La matematica e la sua didattica, 3, 51–70 (2004)

Storia della matematica in classe: scelte epistemologiche e didattiche

GIORGIO T. BAGNI
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DI ROMA «LA SAPIENZA»

Summary. In this paper we discuss some epistemological issues related with the historical analysis of a mathematical concept, in order to achieve an effective and correct use of historical data into mathematics education. In particular we present some theoretical frameworks and we underline the primary importance of the correct social and cultural contextualisation; moreover we consider the possibility to propose an epistemologically relevant selection of historical data in order to introduce a concept. Finally, some historical elements related to the limit concept are presented and discussed.

1. Storia della matematica e didattica: diversi quadri teorici

È sufficiente sfogliare le principali riviste di didattica della matematica e molti libri di testo attualmente in uso per rendersi conto che l'introduzione di un concetto fa spesso riferimento alla storia della nostra disciplina (per quanto riguarda la ricerca didattica indichiamo la vasta collezione di lavori: Fauvel & van Maanen, 2000): spesso l'impiego di elementi storici nella pratica scolastica è considerato con favore da ricercatori e da insegnanti e non raramente è apprezzato anche dagli allievi. Tuttavia, come vedremo, la presentazione di un contenuto matematico attraverso la sua evoluzione storica richiede l'assunzione di posizioni epistemologiche importanti e impegnative.[1]

Considerare la storia della matematica come una specie di "laboratorio in cui esplorare lo sviluppo della conoscenza matematica" (Radford, 1997, p. 26)[2] richiede infatti l'accettazione di un punto di vista teorico che giustifichi il collegamento tra lo sviluppo concettuale nella storia e quello moderno. Per realizzare una tale connessione è necessario affrontare questioni rilevanti per la didattica disciplinare (D'Amore & Frabboni, 1996): i problemi più gravi sono connessi all'interpretazione dei dati storici, inevitabilmente condotta alla luce dei nostri attuali paradigmi culturali (si veda ad esempio: Gadamer, 1975).

---

[1] La bibliografia in proposito è vastissima. Una particolare citazione spetta comunque a Francesco Speranza il quale si riferisce alle idee di Federigo Enriques (Speranza, 1997).
[2] Nel presente lavoro le traduzioni sono nostre.

Il dilemma tra *scoperta* e *invenzione* ha fatto discutere a lungo matematici, filosofi e storici della matematica (Casari, 1973, p. 14); da un lato, la posizione platonista tende ad assimilare il lavoro del matematico a quello di uno scopritore, di chi individua e studia oggetti, fatti, proprietà in qualche modo già dotati di una propria esistenza; dall'altro, il matematico sarebbe invece chi introduce, crea autonomamente la matematica, la inventa mantenendo un significativo margine di libertà (una rassegna delle posizioni filosofiche del secolo scorso è ad esempio in: Lolli, 2002).

Dal punto di vista storiografico, il dilemma è talvolta impostato secondo una concezione che elude l'alternativa tra le posizioni ricordate (Giusti, 1999, p. 74). Un nuovo concetto sarebbe inizialmente "incontrato" da un matematico in fasi operative, ad esempio nella risoluzione di un problema o all'interno di una dimostrazione (Sfard, 1991; Slavit, 1997; Bagni, 2001); per essere più tardi ripreso e rielaborato alla luce dei mutati standard di rigore.[3] Notiamo però, anticipando un'osservazione che riprenderemo, che l'accettazione di tale struttura evolutiva può portare ad affrontare alcune non banali questioni epistemologiche: è accettabile concepire la storia della matematica come un percorso che, attraverso tentativi, errori e rivisitazioni critiche, conduca alla "corretta" sistemazione concettuale moderna? In altri termini, possiamo riferire l'intera evoluzione storica alla nostra attuale concezione della matematica? Quale ruolo va attribuito ai fattori culturali e sociali che hanno influenzato i singoli periodi storici? Non si può dimenticare che le fasi che siamo tentati di considerare (oggi) come interlocutorie, come momenti di passaggio verso la formazione della matematica "compiuta" (la nostra attuale matematica), costituivano invece la matematica "compiuta" dell'epoca, elaborata in base a concezioni culturali e funzionale rispetto a esigenze precise (Radford, 1997).

A partire dagli anni Settanta, Guy Brousseau introdusse il concetto di *ostacolo epistemologico*: si concepiva la conoscenza come soluzione ottimale per un problema caratterizzato da esigenze e da vincoli (ci riferiamo alla chiara sintesi in: Radford, Boero & Vasco, 2000, p. 162); l'ostacolo epistemologico può interpretarsi alla stregua di una sistematica difficoltà che gli individui incontrano (e a causa della quale compiono errori) nell'affrontare i problemi (D'Amore, 1999). Tale impostazione porta ad uno studio storico il cui scopo fondamentale è l'evidenziazione di tali esigenze, quindi l'interpretazione, attraverso la loro analisi, della conoscenza che a partire da esse si è sviluppata. La nota suddivisione degli ostacoli in epistemologici, ontogenetici, didattici

[3] In una conferenza inaugurale tenuta al Corso di Perfezionamento in Matematica e Fisica (28 novembre 1950), A. Frajese sosteneva: "Come l'umanità, si dice, ha dovuto percorrere numerose tappe per giungere al possesso di una dottrina scientifica, attraverso errori, deviazioni, scoperte, così nella mente del discente tali tappe devono essere ripercorse, con analoghi errori, analoghe deviazioni, analoghe scoperte" (Frajese, 1950, p. 338; Piaget & Garcia, 1983. La bibliografia a riguardo è vastissima; senza pretese di completezza, citiamo: Swetz, 1989 e 1995; Pepe, 1990; Sfard, 1991; Furinghetti, 1993; Rogers, 1995; Siu, 1995).

(Brousseau, 1983) e culturali (Brousseau, 1989) sottolinea la separazione della sfera della conoscenza dalle altre sfere ad essa collegate.

L'approccio ora descritto è chiaramente caratterizzato da alcune importanti assunzioni epistemologiche: la prima riguarda la ricomparsa nei processi attuali (nelle situazioni di apprendimento) di uno stesso ostacolo epistemologico manifestatosi in un periodo storico; la seconda riguarda più specificamente la trasmissione del sapere e prevede che il discente apprenda affrontando un problema significativo in modo sostanzialmente isolato, senza influenze sociali o, più in generale, senza interagire con l'ambiente (Brousseau, 1983).

A quella di Brousseau si affiancano altre impostazioni teoriche, basate su differenti assunzioni epistemologiche: secondo l'approccio socio-culturale di Luis Radford, la conoscenza si collega alle attività nelle quali i soggetti si impegnano e ciò deve essere considerato in relazione con le istituzioni culturali dell'ambiente sociale (Radford, 1997 e 2003). La conoscenza non si produce nel rapporto esclusivo tra individuo e problema da risolvere, ma è socialmente ottenuta: all'impostazione unidirezionale di una costruzione della conoscenza scandita da successivi superamenti di ostacoli si sostituisce un progresso dialogico; l'allievo apprende la matematica in collaborazione con altri allievi e con l'insegnante, in un ampio contesto culturale (Radford, Boero & Vasco, 2000, p. 164). Chiaramente la storia deve essere interpretata con riferimento alle diverse culture e fornisce dunque un'occasione per la ricostruzione critica dei contesti socio-culturali del passato (Tall, 1982; Bagni, in corso di stampa).

Molto interessante dal punto di vista didattico è infine l'approccio "voci ed echi" di Paolo Boero; esso si basa sulla considerazione di alcune espressioni verbali e non verbali (dette "voci"), riconducibili a momenti storici, che, su esplicita proposta del docente, possono essere considerate ed interpretate dai discenti (e produrre pertanto un "eco").[4] La posizione epistemologica che sta alla base di tale impostazione (Radford, Boero & Vasco, 2000, p. 165-166) prevede che la conoscenza teorica sia organizzata secondo criteri metodologici di coerenza e di sistematicità (Vygotsky, 1990) e fornisca specifici "modi di vedere" gli oggetti di una teoria; inoltre, che le definizioni e le dimostrazioni siano basate su strategie di pensiero collegate allo specifico linguaggio impiegato ed alle tradizioni culturali (alcuni risultati sperimentali sono riportati in: Garuti, 1997; Lladò & Boero, 1997; Tizzani & Boero, 1997).

2. L'interpretazione degli elementi storici

Le precedenti riflessioni portano a considerare le difficoltà determinate dalle impegnative assunzioni epistemologiche che si rendono di volta in volta

[4] Ciò può avvenire attraverso un *Gioco delle voci e degli echi*, con domande quali: "*Come X avrebbe potuto interpretare il fatto Y? Attraverso quali esperienze Z avrebbe potuto sostenere la propria ipotesi? Quali analogie e differenze puoi trovare tra quanto affermato da un tuo compagno di scuola e ciò che hai letto su W?*" (Radford, Boero & Vasco, 2000).

necessarie, e dunque alla formulazione di un interrogativo radicale: è lecito l'uso della componente storica nella trasmissione del sapere matematico?

Non è forse produttivo porre la questione in termini così netti e inquietanti. Preferiamo chiederci: *quale* uso della storia è lecito, alla luce di alcune scelte epistemologiche di base che non possono essere eluse, nei processi di trasmissione della conoscenza matematica? Secondo noi, infatti, è possibile delineare un uso corretto della storia: se un livello aneddotico, pur potendo rinforzare la motivazione dei discenti (Furinghetti & Somaglia, 1997), rimane superficiale e dunque non molto significativo, un approccio che pretenda di far seguire allo sviluppo cognitivo un percorso modellato sull'evoluzione storica (ci riferiamo alla celebre tesi espressa in: Piaget & Garcia, 1983) incontrerebbe difficoltà piuttosto rilevanti. La stessa impostazione teorica collegata agli ostacoli epistemologici, come sopra notato, implica alcune assunzioni pesanti; ad esempio L. Radford sottolinea:

> "Anche il più titanico sforzo di rinunciare alle nostre conoscenze attuali nel tentativo di vedere l'evento storico nella sua purezza non avrebbe successo: siamo condannati a portarci dietro le nostre moderne concezioni del passato. E ciò che è peggio, non basta riconoscere tale problema, come spesso si fa, per risolverlo" (Radford, 1997, p. 30).

Le principali questioni alle quali è opportuno dedicare attenzione sono dunque le seguenti: possiamo confrontare direttamente due diversi periodi storici? Qual è il ruolo dei fattori socio-culturali che hanno influenzato lo sviluppo del sapere matematico? Non è possibile interpretare gli eventi storici senza l'influenza delle moderne concezioni (Furinghetti & Radford, 2002); dunque dobbiamo accettare il nostro "punto di vista" e tenere presente che, guardando al passato, poniamo in contatto due culture che sono "diverse [ma] non sono incommensurabili" (Radford, Boero & Vasco, 2000, p. 165).

Naturalmente anche questa scelta comporta alcune difficoltà: non sarebbe infatti accettabile un ingenuo tentativo di imitare l'approccio mentale ai problemi proprio dei matematici del passato; la ricostruzione dell'ambiente socio-culturale di un periodo lontano non è un'operazione semplice e deve essere sorretta da un'adeguata preparazione storica ed epistemologica.

Concordiamo comunque con P. Pizzamiglio, il quale afferma:

> "L'introduzione della dimensione storica non serve direttamente e precisamente a spiegare matematica, ma (…) consente di conoscere la matematica ad un livello riflesso, studiandola cioè come oggetto di indagine appunto storica" (Pizzamiglio, 2002, p. 21).

La concezione della matematica come *oggetto di indagine storica* è molto importante: l'ineliminabile presenza della "lente" (Confrey & Smith, 1996) determinata dalle concezioni moderne rende opportuna l'adozione consapevole di un punto di vista; e la presa d'atto della presenza di una "indagine storica" avente per suo oggetto la matematica evidenzia la possibilità di una corretta collocazione del punto di vista moderno.

3. Usi della storia nella trasmissione del sapere matematico

L'introduzione storica di un concetto può essere organizzata secondo diverse modalità: potremmo ad esempio ipotizzare una diretta illustrazione cronologica dei riferimenti storici collegati al concetto in questione, realizzando una vera e propria "storia dell'argomento". A ciò corrisponderebbero alcune posizioni: gli elementi storici servirebbero per introdurre l'argomento ai quali si riferiscono e dovrebbero essere quindi inseriti all'inizio della trattazione; potrebbero essere proposti, in ordine cronologico, tutti i riferimenti storici disponibili (compatibili con il livello del discente).

Tale modo di operare, che possiamo indicare come *uso a priori della storia nella trasmissione del sapere matematico*, porrebbe dunque l'accento su di una supposta valenza introduttiva degli elementi storici; e tale supposizione si basa su di una posizione epistemologica tutt'altro che trascurabile. Ma essa non è l'unica possibile per interpretare e caratterizzare il ruolo della storia nella trasmissione della conoscenza matematica.

L'*uso a priori della storia nella trasmissione del sapere matematico* si collega con una questione didatticamente non banale: l'introduzione di un concetto deve sempre seguire l'evoluzione storica? Percorsi storici ordinati non cronologicamente sono spesso adottati nella pratica tradizionale: ad esempio, l'analisi matematica viene in generale presentata secondo una sequenza che non riflette l'evoluzione storica (Hairer & Wanner, 1996; anche se alcuni autori hanno tentato presentazioni in parte differenti: Apostol, 1977); anzi, per molti versi, l'analisi viene proposta storicamente "a ritroso".[5]

Il problema epistemologico non riguarda solo l'ordine degli elementi storici, ma la loro interpretazione: si tratta cioè di stabilire se l'accostamento alla storia debba anticipare o seguire la presentazione di un concetto nella sistemazione moderna. Un *uso a posteriori della storia nella trasmissione del sapere matematico* può prevedere che il ruolo degli elementi storici si colleghi (anche) all'approfondimento e al chiarimento degli argomenti trattati.

Una nota è essenziale: qualsiasi siano le modalità dell'impiego della storia, è indispensabile mantenere un rigoroso atteggiamento su alcune questioni metodologiche. In particolare, come in parte anticipato, ogni richiamo storico deve essere adeguatamente contestualizzato, cioè presentato con riferimento al periodo in esame: l'evoluzione del *savoir savant* (Chevallard, 1985) non può essere concepita assolutamente, ma deve essere riferita all'evoluzione delle

[5] Naturalmente neppure un'impostazione cronologicamente "a ritroso" può essere considerata alla stregua di una regola fissa: in alcuni casi i riferimenti storici stessi possono infatti suggerire una ben precisa sequenza.

istituzioni culturali (Furinghetti & Radford, 2002): usi acritici o strumentali della storia della matematica sarebbero sostanzialmente scorretti.

Un primo esempio chiarirà quanto ora affermato. Nella propria *Quadratura parabolae*, Archimede di Siracusa (287-212 a.C.) dimostrò la seguente Proposizione 23 (in *Elementi*, IX-35, Euclide espresse un analogo risultato):

> "Se alcune grandezze si pongono ordinatamente nel rapporto quadruplo [cioè se ciascuna è quadrupla della seguente], tutte le grandezze [sommate insieme] più ancora la terza parte della più piccola saranno i quattro terzi della maggiore" (Frajese, 1974, p. 511).

Diciotto secoli più tardi, F. Viète (1540-1603) calcolò la somma di una serie geometrica; e non è difficile rilevare che tale risultato può essere intuito interpretando opportunamente la citata proposizione archimedea. Se infatti consideriamo la prima quantità unitaria, essendo il resto la terza parte dell'ultimo termine avremmo:

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots=\frac{1}{3}$$

e la somma degli (infiniti) addendi sarebbe dunque:

$$1+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots\right)=1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$$

Nel 1655 A. Tacquet (1612-1660) inserì il risultato in questione nella propria *Arithmeticae theoria et praxis accurate demonstrata* (anche J. Wallis, nello stesso anno, lo pubblicò in *Arithmetica infinitorum*) e affermò:

> "Tu che mi leggi vedrai con quanta facilità si giunga a quanto ti avevo promesso: cioè il passaggio da una progressione finita alla progressione infinita. Vi è ragione di stupirsi che gli aritmetici che conoscevano il teorema relativo alle progressioni finite abbiano ignorato quello concernente le progressioni infinite che da esso si deduce immediatamente" (cit. in: Loria, 1929-1933, p. 517).

Tacquet dunque propose direttamente un riferimento alla matematica antica senza però considerare alcuna contestualizzazione storica. Ricordiamo che in *Physica*, III-VI, di Aristotele di Stagira (384-322 a.C.) troviamo l'implicita accettazione del fatto che la somma di un numero grande a piacere di addendi (dunque una serie, ma considerata in termini potenziali) possa essere limitata; ma la cultura greca distingueva strettamente l'infinito attuale e potenziale; matematicamente, seguendo proprio Aristotele, solo l'infinito potenziale era accettato e dunque non avrebbe molto senso ipotizzare, oggi, alcuna esplicita considerazione di una “progressione infinita” nella Grecia classica![6]

La presentazione della ricordata proposizione archimedea potrebbe essere concepita didatticamente in chiave introduttiva (fare riferimento ad un *uso a priori*) oppure utilizzata per proporre agli allievi una riflessione critica sulle serie numeriche (*uso a posteriori*): ma in entrambi i casi la contestualizzazione del riferimento storico sarebbe irrinunciabile.

4. Un esempio: le radici storiche del Calcolo infinitesimale

4.1. Il problema della selezione degli elementi storici

Proporremo ora una breve rassegna di elementi storici collegati all’evoluzione di uno dei concetti fondamentali della matematica in generale e del Calcolo infinitesimale in particolare: il concetto di limite. Non intenderemo suggerire un loro particolare impiego didattico (*a priori* ovvero *a posteriori*), ma ci limiteremo a evidenziare mediante alcuni esempi che la presentazione di spunti tratti dalla storia dei concetti e dei procedimenti infinitesimali richiede un’adeguata contestualizzazione e che invece, dal punto di vista storiografico, spesso alcuni Autori (analogamente a quanto precedentemente visto nel caso di Tacquet) assumono un’implicita posizione platonica.

In particolare, nel presente lavoro faremo inizialmente riferimento al metodo di esaustione; citeremo quindi B. Cavalieri (1598-1647) e J. Wallis (1616-1703), per chiudere con un cenno ad A.L. Cauchy (1789-1857).[7] Non proporremo dunque una completa rassegna delle radici storiche dell’analisi; osserviamo peraltro che ogni selezione dei dati storici da considerare significativi non può essere ritenuta epistemologicamente neutra:

> “I dati non sono mai interessanti per se stessi. Gli elementi storici saranno sempre interessanti con riferimento al quadro concettuale sul quale si basa la ricerca in questione” (Radford, 1997, p. 28).[8]

Segnaliamo che spesso l’approccio ai dati originali è mediato da edizioni successive e da commenti, e ciò può rendere necessario valutare anche le concezioni dei curatori delle edizioni considerate; E. Barbin scrive:

> “Ogni lettura implica una re-interpretazione ed ogni scrittura implica una ri-appropriazione di idee e di conoscenza. Le re-interpretazioni e le ri-

---

[6] Osserviamo tuttavia che anche la nostra critica a Tacquet dovrebbe essere prudente: la stessa posizione di Tacquet dovrebbe infatti essere storicamente contestualizzata, in quanto non potremmo supporre la presenza delle nostre moderne concezioni epistemologiche nel pensiero dei matematici del XVII secolo (Barbin, 1994, p. 157).

[7] Naturalmente questa è solo una delle possibili scelte.

[8] Diversi Autori hanno sottolineato che le scelte programmatiche devono essere basate su di una chiara consapevolezza epistemologica e comunque tali da escludere il ricorso ad un “erudito nozionismo” o l’indulgenza al “riferimento inessenziale” (Pizzamiglio, 2002, p. 33).

appropriazioni di conoscenza geometrica per mezzo di opere geometriche elementari sono riferite (...) a concezioni epistemologiche. Anche tutte queste concezioni devono essere considerate nei rispettivi contesti storici" (Barbin, 1994, p. 157).

4.2. Il metodo di esaustione negli *Elementi* euclidei

Il metodo di esaustione è un procedimento classico attribuito a Eudosso di Cnido (405-355 a.C.; ad esempio la Proposizione XII-10, che dimostra che un cono è la terza parte di un cilindro con la stessa base ed uguale altezza, è fatta risalire a Eudosso): le dimostrazioni per esaustione sono spesso considerate importanti procedimenti infinitesimali e sono a volte presentate nella pratica didattica. Esse sono basate sulla seguente proposizione, che traduciamo dalla versione degli *Elementi* curata da F. Commandino (1509-1575):

> **Proposizione X-1.** Considerate due grandezze diverse, se dalla maggiore si sottrae una grandezza maggiore della sua metà e da ciò che resta ancora una grandezza maggiore della metà, e tale processo viene continuamente ripetuto, allora rimarrà una grandezza più piccola della grandezza minore inizialmente scelta.[9]

Nella dimostrazione Euclide applica il cosiddetto postulato di Eudosso (che negli *Elementi* è una *definizione*: in III-16 Euclide considera l'insieme degli angoli rettilinei e curvilinei che non è una classe di grandezze archimedee; dunque i Greci non erano del tutto inconsapevoli dell'esistenza di grandezze le cui caratteristiche avrebbero fatto pensare, più tardi, a quantità infinitesimali):

> **Definizione V-4.** Si dice che due grandezze hanno un rapporto quando le multiple di una possono superare l'altra.[10]

Ma possiamo supporre la presenza di un limite (modernamente inteso) nel metodo di esaustione? M. Kline scrive:

> "Il termine *esaustione* deriva dal fatto che successivi poligoni inscritti *esauriscono* il cerchio. (...) Il termine, anche alla luce di questa elementare descrizione, può suggerire che il metodo sia solo approssimato e sia un passo nella direzione del concetto di limite. Ma (...) il metodo è rigoroso. Non c'è alcun esplicito processo di limite in esso; si basa sul metodo

---

[9] **Liber X, Propositio I.** Duabus magnitudinibus inequalibus expositis, si à maiori auferatur maius, quàm dimidium, & ab eo, quod eliquum est rursus auferatur maius, quam dimidium; & hic semper fiat: relinquetur tandem quaedam magnitudo, quae minori magnitudine exposita minor erit (Commandino, 1619, p. 123r; si veda inoltre: Tartaglia, 1569, p. 177v, in italiano).

[10] **Liber V, Definitio IV.** Proportionem habere inter se magnitudines dicuntur, quae multiplicatae se invicem superate possunt (Commandino, 1619, p. 57v; si veda inoltre: Tartaglia, 1569, p. 83r, in italiano).

indiretto di dimostrazione e in questo modo evita il ricorso al limite" (Kline, 1972, p. 83).

L'ideale distanza tra il metodo di esaustione e il concetto di limite non è solo da intendersi in senso formale (Radford, 2003): nel metodo di esaustione, infatti, possiamo oggi individuare analogie con i procedimenti infinitesimali, ma tale interpretazione è nostra, basata su concezioni moderne. Euclide applicò spesso la Proposizione X-1, ad esempio nella successiva X-2 (*Scholium*, in: Commandino, 1619, p. 123v e p. 124r) e nel Libro XII (XII-2, XII-5, XII-10, XII-18): ma mai egli si riferì specificamente, in termini espliciti o particolari, a procedimenti infinitesimali. Evidentemente le istituzioni culturali del mondo greco ebbero un ruolo rilevante: la stessa argomentazione greca risentì del contesto sociale e politico (Radford, 1997).

Un'altra occasione di riflessione storica e storiografica sugli *Elementi* e sul metodo di esaustione si collega alle proposizioni seguenti:

Proposizione XII-1. Poligoni simili inscritti in circoli stanno l'uno all'altro come i quadrati dei rispettivi diametri.[11]

Proposizione XII-2. Due circoli stanno l'uno all'altro come i quadrati dei rispettivi diametri.[12]

È interessante ricordare che venti secoli dopo la redazione degli *Elementi*, G. Saccheri (1667-1733), in *Euclides ab omni naevo vindicatus*, scrisse:

"Euclide ha già dimostrato (prop. 1) che due poligoni simili, inscritti in due cerchi, stanno tra loro come i quadrati dei loro diametri; proposizione da cui, come corollario, avrebbe potuto ricavare la prop. 2 considerando i cerchi come poligoni infinitilateri" (Saccheri, 1904, p. 104).

L'appunto di Saccheri è stimolante, nel XVII secolo, ma i matematici greci mai utilizzarono l'infinito secondo tale idea: la dimostrazione euclidea della proposizione XII-2 è del tutto diversa. A. Frajese nota correttamente:

"Saccheri è evidentemente assai vicino, nel tempo, alla fondazione del calcolo infinitesimale! Ma è proprio per evitare il ricorso all'infinito in questo modo che Eudosso di Cnido, il rigorizzatore della matematica greca, l'imbrigliatore dell'infinito, escogitò quel metodo che i posteri tardi dissero *metodo di esaustione*" (Frajese & Maccioni, 1970, pp. 930-931).

Il metodo di esaustione non può essere considerato alla stregua di uno strumento di ricerca in quanto i risultati da dimostrare con la *reductio ad*

---

[11] **Liber XII, Propositio I.** Symilia polygona, quae in circulis describuntur, inter se sunt, ut diametrorum quadrata (Commandino, 1619, p. 211r; si veda inoltre: Tartaglia, 1569, p. 260r, in italiano).

[12] **Liber XII, Propositio II.** Circuli inter se sunt ut diametrorum quadrata (Commandino, 1619, p. 211v; si veda inoltre: Tartaglia, 1569, p. 260v, in italiano).

absurdum devono essere intuiti o ricavati euristicamente, dunque con tecniche che i Greci non accettavano come dimostrazioni. Nella mentalità eleatico-platonica la vera conoscenza di una proposizione non poteva essere ottenuta mediante i sensi: dunque il metodo di esaustione aveva il ruolo primario di conferire rigore alle dimostrazioni (Radford, 2003).

Si rivela a questo punto interessante un'annotazione di Bourbaki sulle (talvolta supposte) radici greche del Calcolo infinitesimale:

> "I Greci non possedettero né immaginarono niente di simile. Essi senza dubbio conobbero, non foss'altro per rifiutarsi di usarlo, un calcolo algebrico, ossia quello dei babilonesi, di cui una parte della loro geometria era probabilmente soltanto una trascrizione; è tuttavia nell'ambito dell'invenzione geometrica che si sviluppa la loro creazione matematica forse più geniale: il metodo per trattare quei problemi che per noi competono al calcolo integrale. Eudosso, trattando del volume del cono e della piramide, ne aveva dato i primi modelli che Euclide ci ha più o meno fedelmente tramandato" (Bourbaki, 1963, p. 171).

Concordiamo con il grande matematico policefalo: il metodo di esaustione non può essere collegato troppo sbrigativamente alla moderna analisi; si tratta primariamente di un procedimento *geometrico*, e comunque di un contributo che deve essere interpretato, senza forzature, nel proprio contesto culturale.

4.3. Verso l'infinitamente piccolo: Cavalieri e Wallis

In un ambiente socio-culturale radicalmente diverso, le quantità infinitesimali furono ovviamente considerate in termini del tutto innovativi. B. Cavalieri propose un nuovo metodo e un'interessante denominazione (*indivisibili*) ma non diede un'esplicita definizione di indivisibile (Lombardo Radice, 1989; Smith, 1959, p. 605). Nota E. Carruccio a proposito del principio di Cavalieri:

> "Questo principio si dimostra facilmente quando si sia già in possesso dell'attuale analisi infinitesimale; infatti equivale a dire che due integrali definiti, tra gli stessi limiti d'integrazione, aventi uguali funzioni integrande, sono uguali; e inoltre una costante moltiplicativa può portarsi indifferentemente dentro o fuori dal segno di integrazione. Ma Cavalieri non disponeva ancora di un'analisi infinitesimale algoritmicamente sistemata" (Carruccio, 1972, p. 179).

Il punto di vista di Carruccio è corretto: sarebbe poco significativo imporre al metodo di Cavalieri un'interpretazione analitica moderna. Certamente al lavoro cavalieriano non può essere negato un ruolo in un (preteso) cammino dell'umanità verso la piena consapevolezza dei concetti infinitesimali; ma tale giudizio sarebbe basato, ancora una volta, sulle nostre moderne concezioni. Il metodo degli indivisibili, frequentemente impiegato in ambito didattico, merita un'attenta introduzione storica.

Cavalieri non nutriva alcuna simpatia per i metodi indiretti (la *reductio ad absurdum* venne usata solo nella dimostrazione della Proposizione II-12 della *Geometria indivisibilibus continuorum*; ma alcuni anni più tardi si sentì in dovere di dare una seconda dimostrazione, diretta, di tale risultato nelle *Exercitationes geometricae sex*: Lombardo Radice, 1989, p. 256) e sosteneva che il suo procedimento era "una tecnica pragmatica per evitare il ricorso al metodo di esaustione" (Kline, 1972, p. 350). Esaminando l'ambiente matematico del tempo si nota che anche B. Pascal (1623-1662) e I. Barrow (1630-1677) espressero dubbi sull'utilità dell'antico metodo di esaustione (Bourbaki, 1963, p. 180); P. de Fermat (1601-1665) scrisse:

> "Sarebbe facile dare delle dimostrazioni con il metodo di Archimede (...); basterà chiarirlo una volta per tutte, onde evitare continue ripetizioni" (Fermat, 1891-1922, I, p. 257).

I matematici del XVII secolo, in una fase intensa e stimolante della storia della ricerca scientifica, esigevano dunque il supporto di tecniche praticamente efficaci, più che formalmente eleganti o "rigorose"; forse il metodo di Cavalieri non appariva del tutto "rigoroso" (questo termine, "rigore", ricorre spesso nella valutazione della matematica seicentesca... e non solo), come rileva M. Kline:

> "Gli indivisibili di Cavalieri furono criticati dai contemporanei, e lo stesso Cavalieri cercò di replicare, senza tuttavia disporre di giustificazioni rigorose" (Kline, 1972, p. 350).

Certamente, però, il rigore deve essere esaminato nell'originale contesto storico e concettuale, evitando di imporre a tale contesto i nostri moderni standard; nonostante le critiche, il metodo degli indivisibili era infatti utilizzato comunemente da molti matematici (Kline, 1972, p. 350): sarebbe chiaramente impensabile, da parte di studiosi del XVII secolo, il rifiuto di un procedimento sulla base di una debolezza fondazionale riconoscibile mediante un approccio moderno. Concordiamo dunque con L. Radford che scrive, non senza ironia:

> "Sembra poco plausibile che i matematici del passato abbiano potuto disporre di una qualche visione delle nostre moderne concezioni e abbiano potuto affannarsi, nelle loro epoche remote, per rendere i loro concetti così simili alla nostra moderna impostazione" (Radford, 1997, p. 27).

Le precedenti osservazioni possono far pensare a un'adeguata attenzione da parte della storiografia moderna per le questioni di contestualizzazione socio-culturale, a differenza di quanto abbiamo riscontrato, ad esempio, nel caso di Tacquet e di Saccheri. Non sempre però è così. Spesso, al contrario, anche la valutazione espressa in alcuni importanti manuali moderni viene riferita al nostro attuale punto di vista: ci limitiamo ad esempio a citare un passo di M. Kline riferito all'idea di limite di J. Wallis:

> “Alcuni germi della formulazione corretta dei nuovi concetti possono essere già trovati nella letteratura del Seicento. Wallis, nell’*Arithmetica infinitorum*, introdusse il concetto aritmetico del limite di una funzione come il numero avvicinato dalla funzione in modo tale che la differenza tra esso e la funzione possa essere resa minore di qualunque quantità assegnabile fino ad annullarsi quando il procedimento viene continuato all'infinito. La sua formulazione è vaga, ma contiene l’idea giusta” (Kline, 1972, p. 388).

“La sua formulazione è vaga”: tale giudizio richiede attenzione. Certamente se esaminiamo la correttezza di Wallis rispetto ai nostri standard siamo portati a concludere che la sua espressione non è rigorosa. Ma tale valutazione sarebbe storicamente discutibile, semplicemente perché i nostri standard di rigore non esistevano, nel XVII secolo. Dunque (ovviamente) l’espressione di Wallis non sarebbe corretta, *oggi*; ma Wallis *era* rigoroso, a modo suo.

4.3. La definizione di limite: Cauchy

Non potremmo concludere una breve rassegna di riferimenti tratti dalla storia dei concetti e dei procedimenti infinitesimali senza citare A.L. Cauchy, il quale nel celebre *Cours d’Analyse algébrique* del 1821 diede le seguenti definizioni di limite e di infinitesimo:

> “Allorché i valori successivamente assunti da una stessa variabile si avvicinano indefinitamente a un valore fissato, in modo da finire per differirne di tanto poco quanto si vorrà, quest’ultimo è chiamato il *limite* di tutti gli altri. Così (…) un numero irrazionale è il limite delle diverse frazioni che ne forniscono valori sempre più approssimati. In geometria, la superficie di un cerchio è il limite verso il quale convergono le superfici dei poligoni iscritti, mentre il numero dei loro lati cresce sempre di più, ecc. Allorché i successivi valori numerici [ovvero i valori assoluti] di una stessa variabile decrescono indefinitamente in modo da divenire minori di ogni numero dato, questa variabile diviene ciò che si chiama *infinitesimo* o una quantità *infinitesima*. Una variabile di questa specie ha zero come limite” (Cauchy, 1821, p. 4; Cauchy, 1884-1897; trad. in: Bottazzini, Freguglia & Toti Rigatelli, 1992, pp. 327-328).

Cauchy introdusse la distinzione tra *constanti* e *quantità variabili*, sebbene egli non disponesse di un’introduzione assiomatica dei numeri reali. Dal punto di vista didattico, è opportuno rilevare che la formulazione verbale proposta da Cauchy era espressa nel registro disponibile all’inizio del XIX secolo: la sua considerazione, oggi, potrebbe essere ben diversa e portare all’uso di altri registri rappresentativi.

Come anticipato, gli esempi presentati non costituiscono una rassegna completa di riferimenti storici collegati al concetto di limite (ammesso che la pretesa di fornire una tale “rassegna completa” abbia qualche significato!): molti autori potrebbero essere ancora esaminati, tra i quali citiamo L. Valerio (1552-1618), K.T.W. Weierstrass (1815-1897) e A. Robinson (Robinson, 1966); ad esempio, la definizione di limite data da Weierstrass consentirebbe una rappresentazione simbolica moderna. Ci limitiamo tuttavia a ricordare che anche l’eventuale ricorso al registro simbolico dovrebbe essere attentamente ponderato: sarebbe infatti fuorviante fare riferimento ad *un singolo* registro simbolico, in quanto esistono registri diversi nei diversi ambienti socio-culturali (Bagni, in corso di stampa).

5. Conclusioni

Il passaggio dal discreto al continuo è un problema culturale: il riferimento alla storia può essere importante per comprendere caratteristiche e difficoltà di tale delicata fase. Più in generale, la storia della matematica offre occasioni di grande importanza dal punto di vista formativo: tra queste, la possibilità di una riflessione metacognitiva e quella di ottenere un’approfondita conoscenza socio-culturale di un periodo storico (Furinghetti & Somaglia, 1997). Tali possibilità sono mutuamente collegate, perché il trasferimento di spunti e di contenuti storici ai procedimenti di trasmissione della conoscenza non avviene per semplice analogia, ma coinvolge punti di vista anche non strettamente matematici (Radford, 1997).

Nel presente lavoro abbiamo esaminato alcune modalità di interazione tra la storia e la trasmissione del sapere: abbiamo inizialmente ricordato l’*uso a priori della storia nella trasmissione della matematica*, in cui la presentazione storica di un argomento precede e prepara l’introduzione didattica; abbiamo poi illustrato un possibile *uso a posteriori della storia nella trasmissione della matematica* in cui gli elementi storici sono considerati anche con riferimento alla conoscenza da insegnare ed apprendere, mantenendo tuttavia una costante attenzione critica per i canoni di razionalità propri del periodo storico coinvolto (e qui ricordiamo le scelte alla base degli approcci di Radford e di Boero).

Resta un punto importante da affrontare: le impostazioni descritte (*a priori* e *a posteriori*) devono essere considerate alternative o complementari? Tale questione è delicata e richiede un adeguato approfondimento: forse l’adozione di una possibilità non esclude definitivamente l’altra opzione, sebbene le due impostazioni si basino su diverse assunzioni epistemologiche.

Si noti infine che è necessario mantenere distinta l’attività di ricerca storica propriamente detta dall’uso della storia nei processi di trasmissione del sapere. La prima è compito esclusivo dello storico, mentre la seconda è compito del ricercatore in didattica e dell’insegnante. Concludiamo dunque osservando (Grugnetti & Rogers, 2000, p. 40) che lo storico mira a ricostruire l’evoluzione della ricerca matematica nel tempo *dall’interno*, cioè collocandosi idealmente nel momento esaminato e senza particolari riferimenti alla successiva sistemazione concettuale della materia; il didattico (docente, ricercatore in didattica) invece la ripercorre e la propone *dall'esterno*, interpretandola anche alla luce del sapere che sta trasmettendo, senza tuttavia trascurare la corretta contestualizzazione storica, sociale e culturale dei riferimenti impiegati.

L'autore ringrazia David Tall (University of Warwick, United Kingdom) per i preziosissimi suggerimenti.

Riferimenti bibliografici

Apostol, T.M. (1977), *Calcolo*, I, Bollati Boringhieri, Torino.

Bagni, G.T. (2001), La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental en la educación media superior, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4, 1, 45-62.

Bagni, G.T. (in corso di stampa), Historical roots of limit notion. Development of its representative registers and cognitive development, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*.

Barbin, E. (1994), Sur la conception des savoirs géométriques dans les Éléments de géométrie, Gagatsis, A. (Ed.), Histoire et enseignement des Mathématiques: *Cahiers de didactique des Mathématiques*, Thessaloniki, 14-15, 135-158.

Bottazzini, U.; Freguglia, P. & Toti Rigatelli, L. (1992), *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni, Firenze.

Bourbaki, N. (1963), *Elementi di storia della matematica*, Feltrinelli, Milano (*Eléments d'histoire des mathematiques*, Hermann, Paris 1960; *Elements of the History of Mathematics*, Springer, Berlin 1997; 2° ed.: 1998).

Boyer, C.B. (1985), *A History of Mathematics*, princeton University Press, Princeton (1° ed.: John Wiley & Sons, New York 1968).

Brousseau, G. (1983), Les obstacles épistémologiques et les problèmes in mathématiques, *Reserches en Didactique des Mathématiques*, 4, 2, 165-198.

Brousseau, G. (1989), Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques, Bednarz, N. & Garnier, C. (Eds.), *Constructions des savoirs, obstacles et conflits*, Agence d'Arc, Montreal, 41-64.

Carruccio, E. (1972), *Matematiche elementari da un punto di vista superiore*, B. D'Amore (Ed.), Pitagora, Bologna.

Casari, E. (1973), *La filosofia della matematica del '900*, Sansoni, Firenze.

Cauchy A.L. (1884-1897), *Oeuvres complètes*, Gauthier-Villars, Paris.

Cauchy, A.L. (1821), *Cours d'Analyse algébrique*, Paris.

Chevallard, Y. (1985), *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*, La Penseé Sauvage, Grenoble.

Commandino, F. (1619), *Euclidis Elementorum Libri XV*, Concordia, Pesaro.

Confrey, J. & Smith, E. (1996), Comments on James Kaput's chapter, Schoenfeld, A.H. (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving*, Erlbaum, Hillsdale, 172-192.

D'Amore, B. & Frabboni, F. (1996). Didattica generale e didattiche disciplinari. Milano, Angeli.

D'Amore, B. (1999). Elementi di didattica della matematica. Bologna: Pitagora.

Fauvel, J. & van Maanen, J. (2000) (Eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, 39-62, Dodrecht, Kluwer.

Fermat, P. de (1891-1922), *Œuvres*, I-V, Gauthier-Villars, Paris.

Frajese, A. & Maccioni L. (Eds.) (1970), *Gli Elementi di Euclide*, UTET, Torino.

Frajese, A. (1950), Storia della matematica ed insegnamento medio, *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, III, 337-342.

Frajese, A. (Ed.) (1974), *Opere di Archimede*, UTET, Torino.
Furinghetti, F. & Radford, L. (2002), Historical conceptual developments and the teaching of mathematics: from philogenesis and ontogenesis theory to classroom practice, English, L. (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, 631-654, Erlbaum, Hillsdale.
Furinghetti, F. & Somaglia, A. (1997), Storia della matematica in classe, *L'educazione matematica*, XVIII, V, 2, 1.
Furinghetti, F. (1993), Insegnare matematica in una prospettiva storica, *L'educazione matematica*, III, IV, 123-134.
Gadamer, H.-G. (1975), *Truth and Method*, Crossroad, New York (2° ed.: 1989).
Garuti, R. (1997), A classroom discussion and a historical dialogue: a case study, *Proceedings of the 21st International Conference on the Psychology of Mathematics Education*, Lathi, Finland, 2, 297-304.
Giusti, E. (1999), *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Bollati Boringhieri, Torino.
Grugnetti, L. & Rogers, L. (2000), Philosophical, multicultural and interdisciplinary issues, Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, 39-62, Dodrecht, Kluwer.
Hairer, E. & Wanner, G. (1996), *Analysis by Its History*, Springer-Verlag, New York.
Kline, M. (1972), *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, New York.
Lladò, C. & Boero, P. (1997), Les interactions sociales dans la classe et le role mediateur de l'einseignant, *Actes de la CIEAEM-49*, Setubal 171-179.
Lolli, G. (2002), *Filosofia della Matematica. Eredità del Novecento*, Il Mulino, Bologna.
Lombardo Radice, L. (1989), *Geometria degli indivisibili di Cavalieri*, UTET, Torino (1° ed.: 1966).
Loria, G. (1929-1933), *Storia delle matematiche dall'alba delle civiltà al tramonto del secolo XIX*, Sten, Torino (Cisalpino-Goliardica, Milano 1982).
Pepe, L. (1990), Storia e didattica della matematica, *L'educazione matematica*, III, I-2, 23-33.
Piaget, J. & Garcia, R. (1983), *Psychogenèse et histoire des sciences*, Flammarion, Paris.
Pizzamiglio, P. (2002), *Matematica e Storia. Per una didattica interdisciplinare*, La Scuola, Brescia.
Radford, L. (1997), On Psychology, Historical Epistemology and the Teaching os Mathematics: Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33.
Radford, L. (2003), On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought, Anderson, M. & Al. (Eds.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*, 49-79, Legas, Ottawa.
Radford, L., Boero, P. & Vasco, C. (2000), Epistemological assumptions framing interpretations of students understanding of mathematics, Fauvel, J. & van Maanen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study*, Kluwer, Dordrecht, 162-167.
Robinson, A. (1966), *Non-standard analysis*, North-Holland, London.
Rogers, L. (1995), The historical construction of mathematical knowledge, Lalonde, F. & Jaboeuf, F. (Eds.), *Actes de la prmière université d'été europeenne. Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique*, IREM de Montpellier, 105-114.
Saccheri, G. (1904), *Euclides ab omni naevo vindicatus*, Boccardini (Ed.), Hoepli, Milano.
Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
Siu, M.K. (1995), Mathematical thinking and History of Mathematics, Swetz, F., Fauvel, J., Bekken, O., Johansson, B. & Katz, V. (Eds.), *Learn From the Masters*, MAA, 279-282.
Slavit, D. (1997), An alternate route to reification of function, *Educational Studies in Mathematics* 33, 259-281.

Smith, D.E. (1959), *A source book in Mathematics*, Dover, (1° ed.: McGraw-Hill, 1929).
Speranza, F. (1997), *Scritti di Epistemologia della Matematica*, Pitagora, Bologna.
Swetz, F.J. (1989), Using problems from the history of mathematics in classroom instruction, *Mathematics Teacher*, 82, 370-377.
Swetz, F.J. (1995), To know and to teach: mathematical pedagogy from a historical context, *Educational Studies in Mathematics*, 29, 73-88.
Tall, D. (1982), Elementary Axioms and Pictures for Infinitesimal Calculus, *Bulletin of the IMA*, 14, 43-48.
Tartaglia, N. (1569), *Euclide Megarense acutissimo philosopho, solo introduttore delle scientie mathematice*, Bariletto, Venezia.
Tizzani, P. & Boero, P. (1997), La chute des corps de Aristote à Galilée: voix de l'historie et echos dans la classe, *Actes de la CIEAEM-49*, Setubal 369-376.
Vygotsky, L.S. (1990), *Pensiero e linguaggio*, Laterza, Bari.