Atti del IV Incontro dei Nuclei di Ricerca Didattica nella Scuola Superiore, Piochi, B. (Ed.) (1994), IRRSAE Toscana, 27-31

CONTINUITÀ E DISCONTINUITÀ NELLA DIDATTICA DELL'ANALISI MATEMATICA

Giorgio T. Bagni
Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica di Bologna

Summary. A continuous function is often related to its graph, so that a function is said to be continuous in its domain if its graph has no irregularities (such as jumps, interruptions etc.) at every point of that domain. This intuitive idea of continuity can be inaccurate, indefinite if related to functions like Dirichlet function, whose graph is not realizable.

INTRODUZIONE

> *"E qui è da osservare che, definite le funzioni in un modo così generale, finché non si pongano altre condizioni, non si avranno per esse proprietà generali che includano delle relazioni fra i valori che esse hanno in punti differenti qualunque (cioè per valori differenti di x) quand'anche questi punti si suppongano arbitrariamente vicini l'uno all'altro, perché i valori che esse avranno potranno essere tutt'affatto qualunque e indipendenti del tutto gli uni dagli altri".*
>
> *Ulisse Dini, 1878* [5]

Il concetto di funzione continua è uno dei più importanti dell'Analisi matematica: utili ed interessanti sarebbero pertanto lo studio, il confronto e la catalogazione dei vari procedimenti didattici adottati per l'introduzione della continuità nelle scuole secondarie superiori e nel primo biennio di alcuni corsi universitari.

La stessa presentazione della basilare nozione di limite di una funzione di variabile reale è spesso abbinata alle considerazioni sulle funzioni continue: si vedano, a tale riguardo, le impostazioni proposte nei manuali universitari di T.M. Apostol ([2], pp. 158-165) e di G. Prodi ([10], pp. 126-128), e quelle dei manuali per la scuola secondaria superiore di G.C. Barozzi ([4], pp. 168-172) e di G. Prodi-E. Magenes ([11], pp. 82-101). Tale scelta, assai diffusa, non è certamente l'unica presente nei libri di testo e nei manuali attualmente in uso: in H. Anton [1] (manuale universitario), ad esempio, le funzioni continue sono introdotte come generalizzazioni delle funzioni derivabili.

Nella didattica delle funzioni continue, frequente è anche il ricorso ad un'immagine intuitiva, che vede descritta una funz ione *continua* in un punto del proprio dominio come avente il grafico cartesiano che, in corrispondenza di quel punto, può essere tracciato *senza staccare la matita dal foglio*: nel manuale universitario di S.M. Nikolskij ([9], p. 88) è citata esplicitamente questa immagine. Una funzione continua in tutto il proprio dominio viene ad essere, quindi, una funzione il cui grafico è disegnabile *continuamente*, ovvero senza obbligatorie "interruzioni", senza "strappi" o "salti" in tutto il dominio fissato (anche T.M. Apostol fa riferimento alle "irregolarità" del grafico delle funzioni discontinue, [2], p. 158). Naturalmente una simile descrizione della continuità non dovrebbe omettere un esplicito riferimento alla connessione del dominio.

Non sempre, nella scuola secondaria superiore, l'allievo sa adeguatamente svincolare il concetto di continuità da questa sua intuitiva visualizzazione grafica. Può ad esempio accadere che la valutazione della continuità di funzioni come quelle che saranno ricordate nel paragrafo seguente, il cui grafico cartesiano non è... disegnabile, venga a costituire un arduo ostacolo da superare, proprio a causa dell'impossibilità di visualizzare la continuità o la discontinuità attraverso le caratteristiche del grafico.

Inoltre, l'ampia consuet udine che, negli esempi e negli esercizi affrontati, l'allievo instaura con alcune funzioni continue (aventi per grafico, ad esempio, rette, parabole, curve logaritmiche) può essere causa del consolidarsi dell'impressione secondo cui la *continuità* sia da considerarsi alla stregua di *regola,* mentre la *discontinuità* come *eccezione*. In altri termini, l'allievo sembra associare implicitamente, direttamente al concetto *"funzione"* la caratteristica *"continuità"*, senza rendersi conto che una *funzione continua* dovrebbe invece essere considerata come un caso (molto) particolare di funzione (generalmente intesa).

Al fine di completare correttamente l'introduzione della nozione di funzione continua, può essere utile il ricorso ad alcuni classici esempi dell'Analisi matematica [12].

LA FUNZIONE DI DIRICHLET

Una funzione il cui esame riveste una sicura importanza didattica nell'àmbito della presentazione delle funzioni continue è la notissima *funzione di Dirichlet*, introdotta per ogni *x* reale dalla definizione seguente ([3], p. 468):

DEFINIZIONE 1. Si dice funzione di Dirichlet la funzione caratteristica dell'insieme dei reali irrazionali.

Ricordiamo che alcuni Autori (ad esempio G. Prodi in [10], p. 308) preferiscono definire tale funzione nel solo intervallo [0; 1] o riferire la definizione alla funzione caratteristica dell'insieme dei reali razionali; la valenza didattica dell'esempio, tuttavia, resta del tutto immutata.

La funzione di Dirichlet $x \to \chi_{\mathrm{R}\backslash\mathrm{Q}}(x)$ assume valore 1 in corrispondenza di ogni *x* reale irrazionale e 0 in corrispondenza di ogni *x* reale razionale; è possibile provare che tale funzione è discontinua per ogni *x* reale.

PROPOSIZIONE 1. La funzione di Dirichlet $x \to \chi_{\mathrm{R}\backslash\mathrm{Q}}(x)$ è discontinua per ogni *x* reale.

La dimostrazione è assai semplice, e può essere proposta, con pieno profitto degli allievi, anche a livello di scuola secondaria superiore.

Dimostrazione. Ad ogni intorno di $\alpha \in \mathbf{R}$ appartengono sia numeri razionali (la cui immagine è 0) che numeri irrazionali (la cui immagine è 1); essendo il codominio C della funzione costituito dai (soli) punti isolati 0, 1, esiste un intorno J di $f(\alpha)$ tale che: $\mathrm{J} \cap \mathrm{C} = \{f(\alpha)\}$.

Ciò comporta che non esiste un intorno di $\alpha \in \mathbf{R}$ tale che, per ogni x ad esso appartenente, sia $f(x) \in \mathrm{J}$, e pertanto la funzione di Dirichlet non è continua in $\alpha \in \mathbf{R}$.

La valutazione intuitiva della discontinuità della funzione di Dirichlet non è direttamente ed esclusivamente ricollegabile all'esame qualitativo del suo grafico cartesiano: il grafico della funzione di Dirichlet, infatti, a causa delle sue 'frequentissime' discontinuità, non p uò neppure essere disegnato, se non per un numero finito di punti; approssimativamente, esso potrebbe essere immaginato come un 'fitto susseguirsi di punti', collocati sia sull'asse delle x, sia sulla retta di equazione $y = 1$.

Analoghe considerazioni didattiche possono essere fatte per la funzione definita da $f(x) = x$ se x è razionale e da $f(x) = -x$ se x è irrazionale, continua solamente per $x = 0$ ([8], p. 29): assai difficile sarebbe infatti valutare la continuità di tale funzione per $x = 0$ attraverso l'esame del grafico cartesiano, che non è disegnabile se non in termini pesantemente approssimativi. Si noti che la funzione $x \rightarrow f(x)$ ora ricordata non è continua se non nel solo $x = 0$, a differenza della funzione $x \rightarrow |f(x)|$, che è invece continua per ogni numero reale: dal punto di vista didattico, l'esempio ora ricordato può essere utile per evidenziare che, sebbene la continuità di una funzione $x \rightarrow f(x)$ implichi la continuità della funzione $x \rightarrow |f(x)|$, non è vero il viceversa, cioè non è vero che la continuità di una funzione $x \rightarrow |f(x)|$ implica la continuità di $x \rightarrow f(x)$.

UNA FUNZIONE CONTINUA PER OGNI *x* IRRAZIONALE E DISCONTINUA PER OGNI *x* RAZIONALE

La presentazione di un interessante esempio può utilmente essere affiancata all'introduzione della funzione di Dirichlet. Si tratta della funzione f introdotta per ogni x reale dalla definizione seguente ([6], p. 124 e [8], pp. 34-35):

DEFINIZIONE 2. Sia $x \rightarrow f(x)$ la funzione reale di variabile reale così definita:

- se il reale x *è razionale*, con x=*m*/*n*, essendo *m* intero, *n* intero positivo, in modo che la frazione *m/n* sia ridotta ai minimi termini, allora: $f(x)=1/n$;
- se il reale x *è irrazionale*, allora: $f(x)=0$.

Si noti che la funzione ora introdotta è ben definita: infatti se x è un reale razionale, con x=*m*/*n*, essendo *m* intero, *n* intero positivo, in modo che la frazione *m/n* sia ridotta ai minimi termini, allora *m*, *n* sono univocamente determinati ([7], p. 53). È possibile provare che:

PROPOSIZIONE 2. La funzione introdotta dalla precedente definizione è continua per ogni x reale irrazionale e discontinua per ogni x reale razionale.

La dimostrazione della proposizione ora enunciata è assai più impegnativa di quella della proposizione precedente, relativa alla funzione di Dirichlet. Proponiamo dunque una traccia di tale dimostrazione, che può essere affrontata anche dagli allievi della scuola secondaria superiore (dal punto di vista didattico, può essere utile accompagnare la traccia della dimostrazione ora proposta con un diagramma a frecce tra due rette numeriche).

Traccia di dimostrazione. Sia $x=\alpha$ irrazionale e dunque sia $f(x)=0$: consideriamo allora un intorno J di $f(x)=0$ del tipo $]-\varepsilon;\varepsilon[$, con $\varepsilon>0$ e sia $1/k<\varepsilon$, con k intero positivo. È sempre possibile individuare un intorno I di $x=\alpha$ in modo che per tutte le x appartenenti ad esso risulti $f(x)\in]-1/k;1/k[$ quindi $f(x)\in]-\varepsilon;\varepsilon[$; infatti, è sufficiente considerare un intorno I di $x = a$ tale che i razionali appartenenti ad esso abbiano denominatore maggiore di k: le immagini di tali razionali appartengono quindi a J; gli irrazionali appartenenti all'intorno I hanno immagine 0, che appartiene a J. Pertanto se x è irrazionale la funzione è continua in x.

Sia invece $x=m/n$, frazione ridotta ai minimi termini, e $f(x)=1/n$: fissato un intorno J di $f(x)=1/n$ del tipo $](1/n)-\varepsilon;(1/n)+\varepsilon[$, essendo $0<\varepsilon<1/n$, non è possibile individuare un intorno I di $x=m/n$ tale che per tutte le x appartenenti ad esso risulti $f(x)\in](1/n)-\varepsilon;(1/n)+\varepsilon[$; infatti ad ogni intorno I di $x=m/n$ appartengono anche x irrazionali, e per tali x è

$f(x) = 0$, da cui segue $f(x) \notin \left]\frac{}{}(1/n) - \varepsilon; (1/n) + \varepsilon\right[$. Dunque, se x è razionale, la funzione in esame non è continua in *x*.

Lo studio della continuità della funzione ora presentata elude ogni interpretazione basata esclusivamente sull'intuito, quale l'esame qualitativo del grafico cartesiano. È infatti impossibile visualizzare con qualche precisione l'andamento del grafico di una funzione come quella sopra descritta: dunque la continuità di tale funzione per *x* reale irrazionale non può in alcun modo essere collegata ad un grafico *che dovrebbe poter essere tracciato (in corrispondenza di ogni x irrazionale) senza staccare la matita dal foglio*.

Si noti che non è possibile definire una funzione reale di variabile reale che sia continua in ogni punto razionale e discontinua in ogni punto irrazionale ([8], p. 103, [12]): la dimostrazione di ciò esula tuttavia dall'àmbito della didattica dell'Analisi matematica delle scuole secondarie superiori.

BIBLIOGRAFIA

[1] H. Anton (1986), *Calculus*, Editoriale Grasso, Bologna.

[2] T.M. Apostol (1977) *Calcolo*, v. I, *Analisi 1*, Boringhieri, Torino.

[3] G.T. Bagni (1993), *Funzioni naturali di variabile reale*, in: 'La matematica e la sua didattica", a. 1993, n. 4, pp. 466-475, Pitagora, Bologna.

[4] G.C. Barozzi (1989), *Corso di Analisi matematica*, Zanichelli, Bologna.

[5] U. Dini (1878), *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabile reale*, Nistri, Pisa, p. 36 (ristampa anastatica: 1990, Unione Matematica Italiana, Firenze).

[6] B.R. Gelbaum (1961), *Advanced calculus*, Appleton-Century-Crofts, Inc., New York.

[7] B.R. Gelbaum (1962), *The real number system*, Appleton-Century-Crofts, Inc., New York.

[8] B.R. Gelbaum & J.M.H. Olmsted (1979), *Controesempi in Analisi matematica*, Mursia, Milano.

[9] S.M. Nikolskij (1985), *Corso di analisi matematica*, v. I, Mir, Mosca.
[10] G. Prodi (1970), Analisi matematica, Boringhieri, Torino.
[11] G. Prodi & E. Magenes (1982), *Elementi di Analisi matematica*, D'Anna, Firenze.
[12] A.C.M. Van Rooj & W.H. Schikhof (1982), *Second course on real functions*, Cambridge University Press, Cambridge.