente di colorare una più vasta parte di piano con uno stesso colore».



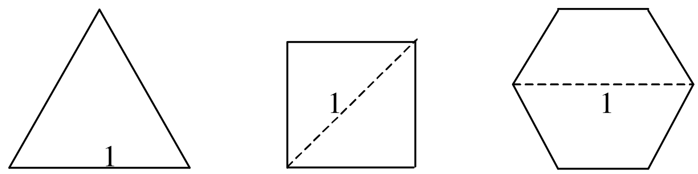
ALICE: «Hai ragione, sono d'accordo con te. Dunque quali figure dovrei usare?»

STREGATTO: «Tutti sanno che tra tutti i poligoni di n lati inscrivibili in una circonferenza quello con la massima area è il poligono regolare. A questo punto, tu devi decidere il numero dei lati, cioè quale n scegliere. Le possibilità non sono poi tante: i poligoni regolari che tassellano sono solo tre, il triangolo equilatero, il quadrato e l'esagono regolare, in quanto hanno gli angoli interni che dividono esattamente l'angolo giro: 60°, 90° e 120° sono la sesta, la quarta e la terza parte di 360°».

ALICE: «E devo scegliere a caso?»

STREGATTO: «Non si sceglie mai a caso, bambina mia. Se vuoi puoi continuare a cercare la figura che ha l'area maggiore, sempre tenendo presente che la corda massima deve essere unitaria».

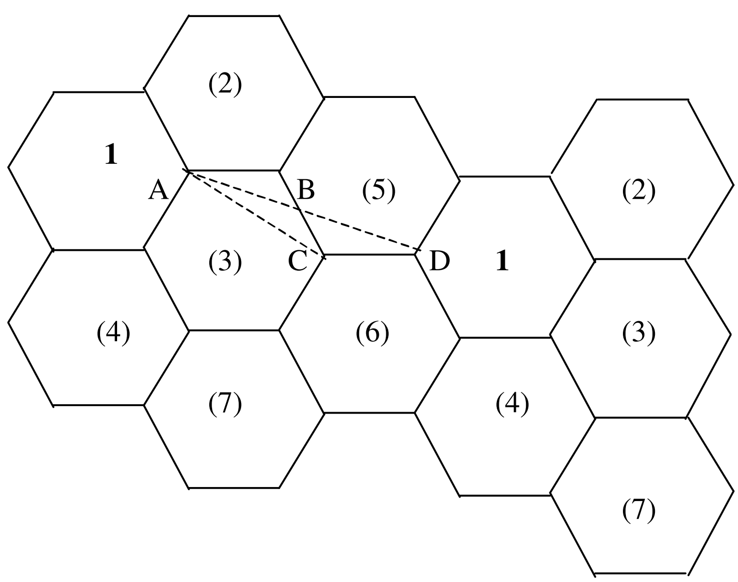
ALICE: «Vediamo un po': facendo qualche calcolo, il triangolo equilatero ha area $\frac{\sqrt{3}}{4}$, il quadrato $\frac{1}{2}$ e l'esagono regolare $\frac{3\sqrt{3}}{8}$, che è la più grande, poco più di 0,6495. Punterei sull'esagono regolare! Corda massima che misura 1, dunque lato $\frac{1}{2}$».



STREGATTO: «E va bene. Adesso pensa ad un piano ricoperto da esagoni con corda massima unitaria, che dunque possono essere colorati ciascuno di uno stesso colore: basta che tu stia un po' attenta a colorare bene i lati, per evitare che coppie di punti a distanza unitaria abbiano lo stesso colore, ma non è una cosa difficile, lo farai da sola. Bisogna capire quanti colori servono per fare in modo che due di questi esagoni con lo stesso colore non abbiano punti distanti 1».

ALICE: «Ad esempio due esagoni adiacenti, cioè con un lato in comune, devono essere colorati diversamente».

STREGATTO: «Certo, ma non basta. Ci sono anche esagoni non adiacenti che hanno punti a distanza unitaria e che dunque devono essere colorati con due diversi colori. Ad esempio AB e AC misurano rispettivamente $\frac{1}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e se prolunghi un po' tali segmenti devi concludere che gli esagoni che hanno tali punti come vertici non possono essere colorati con lo stesso colore».

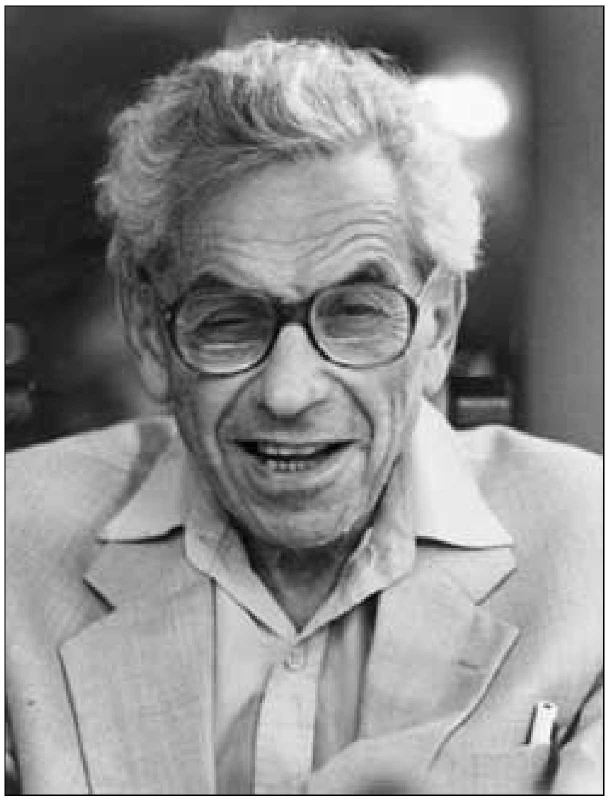


ALICE: «E allora? Quale altro esagono posso colorare con il colore 1?»

STREGATTO: «Guarda bene la figura: AD è abbastanza lungo, misura addirittura $\frac{\sqrt{7}}{2}$. Dunque gli esagoni che contengono le lettere A e D sono abbastanza lontani da poter essere colorati con lo stesso colore. Ed un ragionamento del genere vale per tutte le coppie di esagoni a quella distanza!»

ALICE: «In conclusione, quanti colori mi servono?»

STREGATTO: «Basta contare: per colorare correttamente questi esagoni hai bisogno di sette colori. Se n'erano già accorti in parecchi, il primo è stato un certo Hadwiger; molti grandi matematici si sono occupati di queste cose: hai mai sentito parlare di un certo Erdös?».

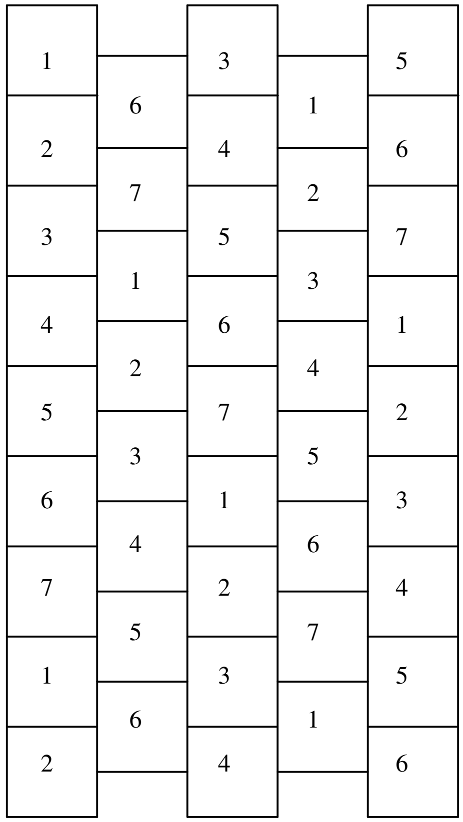


Paul Erdös (1913-1997)

ALICE: «No, non conosco questo signore. Però sono un po' delusa: visto quello che avevamo fatto all'inizio speravo di cavarmela con quattro».

STREGATTO: «Ma perché delusa, cara bambina? Sette è un numero come un altro: in matematica non ci sono numeri belli e numeri brutti. Il fatto che sette sia maggiore di quattro non è una sconfitta.. E poi, parlando di colorazioni, il quattro ha già avuto il suo momento di gloria: tanto tempo fa, nel 1852, uno studente, un certo Francis Guthrie, cercava di colorare una carta geografica in modo che due nazioni confinanti avessero colori diversi. . »

ALICE: «Non mi interessano le carte geografiche di questo Signor Francis. Voglio colorare la mia lavagna, io: non si può abbassare questo limite di sette colori?»



STREGATTO: «Non ho detto questo: tu hai costruito una tassellazione del piano molto simpatica e anche famosa, che rispetta tutte le regole del gioco e che ti dice che con sette colori ce la fai. Ma non è certo detto che questa soluzione sia l'unica! Intanto, non è unica per quanto riguarda le dimensioni: tieni presente che i lati degli esagoni potrebbero essere anche un po' più piccoli di $\frac{1}{2}$: basta che la misura del segmento AD non sia minore di 1. Naturalmente non devi esagerare: se vuoi divertirti a fare qualche semplice calcolo, puoi trovare che la misura della corda massima del tuo esagono deve stare tra $\frac{2}{\sqrt{7}}$ e 1: infatti se fosse minore di $\frac{2}{\sqrt{7}}$ il segmento AD sarebbe troppo piccolo e non potresti più colorare con lo stesso colore gli esagoni che nella tua figura contengono le lettere A e D; ma se invece fosse maggiore di 1 avresti due punti dello stesso esagono a distanza unitaria colorati con lo stesso colore, cosa che come sai è proibita; considerando poi che la corda massima dell'esagono regolare, come tu hai notato, è il doppio del suo lato, la misura del lato deve stare tra $\frac{1}{\sqrt{7}}$ e $\frac{1}{2}$. Scegliendo ad esempio un lato che misura $\frac{2}{5}$ puoi permetterti di non preoccuparti dei punti che si trovano sul perimetro di uno stesso esagono».

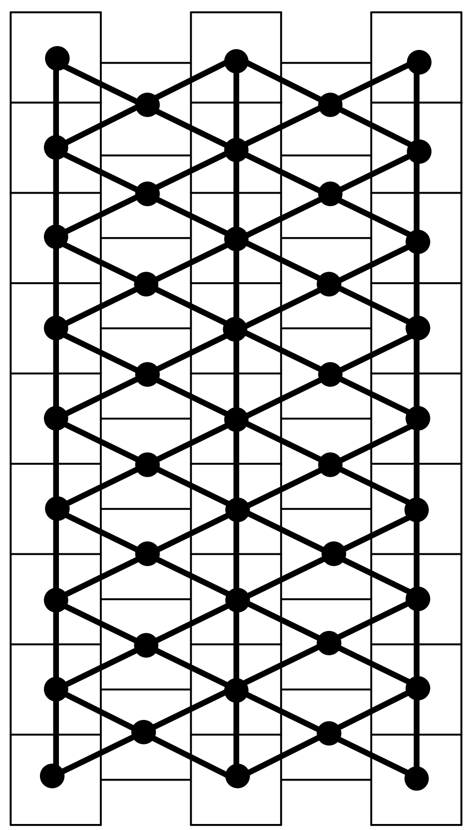
ALICE: «Tutto qui? Se è solo una questione di dimensioni, il limite dei sette colori resta comunque valido».

STREGATTO: «Eh no, non si tratta solo di dimensioni! Nel tuo ragionamento hai introdotto molte ipotesi implicite: quella di usare solo figure poligonali, poligoni tutti uguali, poligoni di area massima eccetera. Anche volendo usare poligoni regolari e tutti uguali la tua soluzione non è la sola possibile: ad esempio, si può colorare il piano con dei quadrati di lato $\frac{\sqrt{2}}{2}$ usando ancora sette colori. . »

ALICE: «Ah, ma allora tutte le preoccupazioni che mi hanno portato a scegliere l'esagono erano inutili!»

STREGATTO: «Inutili? Fino ad un certo punto: tieni presente che questi quadrati di lato $\frac{\sqrt{2}}{2}$, collocati così, si comportano un po' come degli esagoni».

ALICE: «Non ho mai visto dei quadrati che si comportano come degli esagoni».



STREGATTO: «Vedrai che quello che dico non è poi così strano: prendi un punto al centro di ogni quadrato e collega due di questi punti se e solo se i due quadrati corrispondenti hanno una parte di contorno in comune. Otterrai una specie di ragnatela che, quando sarai più grande, ti insegneranno a chiamare "grafo duale"».

ALICE: «Che nome buffo, grafo duale: ma per adesso io posso continuare a chiamarla ragnatela, vero? È molto più carino».

STREGATTO: «Certo, ragnatela andrà benissimo. Adesso costruisci la tua ragnatela e poi, quando ne avrai voglia, con le stesse regole, ripeterai la costruzione di una ragnatela nel caso dei tuoi esagoni. Forse quello che disegnerai non avrà proprio le stesse dimensioni della ragnatela che hai disegnato adesso, ma…la sua forma ti farà capire perché poco fa ti dicevo che a volte i quadrati possono comportarsi come degli esagoni».

Nota

Il problema della determinazione del minimo numero di colori che servono per colorare il piano $\mathbf{R}^2$ in modo che ogni coppia di punti distanti 1 sia associata a due diversi colori è un problema aperto (2003): tale numero è limitato dai valori 4 e 7, come notato nel corso dell'articolo. Per un'introduzione alla questione e per una rassegna delle estensioni agli spazi *n*-dimensionali: Meliddo, 2001, che riporta molte indicazioni bibliografiche specialistiche (per un'elementare panoramica sulla Teoria dei Grafi si veda ad esempio: Ore, 1965; ricco di spunti è Wells, 1991).
Non sarà forse inutile osservare che il problema sopra presentato è ben diverso dal celebre *problema dei quattro colori*, una delle questioni che hanno visto impegnati i matematici dalla metà del XIX secolo (l'indicazione originale è di Francis Guthrie e risale al 1852) e che anche ai giorni nostri, pur essendo tecnicamente risolta, fornisce materia di discussione per gli studiosi. Una semplice osservazione sta alla base del *problema dei quattro colori*: per distinguere i paesi rappresentati in una carta geografica è opportuno che due stati confinanti (per un tratto non costituito da un solo punto) siano colorati con colori differenti. Ebbene, in una carta qualsiasi, qual è il minimo numero di colori necessario per poter ottenere una colorazione corretta?
Nel 1976, Kenneth Appel e Wolfgang Haken dell'Università dell'Illinois ri uscirono a provare che tale minimo numero è *quattro* impiegando massicciamente alcuni elaboratori elettronici (Appel & Haken, 1977). Tale dimostrazione non ha però soddisfatto tutti i settori del mondo matematico: non è la correttezza dei presupposti ad essere messa in discussione; ma la "dimostrazione" è articolata sull'esame automatico di un numero enorme di situazioni e non può essere ripercorsa e controllata se non mediante l'impiego di un elaboratore. Dunque il *problema dei quattro colori* può dirsi praticamente risolto, ma resta l'assenza di una prova tradizionale della *congettura dei quattro colori*: né si è certi dell'esistenza di una tale dimostrazione. Personalmente, pur non rifiutando la dimostrazione di Appel-Haken (soprattutto nella versione migliorata di N. Robertson: Robertson & Al., 1997),

ritengo che l’uso della tecnologia nella ricerca matematica renda opportuno un approfondimento epistemologico.

Bibliografia

Appel, A. & Haken, W. (1977), Every planar map is four colorable. Part I. Discharging, *Illinois J. Math.* 21, 429-490; Part II. Reducibility, *Illinois J. Math.* 21, 491-567.

Meliddo, M. (2001), *Sulle colorazioni di spazi metrici*, Tesi di Laurea, Università degli studi di Roma ‘La Sapienza”, anno accademico 2000 -2001.

Ore, O. (1965), *I grafi e le loro applicazioni,* Zanichelli, Bologna.

Robertson, N.; Sanders, D.P.; Seymour, P.D. & Thomas, R. (1997), The four colour theorem, *J. Combin. Theory* Ser. B. 70, 2-44.

Rogers, C.A. (1957), A note on coverings, *Mathematica* 4, 1-6.

Szekely, L.A. (2000), Erdös on unit distances and the Szemerédi-Trotter theorems, *Paul Erdös amd his Mathematics*, Bolyai Soc. Math. Stud., Budapest.

Wells, D. (1991), *Dictionary of Curious and Interesting Geometry*, Penguin, London.

Woodall, D.R. (1973), Distances realized by sets covering the plane, *J. Combin Theor.* Ser. A 14, 187-200.