

In Bazzini, L. (Ed.), *Atti del Seminario Franco Italiano di Didattica dell'Algebra, VI*, (SFIDA 21–25) (pp. 83–98). Torino: Dipartimento di Matematica, Università di Torino (2008)

Il re degli abitanti della luna è calvo? **Nel centenario della pubblicazione di *On denoting* di B. Russell (1905)**

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Udine (Italia)

Summary

The article “On denoting” by Bertrand Russell, published in 1905, is a milestone for the philosophical reflection on the language. In the present paper we examine pupils’ reactions both to a sentence inspired by a celebrated example and to a statement expressed in mathematical language. Experimental data can be interpreted with reference to the concepts of truth and rationality, so that we propose some final reflections that shift “the standard of epistemic objectivity from the private certainty of an experiencing subject to the public practice of justification within a communicative community” (Jürgen Habermas).

I. Una premessa storica: dalla classe vuota alla suppositio

Introdurremo il nostro lavoro con alcuni riferimenti storici (Kneale & Kneale, 1972; Bagni, 1997, p. 61). Consideriamo ad esempio i seguenti sillogismi, aventi identica struttura:

<i>Tutti i Ciclopi sono bipedi</i>	<i>Tutti i cittadini ateniesi sono bipedi</i>
<i>Tutti i bipedi sono esseri viventi</i>	<i>Tutti i bipedi sono esseri viventi</i>
<i>Qualche essere vivente è un Ciclope</i>	<i>Qualche essere vivente è un cittadino ateniese</i>

Il secondo appare corretto; ma il primo presenta una conclusione inaccettabile. La difficoltà consiste nella presenza, nel primo sillogismo, di una «classe vuota» (quella dei mitologici Ciclopi), mentre l’analoga classe del secondo (quella degli ateniesi) non è vuota. I riferimenti ai Ciclopi non sono equivalenti: nella premessa si parla dei Ciclopi in senso mitologico, ammettendone l’esistenza, mentre nella conclusione il ruolo del termine *Ciclope* è attuale (si afferma l’esistenza di Ciclopi tra i viventi); i riferimenti ai cittadini ateniesi nel secondo sillogismo, invece, appaiono equivalenti, in quanto indicano elementi di una classe non vuota.

Quanto presentato richiama (si veda Vincenzo Ferreri, 1350-1419: Bocheński, 1972, I, p. 290) un altro aspetto della logica medievale: Guglielmo di Shyreswood introdusse la *supposizione*:

“Il significato è la rappresentazione [*praesentatio*] di una forma all’intelletto. La supposizione è la coordinazione [*ordinatio*] di un concetto sotto un altro” (trad. in: Bocheński, 1972, I, p. 217).

Il significato riferisce direttamente un termine ad un oggetto e la *suppositio* considera il rapporto del termine, già significativo, con gli altri elementi presenti nella proposizione in cui compare (anche Pietro Ispano, nelle *Summulae logicales*, colse la differenza tra *significatio* e *suppositio*: Geymonat, 1970, I, p. 549); nella *Summa Logicae* (I, 63, 2) Guglielmo di Ockham (1281-1349) ribadì che la supposizione “è una proprietà che appartiene ai termini, ma soltanto in quanto [compaiono] in una proposizione” (trad. in: Bocheński, 1972, I, p. 219) e ciò porta ad affermare che la *suppositio* di un termine è “l’uso di tale termine entro una proposizione secondo una ben determinata accezione di esso” (Geymonat, 1970, I, p. 549).

Il riferimento di un termine al contesto della proposizione portò i logici medievali a considerare molti tipi di supposizione, dunque molte funzioni semantiche e sintattiche (si veda ad esempio: Vattimo, 1993, p. 640; Bocheński, 1972, I, pp. 219-230).

II. Quadro teorico

La breve introduzione storica conferma che “quasi tutti i problemi più sottili e interessanti della filosofia del linguaggio contemporanea furono formulati e affrontati per la prima volta nel medioevo” (Vattimo, 1993, p. 640). Esamineremo ora alcuni aspetti del pensiero di studiosi più vicini a noi che, unitamente al riferimento alla *supposizione*, ci saranno utili (sezione V) per interpretare i dati sperimentali (sezioni III e IV). Inizieremo dalla memoria *On denoting* di Bertrand Russell (1872-1970) della quale ricorre il centenario della pubblicazione (1905), con il suo collegamento storico alle riflessioni di Meinong e di Frege (II-1); alcune posizioni di Wittgenstein (II-2), Quine e Brandom (II-3) ci serviranno per inquadrare le impostazioni di Apel e di Habermas (II-4), centrali per la nostra ricerca.

II-1. Frege, Russell, Strawson

Consideriamo innanzitutto alcune riflessioni sulle “descrizioni definite” (Penco, 2004, p. 54), a proposito delle quali confronteremo le idee di Gottlob Frege (1848-1925) e di Russell. Introduciamo il problema ricordando l'impostazione di Alexius Meinong (1853-1920) mirante all'elaborazione sistematica di una tipologia delle forme di oggettualità; egli affermava che “ciò che è destinato ad essere oggetto di conoscenza non deve per questo necessariamente esistere” (Meinong, 2003, p. 27). Anche a ciò, come vedremo, si oppose Russell (Orilia, 2002; la *Russell versus Meinong Conference: 100 years after On Denoting* è organizzata dal B. Russell Research Centre, McMaster University, Hamilton, Canada, 14-18/5/2005).

L'approccio di Frege si basa sul principio di composizionalità (Frege, 1992, p. 36) secondo cui un enunciato che contiene un termine senza riferimento (o denotazione) è anch'esso privo di riferimento e quindi privo di valore di verità: ad esempio, un enunciato riferito ad una persona inesistente dovrebbe essere considerato né vero né falso (Frege, 2001). Secondo Russell, invece, gli enunciati che contengono descrizioni definite (come *l'attuale presidente della Repubblica Italiana*) sottintendono l'esistenza e l'unicità dell'individuo (*Carlo Azeglio Ciampi*) che possiede la proprietà considerata, almeno al momento in cui la frase è pronunciata. Il problema è che non tutte le descrizioni definite (compresi i nomi propri, abbreviazioni di descrizioni definite) si riferiscono a individui esistenti: parlando di *Ares* o citando *il padre di Phobos e Deimos* non ci riferiamo ad un individuo esistente o esistito.

Per evitare ambiguità, nella memoria intitolata *On denoting*, pubblicata su *Mind* cento anni fa, Russell propose di rendere esplicita la forma logica di una descrizione definita. In tale modo un enunciato come *il padre di Phobos e Deimos è il dio greco della guerra* verrebbe ad essere *esiste ed è unico il padre di Phobos e Deimos e tale individuo è il dio greco della guerra*. La diversità degli approcci di Frege e di Russell appare evidente quando si considerino frasi come *l'attuale re di Francia è calvo* (*The King of France is bald*). Per Frege essa non sarebbe vera né falsa in quanto contenente un termine senza riferimento; per Russell invece è falsa, perché può essere scritta: *L'attuale re di Francia esiste ed è unico ed è calvo* (Wittgenstein accennerà ad una posizione vicina a questa: “Avevo in mente qualcosa del genere della definizione che Russell aveva dato dell'articolo determinativo” Wittgenstein, 1990, p. 173).

Quasi mezzo secolo dopo la pubblicazione della memoria di Russell, Peter F. Strawson (1950) sottolinea una distinzione tra l'espressione linguistica, cioè la sequenza tipo di parole (*sentence*) e il proferimento, l'uso della frase in un contesto (*utterance*). Si distingue così la

denotazione dal riferimento (talvolta considerati sinonimi): la prima riguarda la relazione tra l'espressione e ciò che denota (tenendo conto delle convenzioni linguistiche); il riferimento riguarda la relazione tra l'espressione e ciò a cui il parlante intende riferirsi (Bonomi, 1973; Penco, 2004, p. 84). Nell'analisi di *l'attuale re di Francia è calvo*, Russell si riferisce alla denotazione; Frege considera anche l'intenzione del parlante di riferirsi ad un oggetto che, in effetti, non esiste (Rorty, 1979, p. 583) e conclude che la frase è priva di valore di verità perché tale riferimento è impossibile. Un collegamento con la *suppositio* appare appropriato: una supposizione diversa, che faccia riferimento ad un contesto fantastico, ad esempio ad una leggenda in cui il re di Francia sia calvo, porterebbe a situazioni interessanti (si noti che anche per Frege le parole hanno significato solo nel contesto di una proposizione: con *Phobos e Deimos* potremmo riferirci ai gemelli figli di Ares e di Afrodite o ai satelliti del pianeta Marte: Frege, 1992).

II-2. Wittgenstein: dal "Tractatus" alle "Ricerche filosofiche"

La posizione di un grande allievo di Russell, Ludwig Wittgenstein (1889-1951), è complessa e deve essere distinta in (almeno) due fasi. Nel *Tractatus logico-philosophicus* (ultimato nel 1918, come si evince da una lettera dell'Autore a Russell del 13 marzo 1919, e pubblicato nel 1921 con prefazione dello stesso Russell) sono riprese criticamente idee di Frege e di Russell: Frege ritiene il linguaggio naturale inevitabilmente imperfetto, Russell mira a rivelarne la forma logica sottostante (Russell, 1910); Wittgenstein afferma che "tutte le proposizioni del nostro linguaggio comune sono di fatto, così come esse sono, in perfetto ordine logico" (Wittgenstein, 1964, n. 5.5563; ma la sua posizione, anche nell'ambito del *Tractatus*, rivela qualche tensione: Marconi, 2000, p. 54). Se il linguaggio "ci inganna o ci appare ambiguo è perché la sua essenza o la sua vera forma logica ci sono nascoste" (Penco, 2004, p. 60).

Diversa è l'impostazione del secondo Wittgenstein (le *Ricerche filosofiche* furono pubblicate postume nel 1953): il significato di una parola è identificato nel suo uso in un contesto. È fondamentale il concetto di «gioco linguistico», un contesto di azioni e parole in cui un'espressione assume significato: un gioco linguistico è sia uno strumento per lo studio del linguaggio che il "dato da cui partire: si può parlare del linguaggio non cercando la sua essenza come nel *Tractatus*, ma descrivendo differenze e somiglianze dei giochi linguistici" (Penco, 2004, p. 105; i tratti di continuità tra il primo e il secondo Wittgenstein sono studiati in: Marconi, 2000, pp. 95-101). E Hilary Putnam, sviluppando questa impostazione, conclude che il significato di una parola è distribuito nella comunità dei parlanti (Putnam, 1992).

Anticipiamo una nota di Habermas che riprenderemo:

"Col suo ricorso descrittivo all'uso della lingua acquisito attualmente, Wittgenstein livella, nel contempo, la dimensione cognitiva del linguaggio. Non appena le condizioni di verità che bisogna conoscere per poter impiegare correttamente proposizioni assertorie vengono ormai desunte soltanto dalla prassi linguistica *cui ci si è assuefatti*, scompare la differenza tra validità e valore sociale" (Habermas, 2001, p. 80).

La posizione di Habermas deve essere considerata prudentemente critica ("Ciò che riteniamo giustificato (...) non è una funzione delle abitudini di vita, bensì una questione di fondabilità": Habermas, 1985, p. 80), ma prima di riprendere questo punto esaminiamo altre questioni.

II-3. Alcuni spunti da Quine e da Brandom

Da Willard Van Orman Quine (1908-2000) riprendiamo un riferimento alle modalità *de dicto* e *de re* (Quine, 1960; Kneale, 1962): "la credenza *de re* è la credenza di un parlante riguardo a certe proprietà di un determinato oggetto nel mondo; la credenza *de dicto* è la credenza di un parlante rispetto ad una proposizione" (Penco, 2004, p. 161; per la differenza tra l'approccio

moderno e quello medievale: von Wright, 1951, pp. 25-28 e Prior, 1955, pp. 209-215). Ad esempio, la proposizione *Pierino crede che Ares sia il dio greco della guerra*, che esprime una credenza *de dicto*, non può essere sostituita con *Pierino crede che il padre di Phobos e Deimos sia il dio greco della guerra*: Pierino potrebbe infatti non identificare *Ares* con il padre di *Phobos e Deimos*. Ma la proposizione *di Ares Pierino crede che sia il dio greco della guerra*, che esprime una credenza *de re*, può essere sostituita con *del padre di Phobos e Deimos Pierino crede che sia il dio greco della guerra*, dove chi parla ha identificato *Ares* in un modo che potrebbe essere sconosciuto a Pierino. Fenomeni simili, propri della lingua naturale, erano stati esaminati da Frege in *Senso e riferimento* (Frege, 2001; Origgi, 2000, pp. 110-123): ci serviranno, unitamente ad alcune idee di Robert Brandom, per interpretare i dati.

Brandom cerca di dare sistematicità all'impostazione di Wittgenstein, ma lo critica per l'idea di linguaggio che emerge da alcuni esempi (come quello dei muratori: Wittgenstein, 1999, p. 10), privi di dimensione inferenziale; dunque ai giochi linguistici viene sostituito il «gioco di chiedere e dare ragioni» (Brandom, 1994 e 2002). Anche se tale critica può essere rovesciata, in quanto la concezione di linguaggio di Brandom appare restrittiva (trascura fenomeni collegati ad aspetti del linguaggio come chiamare, comandare etc.), riteniamo l'impostazione ricordata rilevante per la nostra ricerca: Habermas (2001, pp. 102 e 140) osserva, riferendosi a Brandom, che “fa parte della grammatica dell'espressione «sapere» il fatto che tutto quanto sappiamo può essere criticato e motivato”; e che Brandom “concepisce la prassi discorsiva più come generatrice di concetti che come ostaggio di un sapere ereditato a priori”.

La posizione di Brandom può ricondursi a un «individualismo metodico» (secondo cui la comunicazione avviene tra singoli e non all'interno di una vasta comunità) che si lega a un «realismo concettuale» (Habermas, 2004, p. 171: in questo senso non aderiamo all'originale impostazione di Brandom). Non possiamo tuttavia eludere i problemi connessi al significato e ad “un concetto di referenza che spieghi in che modo noi possiamo riferirci allo stesso oggetto (o a oggetti della stessa specie) in base a descrizioni teoretiche diverse” (Habermas, 2001, p. 13). La possibilità di sostituire descrizioni diverse (e con riferimento alla matematica si può citare il *Tractatus*: Wittgenstein, 1964, nn. 6.23-6.24) porta Brandom a riflessioni importanti:

“Supporre che un'espressione venga usata per segnalare un oggetto è supporre che quello *stesso* oggetto poteva essere segnalato in qualche *altro* modo – che sono regolari certe sostituzioni, che salvaguardano l'impegno, concernenti quell'espressione” (Brandom, 1994, p. 430).

Essendo il significato di un enunciato collegato alle “diverse prospettive con cui i parlanti si impegnano sulla rete di inferenza a esso connesse” (Penco, 2004, p. 190), sono “regolari”, nelle parole di Brandom, le “sostituzioni” delle descrizioni di un oggetto “che salvaguardano l'impegno”. Nel caso delle modalità *de dicto* e *de re* può essere necessario sottolineare una differenza di atteggiamento da parte del parlante: ad esempio, una modalità *de dicto* (*Carletto non crede che Ares sia il dio della guerra*) potrebbe almeno in parte impegnare il parlante che riferisce l'opinione; ma una modalità *de re* (*di Ares Carletto non crede che sia il dio della guerra*) sottolinea che il parlante prende le distanze dall'opinione riferita. Infatti nel primo caso una sostituzione porta ad una frase incomprensibile (*Carletto non crede che il dio della guerra sia il dio della guerra*), mentre nel secondo la sostituzione appare possibile (*del dio della guerra Carletto non crede che sia il dio della guerra*: Penco, 2004, p. 191).

II-4. Apel e Habermas

Secondo Karl-Otto Apel (1987), ogni parlante fa implicitamente riferimento a condizioni di comprensibilità (nel rispetto delle regole grammaticali), verità (rapporto semantico tra ciò che si dice e la realtà), veridicità (espressione corretta dello stato del parlante) e giustizia (rispetto delle norme della comunità). Emergono così le condizioni della comunicazione «ideale» che, pur non realizzandosi in pratica, assume il ruolo di principio regolativo (si vedano anche le

osservazioni in: Tagliagambe, 1991, pp. 156-157, riferite a Popper): l'imparzialità della discussione e il raggiungimento di un'intesa dipendono da tali condizioni (è interessante un paragone con la "discussione razionale" in Lakoff & Johnson, 1998, p. 111, distinta dalla "conversazione", p. 102; ma la metafora concettuale "la discussione è una guerra", p. 22, per la quale "l'unico modo di garantirsi la vittoria è quello di riuscire a sconfiggere tutti i possibili avversari e portare sulle proprie posizioni le parti neutrali", p. 102, focalizza la questione più sul "combattimento verbale", p. 23, che sulla ricerca e sul raggiungimento di un accordo).

Jürgen Habermas distingue "la verità di un'asserzione" dalla sua "affermevolezza razionale" (Habermas, 2001, p. 11; Cirrone, 1997) e riprende l'impostazione di Apel (peraltro criticata in: Davidson, 1990) per sottolineare la possibilità di partecipazione ad un discorso «ideale»:

"Il predicato «giusto», a differenza del predicato di verità, esaurisce il suo significato nella «accettabilità idealmente giustificata». Mentre alla validità prescrittiva delle asserzioni morali mancano le connotazioni ontologiche della validità veritativa, al posto del riferimento, trascendente la giustificazione, al mondo oggettivo subentra l'idea regolativa della reciproca inclusione di estranei in un mondo inclusivo – e pertanto universale – di ben ordinate relazioni interpersonali. (...) Possiamo intendere la «giustezza» in analogia con la «verità», come validità incondizionata, nonostante il suo significato immanente alla giustificazione. La chiave appropriata per questa spiegazione è offerta dalle esigenti condizioni di comunicazione che richiedono ai partecipanti ai discorsi pratici la creazione di una comune prospettiva di imparzialità autocritica" (Habermas, 2001, p. 279).

La "validità intersoggettiva" non deriva solo da una "convergenza *osservata* tra pensieri o rappresentazioni di persone diverse" e "l'autorità epistemica passa dal soggetto conoscente, che attinge i criteri dell'oggettività dell'esperienza da se stesso, alla prassi di giustificazione di una comunità linguistica" (Habermas, 2001, p. 238). La struttura del discorso "crea una connessione tra le strutture di razionalità ramificate del sapere, dell'agire e del parlare in quanto in certo senso *riunisce insieme* le radici proposizionali, teleologiche e comunicative" (Habermas, 2001, p. 99). Sono dunque considerate tre radici della razionalità: alla razionalità epistemica (Cassirer, 1958, III, p. 329) si affiancano quella teleologica e quella comunicativa:

"Noi applichiamo il predicato «razionale» in prima linea a opzioni, azioni ed enunciazioni linguistiche perché nella struttura proposizionale del conoscere, in quella teleologica dell'agire e in quella comunicativa del parlare ci imbattiamo in *radici diverse di razionalità*. (...) La razionalità comunicativa non forma la struttura *onnicomprendensiva*, bensì una delle tre strutture nucleari, che peraltro, tramite la razionalità discorsiva – proveniente dalla razionalità comunicativa –, sono reciprocamente intrecciate" (Habermas, 2001, p. 99).

III. Metodologia dell'esperienza didattica

Il presente lavoro prevede l'analisi dei dati di un'esperienza didattica avente lo scopo di esaminare le reazioni di un gruppo di studenti di 15-16 anni frequentanti la V classe di un *Ginnasio-Liceo Classico*, a Treviso (Italia) posti di fronte ad una domanda riguardante la verità di due frasi per alcuni versi simili a *The King of France is bald* (Russell, 1905). Agli allievi era stata informalmente presentata la nozione di proposizione come «affermazione che assume uno e un solo valore di verità» (erano dunque state escluse, ad esempio, frasi dalla struttura non assertoria o frasi con predicati collegati a valutazioni soggettive).

Nel corso di una lezione, in aula, dopo avere suddiviso a caso gli studenti in gruppi di tre allievi ciascuno, in un'occasione non valutativa, lo sperimentatore (che non era l'insegnante della classe considerata, il quale era comunque presente in aula) ha proposto agli studenti due frasi; di ciascuna di esse i gruppi sono stati invitati a stabilire la verità o la falsità, dopo aver eventualmente discusso, all'interno dei vari gruppi, le risposte da dare.

La domanda è stata posta avendo cura di non suggerire rigidamente un'alternativa («vero o falso?») tale da forzare gli studenti a dare una risposta. La prima frase richiama il celebre esempio di Russell; dopo aver lasciato alcuni minuti per la discussione è stata aggiunta la seconda frase che intende valutare l'influenza del linguaggio algebrico.

IV. Dati sperimentali

Lo sperimentatore scrive alla lavagna (avverte che dopo dieci minuti sarà aggiunta la frase 2):

Per ciascuna delle frasi seguenti stabilite: si tratta di una frase vera? Si tratta di una frase falsa?
(1) *Il re degli abitanti della Luna è calvo* (2) ...
Concordate le risposte nei gruppi e scrivetele su di un foglio.

Riportiamo la trascrizione della discussione sviluppatasi nel gruppo costituito da A., B., C. (le iniziali sono state modificate per ragioni deontologiche):

V-1. Trascrizione

- [01] A.: (*sorridendo*) “Che roba è?”
[02] B.: (*rilegge la frase sottovoce*) “Il re degli abitanti della luna è calvo.”
[03] A.: “Cosa vuol dire il re della luna?”
[04] C.: “Beh, direi la luna è come se non avesse i capelli, magari se era il sole, coi raggi...”
[05] B.: (*in tono ironico*) “Scusa, ma che cosa dici?”
[06] C.: “No, no, era per dire, non esistono gli abitanti della luna. Se ci fossero potrei dire qualcosa.”
[07] B.: (*guardandosi intorno*) “Ma in che senso se è vera o falsa?”
[08] A.: “Ma che ne so io chi sono gli abitanti della luna, e poi, dai, non ci sono mica gli abitanti della luna e allora non c'è il re.”
[09] B.: “Allora falsa.”
[10] C.: “Non è facile come sembra, secondo me c'è qualcosa sotto. Giocano sulle parole per non far capire, leggiamo bene. Il re non c'è, e gli abitanti, cosa vuol dire abitante? Sulla luna non c'è nessuno, allora il re della luna è la luna.”
[11] A.: “Potrebbero esserci dei microrganismi, una cosa che non si vede, un'entità diversa da noi.”
[12] C.: (*gesticolando, rivolto a tutti*) “O pensa se qualcuno ha visto un astronauta col casco che può sembrare calvo e poi lo racconta, allora magari è vero.”
[13] A.: (*deciso*) “Cosa c'entra, ma no, dice gli abitanti della luna, non è che dice la luna o il re della luna è falso, cioè calvo. Bisogna vedere gli abitanti e poi il re.”
[14] B.: “Però allora è falsa, gli abitanti non ci sono, il re non c'è e allora per forza non è calvo.”
[15] A.: “Attenti al trucco, come dice lui (*indica C.*), forse l'esercizio non si può fare.”
[16] B.: “Io divido la frase: quando dico che il re degli abitanti non c'è, basta, è già falsa, anche quello che viene dopo. Che poi dica che è calvo o no non importa, capisci?”
[17] A.: (*dubbioso*) “Allora diciamo che la frase... sarebbe falsa.”
[18] C.: “Sì, la cosa più semplice è rispondere falso. Però se la domanda riguarda tipo un film o una favola con un re della luna che magari è calvo, in quella favola è vero.”
[19] A.: “Piano però, se mai calchiamo bene nella risposta il re della luna. È quello che è falso. Per dire che la frase, cioè tutta, è falsa si deve vedere questo re, che ha i capelli e invece...”
[20] B.: (*quasi interrompendo*) “Ma no che non si può vederlo, perché non c'è. (*Rivolto a C.*) Non c'è nessuna favola, se no ce lo dicevano. Quindi è falso.”
[21] A.: (*dopo qualche secondo di silenzio*) “Insomma, una cosa è dire che una frase è falsa, dico che una cosa non è vera e allora c'è qualcosa che non va nella frase che dico. Una cosa diversa secondo me è parlare di qualcuno e poi dire di questo qualcuno che è, per esempio calvo o che ha i capelli, quando parlo di qualcuno ci credo che c'è.”
[22] B.: “No, scusa, ma allora basta dire qualcosa di uno che non esiste per farlo esistere? Se non esiste non esiste, è falso.”
[23] A.: “Non deve essere falso lui, cioè il re, deve essere falso che è calvo. Pensiamoci bene prima di rispondere, sembra falso ma potrebbe darsi di no.”

- [24] B.: “Senti, pensa la cosa più nel complesso, dicono che il re è calvo, può essere falso perché non è calvo ma anche perché non c’è il re. Per essere vero deve esserci il re e deve essere calvo.”
- [25] C.: (*rivolto ad A., un po’ irritato*) “Ma dai, si vede che è falsa! Ci fai sbagliare, se dici che non è falsa allora è vera, cioè vuoi dire che gli abitanti della luna sono calvi?”
- [26] A.: “Eh, ma è ovvio che non è vera, però non si capisce bene. (*Rivolto a B.*) No, dai, hai ragione scriviamo pure falso, sono d’accordo anch’io.”

Lo sperimentatore completa ora la traccia proposta alla lavagna:

- (1) *Il re degli abitanti della Luna è calvo* (2) $1/0+1/0+1$ è dispari

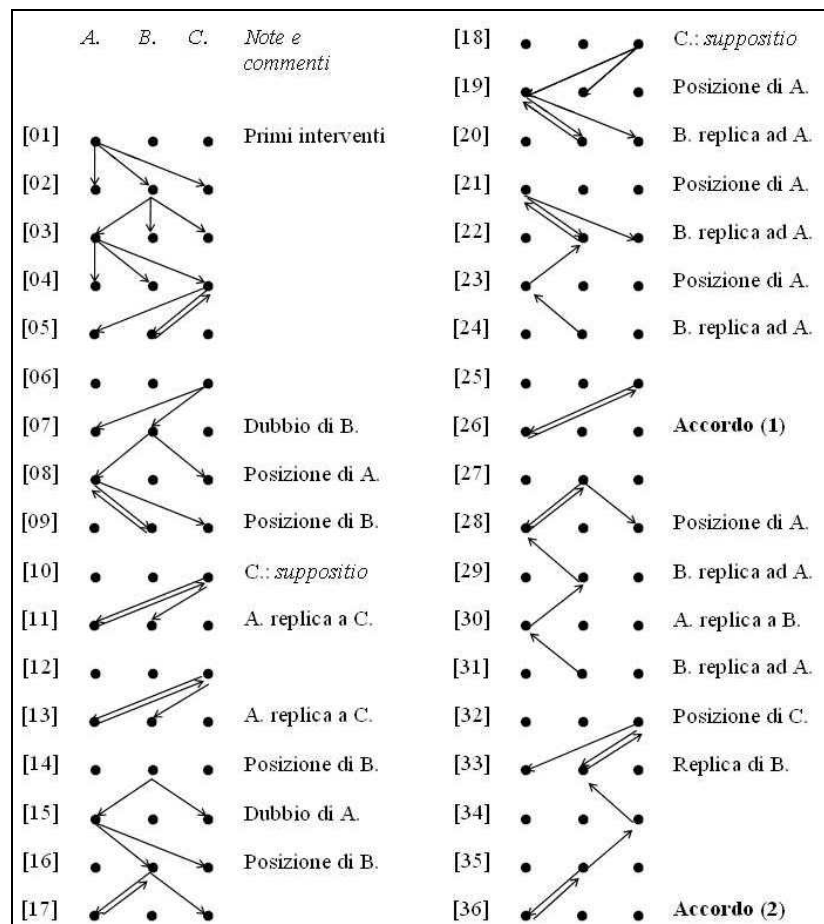
- [27] B.: “Sì, è come prima, falsa.”
- [28] A.: (*dubbioso*) “Però scusa se diciamo falsa allora sarebbe pari. Forse l’esercizio è impossibile.”
- [29] B.: “No, ma perché vai a pensare al pari, quello è un’altra cosa. Qui dice che è dispari, noi dobbiamo vedere se è vera o falsa questa qui.”
- [30] A.: “Guarda però che non è come quella di sopra. E se dicevano che era pari?”
- [31] B.: “Dicevo che era falsa anche quella, $1/0$ non è un numero.”
- [32] C.: “ $1/0$ è infinito.”
- [33] B.: “No, l’ha detto anche il prof che non è vero, $1/0$ è impossibile.”
- [34] C.: “Non è infinito ma è un numero grandissimo. E come si fa a sapere se è dispari o se è pari?”
- [35] B.: “Ma no, non è un numero, sarebbe come dire grandissimo ma in effetti non c’è.”
- [36] A.: “Sì, dai, c’è il trucco, ti fanno pensare che è dispari perché è come $2+2+1$ che farebbe 5, ma il numero di partenza non c’è. Falsa anche questa.”

V-2. Diagramma di flusso dell’interazione

Nel diagramma di flusso dell’interazione (Sfard & Kieran, 2001) distinguiamo mediante le direzioni delle frecce gli interventi attivi (*proactive utterances*) e gli interventi reattivi (*reactive utterances*).

I numerosi legami con il linguaggio naturale ci hanno suggerito di evitare la rigida distinzione tra *object-level utterances* (gli interventi collegati al contenuto matematico) e *non-object-level utterances* (tale distinzione è talvolta evidenziata da tipi diversi di frecce: Ryve, 2004).

Nella sezione successiva analizzeremo quindi i dati sperimentali (le trascrizioni e il diagramma di flusso) alla luce del quadro teorico presentato.



V. Discussione

V-1. La prima frase

In [03] A. pone il problema del riferimento e in [04] C. sembra suggerire la possibilità di un'interpretazione inusuale del predicato «calvo» (“La luna è come se non avesse i capelli, magari se era il sole, coi raggi...”); ma lo stesso studente in [06] riporta la questione ad un'impostazione più realistica (“Era per dire, non esistono gli abitanti della luna”). Il successivo intervento di A., [08], si collega al principio di composizionalità (“E poi, dai, non ci sono mica gli abitanti della luna e allora non c'è il re”). L'intervento [10] è interessante:

“Giocano sulle parole per non far capire, leggiamo bene. Il re non c'è, e gli abitanti, cosa vuol dire abitante? Sulla luna non c'è nessuno, allora il re della luna è la luna.”

Lo studente C. non riconosce il “perfetto ordine logico” del linguaggio comune (Wittgenstein, 1964, n. 5.5563): più che riferirsi a fenomeni di «opacità referenziale» (nel senso di: Quine, 1960), colloca il problema sul piano semantico e azzarda una *supposizione* inusuale (se “sulla luna non c'è nessuno” possiamo immaginare: “il re della luna è la luna” stessa).

Appare interessante anche il successivo intervento [12] di C. (“O pensa se qualcuno ha visto un astronauta col casco che può sembrare calvo e poi lo racconta, allora magari è vero”): alla funzione di rappresentazione del linguaggio si affianca il riferimento alla funzione di comunicazione (Dummett, 1993, p. 166; del resto “l'impiego comunicativo di espressioni linguistiche” serve “anche a rappresentare stati di cose, ovvero a supporre la loro esistenza”: Habermas, 2001, p. 105) e si tratta dell'unico intervento in cui la falsità, seppure in una modalità *de dicto*, viene riferita ad una qualche eventuale proprietà e supera quindi il problema dell'esistenza. L'intervento [13] di A. (“Cosa c'entra, ma no, dice gli abitanti della luna, non è che dice la luna o il re della luna è falso, cioè calvo. Bisogna vedere gli abitanti e poi il re”), non chiarissimo, riporta comunque la discussione sul piano della rappresentazione.

A questo punto comincia il confronto diretto delle impostazioni di B. e di A. In [14] inizia B.:

“Però allora è falsa, gli abitanti non ci sono, il re non c'è e allora per forza non è calvo.”

L'intervento [15] di A. esprime però dei dubbi (“forse l'esercizio non si può fare”): A. sembra riferirsi ad un approccio «alla Frege», con una conclusione che evita di assegnare un valore di verità, ma in [16] B. precisa ulteriormente il proprio punto di vista:

“Io divido la frase: quando dico che il re degli abitanti non c'è, basta, è già falsa, anche quello che viene dopo. Che poi dica che è calvo o no non importa, capisci?”

A parte la riproposizione del principio di composizionalità, B. sembra dunque basarsi su di una denotazione «alla Russell». Ma l'intervento [17] di A. (“Allora diciamo che la frase... sarebbe falsa”), con l'uso del condizionale, non esprime convinzione.

L'intervento [18] di C. (“Però se la domanda riguarda tipo un film o una favola con un re della luna che magari è calvo, in quella favola è vero”) richiama il principio del contesto (o, nuovamente, la *suppositio*); il significato viene così identificato nell'uso in un tale contesto (Wittgenstein, 1999). In [19] A. si manifesta disponibile ad accettare la falsità della frase, ma ritiene opportuno evidenziare che tale falsità si riferisce all'esistenza del re della luna:

“Piano però, se mai calchiamo bene nella risposta il re della luna. È quello che è falso.”

Questo intervento è interessante: già in [17] A. aveva manifestato un'apertura nei confronti della posizione di B., ma è ancora convinto che “per dire che la frase cioè tutta è falsa si deve vedere questo re, vedere che ha davvero i capelli” e desidera specificare ulteriormente il

proprio punto di vista. Dopo la replica [20] di B. che considera anche le obiezioni di C. (“Non c’è nessuna favola, se no ce lo dicevano”) e qualche istante di silenzio, in [21] A. prosegue:

“Una cosa è dire che una frase è falsa, dico che una cosa non è vera e allora c’è qualcosa che non va nella frase che dico. Una cosa diversa secondo me è parlare di qualcuno e poi dire di questo qualcuno che è, per esempio calvo o che ha i capelli, quando parlo di qualcuno ci credo che c’è.”

A. sembra introdurre una distinzione tra una modalità *de dicto* e una modalità *de re*: l’allievo distinguerebbe dunque un’affermazione come *Dico che il re della luna è calvo* da una esprimibile nella forma *Dico del re della luna che è calvo* (Penco, 2004, p. 191). La seconda espressione, nell’opinione di A., potrebbe essere divisa nella forma *Parlo del re della luna e poi dico che è calvo*: e le espressioni esaminate vincolerebbero diversamente il parlante.

Come appare dal diagramma di flusso, riprende ora il confronto diretto tra A. e B. ([21]-[24]): interessante è la replica [22] di B. (“Ma allora basta dire qualcosa di uno che non esiste per farlo esistere?”) che sembra riferirsi ad una situazione vicina al problema della classe vuota (ed è spontaneo ricordare la posizione di Meinong secondo la quale “ciò che è destinato ad essere oggetto di conoscenza non deve per questo necessariamente esistere”: Meinong, 2003, p. 27). Tuttavia A. non è ancora convinto, in questo «gioco di chiedere e dare ragioni», e pur riconoscendo in [23] la verosimiglianza delle conclusioni di B. (“sembra falso ma potrebbe darsi di no”) ribadisce la propria impostazione «alla Frege» (“Non deve essere falso lui, cioè il re, deve essere falso che è calvo”). Ma siamo ormai alle battute conclusive: in [24] B. torna ad esprimere con particolare chiarezza il proprio punto di vista «alla Russell»:

“Senti, pensa la cosa più nel complesso, dicono che il re è calvo, può essere falso perché non è calvo ma anche perché non c’è il re. Per essere vero deve esserci il re e deve essere calvo.”

Questo intervento risulta decisivo, mentre le precedenti argomentazioni [14], [16] e [22] di B. non avevano convinto A. (l’intervento [25] di C. “Ma dai, si vede che è falsa!” ricorda un’annotazione di Wittgenstein: “L’ultimo argomento che mi rimarrebbe da usare contro uno che non volesse procedere così consisterebbe nel dire: «Ma non vedi?!» – e questo non è certo un *argomento*”: Wittgenstein, 1971, I, n. 34). In [26], dopo aver sottolineato per l’ultima volta una qualche mancanza di chiarezza nell’espressione esaminata (“Ma è ovvio che non è vera, però non si capisce bene”: e si noti che tale ovvietà viene riferita da A. alla «non verità», quasi a sottolinearne la differenza con la «falsità») anche A. accetta le conclusioni di B.

Ricordando la distinzione di Apel, i dubbi di A. non sembrano basati sulla comprensibilità della frase (sul rispetto delle regole grammaticali): la sua «verità» (rapporto semantico tra ciò che si dice e la realtà) viene collegata ovvero contrapposta alla «giustezza», al rispetto delle norme della comunità, intendendo tra di esse anche le modalità di esame critico della frase, delle “descrizioni definite” (Penco, 2004, p. 54) in essa contenute e del coordinamento delle parti ([24]: “può essere falso perché non è calvo ma anche perché non c’è il re”). Riprendendo la distinzione tra verità di un’asserzione e affermabilità razionale e intendendo «giustezza» come “accettabilità idealmente giustificata” (Habermas, 2001, p. 279), potremmo dire che A. viene portato dall’argomentazione sviluppata dal gruppo (primariamente da B.) ad accettare la «giustezza» della comune scelta finale. Riprenderemo tutto ciò nella sezione conclusiva.

V-1. La seconda frase

Il ruolo di B. sembra ora piuttosto consolidato e, come appare dal diagramma di flusso, la discussione riguardante la seconda frase si gioca su due momenti: un primo confronto tra A. e B. ([27]-[31]) ed un secondo confronto tra C. e B. ([32]-[35]). In entrambe le occasioni, B. sostiene le proprie posizioni con discreta sicurezza, anche sulla base della discussione svoltasi precedentemente a proposito della prima frase (come emerge da [27]).

Interessante è la perplessità espressa da A. in [28] (intervento analogo a [15], ma basato su motivazioni diverse). Secondo A., dire che *'1/0+1/0+1 è dispari'* è falso equivarrebbe a dire che *'1/0+1/0+1 è pari'* è vero: si noti che un'analoga argomentazione (dire che *'Il re degli abitanti della Luna è calvo'* è falso equivarrebbe a dire che *'Il re degli abitanti della Luna ha i capelli'* è vero) non era stata considerata da A. nella parte precedente dell'esperienza (solo l'intervento [25] di C. può essere collegato ad una simile argomentazione). Questa differenza sembra essere in relazione con la diversità dei contesti: l'ambito matematico, con i suoi segni e simboli specifici, potrebbe avere suggerito l'uso del *tertium non datur*.

Il deciso intervento [31] di B. ("1/0 non è un numero") è illuminante: l'allievo interpreta la frase *1/0+1/0+1 è dispari* come *1/0+1/0+1 è un numero dispari* e ciò viene quindi interpretato come *1/0+1/0+1 è un numero e tale numero è dispari*. Essendo falsa la prima parte della frase (l'analogia con l'intervento [16] dello stesso B. è evidente e riguarda ancora una denotazione «alla Russell») tutta la frase deve essere considerata falsa.

Il successivo confronto tra C. e B. si sposta sulla presunta «natura» di 1/0: in [32] C. afferma che "1/0 è infinito" e, a fronte della contestazione di B. ([33]: "l'ha detto anche il prof che non è vero, 1/0 è impossibile"), in [34] si corregge sostenendo che "è un numero grandissimo" e dunque "come si fa a sapere se è dispari o se è pari?" Ma in [35] B. ribadisce:

"Ma no, non è un numero, sarebbe come dire grandissimo ma in effetti non c'è"

e la discussione si chiude con A. che accetta esplicitamente la motivata posizione di B. ([36]).

Notiamo che la struttura sintattica $n+n+1$ alla quale la seconda frase fa riferimento avrebbe potuto far pensare ad un numero dispari: a differenza di quanto considerato nella prima frase (l'eventuale esistenza di un re degli abitanti della luna non avrebbe comportato conseguenze sulla sua pretesa calvizie), in questo caso se n fosse stato un numero intero, $n+n+1$ sarebbe stato un numero dispari (in [36] A. riconosce ciò: "ti fanno pensare che è dispari perché è come $2+2+1$ che farebbe 5, ma il numero di partenza non c'è"). Ma la discussione, basata sull'esperienza maturata nella fase precedente, ha portato ad una diversa conclusione.

VI. Riflessioni conclusive

«Non vi è alcun punto di vista da cui ottenere verità assolute e oggettive sul mondo. Ciò non significa che non vi siano verità; significa solo che la verità è relativa al nostro sistema concettuale, fondato sulle nostre esperienze. (...) Quando le persone che si parlano non hanno in comune la stessa cultura, conoscenza, valori e assunzioni, la comprensione reciproca è possibile attraverso la negoziazione del significato.»

G. Lakoff, M. Johnson (1998, pp. 236 e 283)

"Qualcosa vale come giustificazione soltanto in riferimento a qualcosa'altro che noi già accettiamo. (...) Non già uscendo dal nostro linguaggio e dalle nostre opinioni possiamo pervenire a un criterio di verifica indipendente dal criterio di coerenza delle nostre affermazioni."

R. Rorty (1979, p. 199)

"Perché il fatto che le nostre opinioni siano coerenti, posto che lo siano, dà la pur minima indicazione che siano vere?"

M. Williams (1996, p. 267)

L'esperienza esaminata non può non ricondurre alla mente l'idea di Putnam (1992) secondo cui il significato (pensiamo a una frase più che ad una singola parola) è distribuito nella comunità dei parlanti e tale significato fa riferimento a modi diversi di intendere la frase (e, come vedremo, alle "radici diverse di razionalità": Habermas, 2001, p. 99). Richard Rorty nota che "una considerazione «soggettiva» è una considerazione (...) su cui i partner

ragionevoli del dialogo dovrebbero passar sopra” (Rorty, 1979, p. 368): abbiamo potuto constatare che la costruzione di un significato collettivamente accettato è passata attraverso una negoziazione, un «gioco di chiedere e dare ragioni» (Brandom, 2002); ma sarebbe semplicistico concludere che sia la posizione di B. che quella almeno inizialmente sostenuta da A. hanno apprezzabili motivazioni (Strawson, 1950). Proprio la sostenibilità dei due atteggiamenti, unitamente alla loro evoluzione, ci induce a chiederci: è lecito proporre l’esercizio nella forma vista (di valutazione di «verità»)? Con quali intenti e precisazioni?

Certo, le frasi proposte agli allievi erano (volutamente) ambigue, e l’alternativa vero-falso si collega alle sole «proposizioni»: ma come identificare le proposizioni tra le frasi? La risposta limitativa «le proposizioni sono affermazioni che assumono uno e un solo valore di verità» potrebbe far pensare ad una situazione viziata di circolo. Inoltre la segnalata «ambiguità» non dipende dalla struttura delle frasi ($3/6+3/6+1$ è *dispari* non avrebbe creato alcun problema).

La richiesta di stabilire il valore di verità di una frase non sembra poter essere collegata esclusivamente ad un’assoluta, isolata razionalità epistemica, né appare sufficiente invocare soltanto motivazioni di coerenza (Rorty, 1979, p. 199; Williams, 1996, p. 267; “prove certe” e coerenti potrebbero coesistere con la “confusione concettuale”: Wittgenstein, 1999, n. II-XIV) o di analogia: il confronto [27]-[31] evidenzia che la diversità dei contesti (la prima frase è espressa nel linguaggio comune, la seconda fa riferimento ad un contesto matematico) non autorizza un trasferimento acritico del valore di verità dalla prima alla seconda frase. Perfino il fatto che il termine «falso» abbia lo stesso valore e le stesse implicazioni in contesti diversi deve essere esaminato con cura (si veda la discussione in: Lakoff & Johnson, 1998 p. 153).

Si deve allora dubitare di tutto? Questa forma di porre la questione è fuorviante (“chi volesse dubitare di tutto, non arriverebbe neanche a dubitare. Lo stesso gioco del dubitare presuppone già la certezza”, Wittgenstein, 1978, n. 115; dal punto di vista logico ci associamo a: Lolli, 2005, pp. 13-17). Come sarebbe ingiustificata l’accusa di riduzione convenzionalistica della nozione di verità (Andronico, 2000, p. 252, alla quale lo stesso Wittgenstein, 1999, n. 241, potrebbe ribattere: “«Così, dunque, tu dici che è la concordanza tra gli uomini a decidere che cosa è vero e che cosa è falso!» – Vero e falso è ciò che gli uomini *dicono*; e nel linguaggio gli uomini concordano. E questa non è una concordanza delle opinioni, ma della forma di vita”). È necessario riprendere le tradizionali nozioni di «verità» e di «validità»: “non appena il criterio di oggettività della conoscenza passa dalla certezza privata alla prassi pubblica della giustificazione, la «verità» diventa un concetto di validità a tre membri” (Habermas, 2001, p. 239), “una validità motivata per un pubblico” (Schnädelbach, 1992).

L’esame dei dati sperimentali non porta solamente a concludere banalmente che il lavoro di gruppo è utile, conclusione che sarebbe peraltro forzatamente indotta dalla scelta di proporre l’esercizio a gruppi di allievi. Resta il fatto che la comune decisione raggiunta dagli studenti di attribuire alle frasi un valore di verità è stata ottenuta confrontando attivamente, dunque giustificando, nell’ambito di una discussione, le opinioni e comporta delle conseguenze: “la questione descrittiva di che cosa sia o significhi la «verità» viene sostituita dalla questione performativa di che cosa noi facciamo quando trattiamo qualcosa come «vero»”, nota Habermas (2001, p. 137; nel nostro caso, ad esempio, il gruppo deve rispondere ai quesiti davanti allo sperimentatore, all’insegnante e al resto della classe); dunque “dobbiamo abbandonare l’ambito delle proposizioni (e dei testi) e prendere in considerazione la concordanza nell’agire e nell’esperire (ad esempio, nell’uso di un predicato)” (Kambartel, 1996, p. 249). La stessa discussione tra gli studenti (che riflettono e parlano nella prospettiva di una decisione da prendere, di un’azione da compiere) sembra interpretare tale posizione, sviluppando mediante la razionalità discorsiva le radici diverse di razionalità “reciprocamente intrecciate” (Habermas, 2001, p. 99). Il dibattito, peraltro stimolato esplicitamente dalla traccia dell’esercizio, appare ancora distante dalla forma di comunicazione «ideale» che

Habermas riprende da Apel (il ruolo di C., ad esempio, è a tratti secondario, anche se gli interventi interpretabili in termini di *supposizione* sono interessanti) ed in altri gruppi la discussione si è evoluta senza portare ad un vero e proprio accordo; tuttavia l'esame dei nostri dati sperimentali (pensiamo all'intervento [19] e alle fasi [21]-[24], [28]-[31] e, in misura forse minore, [32]-[35]) evidenzia che la discussione non ha portato alla sola "convergenza *osservata* tra pensieri o rappresentazioni di persone diverse", ma al fatto che "i partecipanti all'argomentazione che si convincono della legittimità di una pretesa di validità controversa sono giunti ad un punto in cui la coercizione non coercitiva dell'argomento migliore li ha indotti a un *mutamento di prospettiva*" (Habermas, 2001, pp. 238 e 254). Tale punto coincide, nel caso della prima frase, con [24] e nel caso della seconda con [35].

Esprimiamo in termini generali una riflessione conclusiva: abbiamo proposto agli studenti un quesito riguardante la verità o la falsità di alcune frasi considerate in diversi contesti (un esercizio frequente nella pratica didattica); ma in che senso, con quali garanzie di «certezza», possiamo parlare di «verità»? Rorty si chiede se la «verità» di un'asserzione possieda ancora un valore indipendente dal contesto della giustificazione (Rorty, 1994) e l'esperienza sembra confermare l'importanza e l'attualità di tale questione: alcuni atteggiamenti degli studenti sono variati passando da un contesto non matematico ad uno matematico (dagli interventi [28]-[30] e [36], ad esempio, emerge l'influenza della sintassi algebrica).

Condividiamo dunque la necessità di una riflessione in tale direzione (si veda: Lakoff & Johnson, 1998, pp. 197-222, anche se il loro approfondimento porta ad una conclusione che è estranea agli scopi del presente lavoro): una chiara distinzione tra «validazione» (*Geltung*) e «validità» (*Gültigkeit*) può essere fondamentale e sfuma la tradizionale "distinzione fra la «validazione» di un giudizio che trova attualmente riconoscimento e la «validità» di un giudizio che *merita* riconoscimento intersoggettivo perché è vero" (Habermas, 2001, p. 277). Se accettiamo che

"il predicato di verità rientra –anche se non esclusivamente– nel gioco linguistico dell'argomentazione; la sua importanza si può quindi chiarire (per lo meno anche) in ragione delle sue funzioni in questo gioco linguistico, dunque nella *dimensione pragmatica* di un determinato impiego del predicato" (Habermas, 2001, p. 246)

dobbiamo tenere conto di conseguenze importanti. La stessa «verità» può essere relativa ad una particolare cultura (ad un sistema linguistico): argomenterebbero allo stesso modo allievi di qualche altra parte del mondo, o in situazioni scolastiche diverse (in Italia il *Ginnasio-Liceo Classico* è considerato una scuola d'élite)? L'aspetto interculturale assume dunque un ruolo essenziale, elemento che troviamo espresso anche in Wittgenstein (1999, XII):

"Chi crede che certi concetti siano senz'altro quelli giusti e che colui che ne possedesse altri non si renderebbe conto di quello di cui ci rendiamo conto noi, – potrebbe immaginare certi fatti generalissimi della natura in modo diverso da quello in cui noi siamo soliti immaginarli; e formazioni di concetti diverse da quelle abituali gli diventerebbero comprensibili" (tale punto di vista è esaminato in M. Messeri, 2000, pp. 189-191: "C'è dunque qualcosa di intrinsecamente fuorviante nell'atteggiamento etnocentrico di chi considera le altre culture come forme più rozze, meno complete e soddisfacenti della cultura propria; come tappe preliminari sulla via maestra che conduce al proprio modo di vivere").

Inoltre dall'esame del dialogo tra gli studenti emerge una qualche influenza del contratto didattico: ragionerebbero così gli stessi ragazzi in una discussione tra amici? Il predicato di verità ha dunque un uso diverso all'interno e al di fuori della scuola? Esiste cioè una «razionalità scolastica» distinta dalla «razionalità di tutti i giorni»? Con quali conseguenze? (Bagni, in via di pubblicazione). L'approfondimento di queste considerazioni potrà avere ricadute (anche didattiche) notevoli che potranno essere evidenziate da ulteriori ricerche.

Ringraziamenti e riferimenti bibliografici

L'autore ringrazia vivamente Paolo Boero (Università di Genova), Pier Luigi Ferrari (Università del Piemonte Orientale) e Donatella Iannece (Università di Napoli) per i preziosi suggerimenti.

- Andronico, M.: 2000, Giochi linguistici e forme di vita, Marconi, D. (Ed.), *Guida a Wittgenstein*, Laterza, Roma-Bari, 241-288.
- Apel, K.-O.: 1987, Fallibilismus, Konsenstheorie der Wahrheit und Letzbegründung. Forum f. Philosophie, *Philosophie und begründung*, Suhrkamp, Frankfurt a.M., 116-211.
- Bagni, G.T.: 1997, *Elementi di storia della logica formale*. Pitagora, Bologna.
- Bagni, G.T.: in via di pubblicazione, Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory. *Educational Studies in Mathematics*.
- Bocheński, J.M.: 1972, *La logica formale. I. Dai Presocratici a Leibniz. II. La logica matematica*. Einaudi, Torino (*Formale Logik*. Verlag Karl Alber, Freiburg-München 1956).
- Bonomi, A.: 1973, *La struttura logica del linguaggio*. Bompiani, Milano.
- Brandom, R.: 1994, *Making it Explicit*. Harvard University Press, Cambridge MA.
- Brandom, R.: 2002, *Articolare le ragioni. Il Saggiatore*, Milano (*Articulating Reasons. An Introduction to Inferentialism*. Harvard University Press, Cambridge MA, 2000).
- Cassirer, E.: 1958, *Philosophie der symbolischen Formen*. WBG, Darmstadt.
- Cirrone, S.: 1997, *Le regole dei giochi. Per un modello procedurale di razionalità: Habermas contro Habermas*. Edizioni del Prisma, Catania.
- Davidson, D.: 1990, The Structure and Content of Truth. *The Journal of Philosophy*, 87, 279-328.
- Dummett, M., 1993, Language and Communication. *The Seas of Language*. Oxford, 166-187.
- Frege, G.: 1992, *Ricerche logiche*. Guerini, Milano (Logische Untersuchungen, Dritter Teil: Gedankegefüge. *Beiträge zur Philosophie des Deutschen Idealismus*, 3, 1923, 36-51).
- Frege, G.: 2001, Senso e riferimento. *Senso, funzione e concetto*, Laterza, Roma-Bari (Über Sinn und Bedeutung. *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik*, 100, 1892, 25-50).
- Geymonat, L.: 1970, *Storia del pensiero filosofico e scientifico*. Garzanti, Milano.
- Habermas, J.: 1985, *Etica del discorso*. Laterza, Roma-Bari (*Moralbewusstsein und kommunikatives Handeln*. Suhrkamp, Frankfurt a.M. 1983).
- Habermas, J.: 2001, *Verità e giustificazione*. Laterza, Roma-Bari (*Wahrheit und Rechtfertigung. Philosophische Aufsätze*. Suhrkamp, Frankfurt a.M. 1999).
- Kambartel, F.: 1996, Universalität, richtig verstanden. *Deutsche Zeitschrift für Philosophie*, 44, 249.
- Kneale, W.C.: 1962, *Modality "De Dicto" and "De Re"*. Nagel, E., Suppes, P. & Tarsky, A. (Eds.), *Logic, Methodology and Philosophy of Science*, I. The University Press, Stanford, 622-633.
- Kneale, W.C. & Kneale, M.: 1972, *Storia della logica*. Einaudi, Torino (*The Development of Logic*. Clarendon Press, Oxford 1962).
- Lakoff, G. & Johnson, M.: 1998, *Metafora e vita quotidiana*, Bompiani, Milano (*Metaphors we live by*, University of Chicago Press, Chicago 1980).
- Lolli, G.: 2005, *QED Fenomenologia della dimostrazione*, Bollati Boringhieri, Torino.
- Marconi, D. (Ed.): 2000, *Guida a Wittgenstein*, Laterza, Roma-Bari.
- Messeri, M.: 2000, Seguire la regola. Marconi, D. (Ed.), *Guida a Wittgenstein*, Laterza, Roma-Bari, 151-192.
- Meinong, A.: 2003, *Teoria dell'oggetto*. Quodlibet, Macerata (Über Gegenstandstheorie. Meinong, A., Ameseder, R. & Mally, E., *Untersuchungen zur Gegenstandstheorie und Psychologie*. Barth, Leipzig 1904, 1-50).
- Origgi, G.: 2000, *Introduzione a Quine*. Laterza, Roma-Bari.
- Orilia, F.: 2002, *Ulisse, il quadrato rotondo e l'attuale re di Francia*. ETS, Pisa.
- Penco, C.: 2004, *Introduzione alla filosofia del linguaggio*. Laterza, Roma-Bari.
- Prior, A.N.: 1955, *Formal Logic*. Oxford University Press, London.
- Putnam, H.: 1992, Significato, riferimento e stereotipi. Bottani A. & Penco, C. (Eds.), *Significato e teorie del linguaggio*. Franco Angeli, Milano.
- Quine, W.V.O., 1960, *Word and Object*. MIT Press, Cambridge MA (*Parola e oggetto*. Il Saggiatore, Milano 1970).

- Rorty, R.: 1979, *Philosophy and the Mirror of Nature*. Princeton University Press, Princeton NJ (*La filosofia e lo specchio della natura*. Bompiani, Milano 2004; i numeri di pagine sono riferiti a: *Der Spiegel der Natur*. Suhrkamp, Frankfurt a.M. 1981).
- Rorty, R.: 1994, Sind Aussagen universelle Geltungsansprüche? *Deutsche Zeitschrift für Philosophie*, 42, 6, 975-988.
- Ryve, A.: 2004, Can collaborative concept mapping create mathematical productive discourses? *Educational Studies in Mathematics* 26, 157-177.
- Russell, B.: 1905, On Denoting. *Mind*, 14, 479-493 (Russell, B., *Essays in Analysis*. Allen and Unwin, London, 1973, 103-119; Sulla denotazione, Bonomi, A. Ed., *La struttura logica del linguaggio*. Bompiani, Milano 1973, 179-195).
- Russell, B.: 1910, Knowledge by Acquaintance and Knowledge by Description. *Proceedings of the Aristotelian Society*, 11, 108-128 (repr.: Russell, B.: 1963, *Mysticism and Logic*. Allen and Unwin, London, 152-167).
- Schnädelbach, H.: 1992, Thesen über Geltung und Wahrheit. *Zur Rehabilitierung des animal rationale*. Suhrkamp, Frankfurt a.M., 104-115.
- Sfard, A. & Kieran, C.: 2001, Cognition as communication. Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, Activity*, 8, 1, 42-76.
- Strawson, P.F.: 1950, On Referring, *Mind*, 59, 320-344 (Flew, A., Ed.: *Essays in Conceptual Analysis*. Macmillan, London, 1960, 21-52).
- Tagliagambe, S. (1991), *L'epistemologia contemporanea*, Editori Riuniti, Roma.
- Vattimo, G. (Ed.): 1993, *Enciclopedia Garzanti di Filosofia*. Garzanti, Milano.
- Von Wright, G.E.: 1951, *An Essay in Modal Logic*. North-Holland, Amsterdam, 1951.
- Williams, M.: 1996, *Unnatural doubts*. Princeton University Press, Princeton NJ.
- Wittgenstein, L.: 1964, *Tractatus logico-philosophicus*. Einaudi, Torino (Routledge and Kegan Paul, London 1922).
- Wittgenstein, L.: 1971, *Osservazioni sopra i fondamenti della matematica*. Einaudi, Torino (*Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*. Blackwell, Oxford 1956).
- Wittgenstein, L.: 1978, *Della Certezza*. Einaudi, Torino (*Über Gewissheit*. Blackwell, Oxford 1969).
- Wittgenstein, L.: 1990, *Grammatica filosofica*. La Nuova Italia, Firenze (*Philosophische Grammatik*. Blackwell, Oxford 1969).
- Wittgenstein, L.: 1999, *Ricerche filosofiche*. Einaudi, Torino (*Philosophische Untersuchungen*. Blackwell, Oxford 1953).