In Bazzini, L. (Ed.), *Atti del Seminario Franco Italiano di Didattica dell'Algebra, VI, (SFIDA 21–25)* (pp. 29–42). Torino: Dipartimento di Matematica, Università di Torino (2008)

La rappresentazione degli insiemi: appartenenza e inclusione

Giorgio T. Bagni

Dipartimento di Matematica, Università di Roma "La Sapienza"

Summary

The representations of basic notions of the Theory of Sets are investigated, with reference to semiotic registers employed. We conclude that there is not a single register of a given kind: the nature of a register is linked from other conceptual aspects and when we make reference to representations, we must consider this dependence on various cultural frameworks.

I. Introduzione

> "Non già che cosa siano le rappresentazioni, ci si deve chiedere, o che cosa accada quando uno si rappresenta qualche cosa; bensì: come si usi la parola *rappresentazione*. Ma questo non significa che io voglia parlare soltanto di parole. Infatti, nella misura in cui, nella mia domanda, si parla della parola *rappresentazione*, viene anche messa in questione l'essenza della rappresentazione".
>
> Ludwig Wittgenstein (1999, n. 370, p. 153)

L'espressione degli oggetti della matematica richiede l'uso di registri semiotici (Duval, 1995): non ci sono concetti senza segni (Vygotsky, 1962), dunque insegnanti ed allievi devono rappresentare gli oggetti matematici. La prima introduzione didattica della nozione di insieme è basata su descrizioni verbali, ma naturalmente diversi registri possono essere usati per rappresentare la nozione di insieme (per quanto riguarda la dicotomia tra oggetti e concetti si veda: D'Amore, 2001, dove l'Autore sottolinea che una rappresentazione semiotica richiede il riferimento ad un particolare registro rappresentativo).

Per quanto riguarda le rappresentazioni visuali degli insiemi, i diagrammi di Eulero (1772) sono stati introdotti da Leonhard Euler (1707-1783) e ripresi (1881) da John Venn (1834-1923) per esprimere le relazioni tra insiemi (con riferimento a diversi campi di applicazione, i diagrammi di Johnston illustrano la logica preposizionale e sono equivalenti alle tavole di verità). Faremo riferimento ad essi con la denominazione *diagrammi di Eulero-Venn*.

Esamineremo alcune caratteristiche di queste rappresentazioni, in particolare di quelle visuali, sulla base dei dati di due esperienze. Scopo della ricerca è di mostrare che i registri rappresentativi non possono essere considerati assolutamente, ma sono concettualmente collegati e dipendono da vari aspetti culturali (un'analisi storica è in: Bagni, in stampa-b).

II. La rappresentazione: alcuni richiami teorici

Il *paradosso cognitivo del pensiero matematico* è precisato da R. Duval (1993), il quale sottolinea che l'apprendimento matematico è concettuale ma l'attività con gli oggetti matematici coinvolge rappresentazioni semiotiche. È dunque necessario distinguere l'oggetto matematico (pur senza, con ciò, indicarne un'esistenza in senso platonistico: Bagni, in stampa-a) dalle sue singole rappresentazioni; la presenza di diversi registri è importante per il funzionamento cognitivo della mente umana (Duval, 1995), dunque lo studio delle rappresentazioni è centrale nella ricerca in didattica.

Per quanto riguarda le connessioni tra l'esperienza umana ed i sistemi matematici formali, nella tradizione piagetiana, la distinzione tra strutture fisiche e mentali si collega spesso alla distinzione tra il significato, interno, e il significante, esterno; l'interazione tra i due livelli (dei quali uno è osservabile) è ciclica: l'attività mentale può avere luogo indipendentemente da quella fisica, ma le stesse strutture mentali possono essere considerate il prodotto di azioni fisiche (Kaput, 1993). Non considereremo la distinzione tra strutture interne (mentali) e rappresentazioni esterne in termini di opposizione.

È inoltre necessario tenere conto delle connessioni tra esperienze spaziali e temporali (ad esempio i movimenti corporei), la cui importanza è stata sottolineata da molte ricerche, e l'attività di simbolizzazione (Radford, 2002b e 2003; per quanto riguarda l'*embodied cognition* il riferimento è a: Lakoff & Núñez, 2000). Queste considerazioni potranno essere riprese nell'interpretazione dei diagrammi di Eulero-Venn da parte degli allievi.

L'uso di sistemi di rappresentazione (sia tradizionali che nuovi) implica la loro *legittimazione*, con i due aspetti, mutuamente connessi, politico ed epistemologico (Radford, 2002a, pp. 236-237; si veda anche: Godino & Batanero, 1994).

Per quanto riguarda l'approccio strumentale di P. Rabardel, se ci riferiamo ad un oggetto simbolico come ad un artefatto (ad esempio: i diagrammi di Eulero-Venn), per poterlo considerare uno strumento è necessaria un'attività costruttiva da parte del soggetto, la quale dipende da vari aspetti concettuali e sociali (Rabardel, 1995): ciò conferma come sia impossibile riferirsi ad una rappresentazione formale in un dato registro in termini assoluti.

III. La rappresentazione degli insiemi

> "È davvero un pregiudizio pensare che le figure siano meno rigorose (…), scambiando il disegno usato come simbolismo col disegno volto a produrre un certo effetto visivo".
>
> Ludwig Wittgenstein (1982, p. 138)

La presentazione didattica dei primi elementi della teoria intuitiva degli insiemi propone situazioni interessanti. Si utilizzano più registri rappresentativi: *verbali* (le parole "insieme", "elemento", "appartenenza", "insieme vuoto", "sottoinsieme", "inclusione", "unione", "intersezione" etc. e le relative definizioni, quando ci sono); *simbolici* (le lettere maiuscole e minuscole, le varie parentesi, i simboli "$\in$", "$\subseteq$","$\varnothing$", "$\cup$", "$\cap$" etc.), *visuali* (i diagrammi di Eulero-Venn etc.).

Come premesso, in questo lavoro ci occuperemo principalmente di rappresentazioni visuali, in particolare dei diagrammi di Eulero-Venn. Quando un allievo traccia una linea curva per racchiudere una collezione di oggetti compie un'azione importante e significativa: ma il significato di una rappresentazione non può essere svincolato dall'uso (seguendo, ad esempio, Wittgenstein, 1982) e tale osservazione, come vedremo, potrà stare alla base di difficoltà interpretative anche notevoli.

Importante è inoltre sottolineare che i diagrammi di Eulero-Venn non possono essere confusi con lo stesso concetto di insieme (Freudenthal, 1983): il passaggio dalla prima considerazione di elementi collegati tra loro alla corretta nozione di insieme è tutt'altro che semplice (Radford, 2002b e 2003). Le seguenti annotazioni di R. Ferro (che potrebbero essere ricondotte al concetto di "sostanzialità" nell'accezione di: Casari, 1964, p. 21) saranno importanti per la nostra ricerca:

> "Mediante i diagrammi si evoca l'appartenenza di un elemento, indicato da un punto, ad una collezione. Ma come proporre la situazione se l'elemento indicato dal punto è a sua volta una collezione o se la collezione indicata da una regione è pensata come elemento? L'idea di indicare un elemento con una regione interna non va bene perché fa confondere l'appartenenza con la relazione di sottocollezione, che è tutt'altro" (Ferro, 1993, p. 1086).

È dunque fondamentale considerare la differenza tra *appartenenza* ($x\in$I) e *inclusione* ($\{x\}\subseteq$I, cioè appartenenza all'insieme delle parti: $\{x\}\in\wp(\mathrm{I})$); tale differenza, in genere chiara quando le espressioni sono verbali o simboliche, dovrebbe emergere anche per le rappresentazioni visuali. [Si noti che $a\in b$ e $a\subseteq b$ non sono situazioni alternative. Ad esempio, se consideriamo i numeri naturali secondo l'introduzione di von Neumann, 0 viene fatto corrispondere a $\varnothing$, 1 a $\{\varnothing\}$, 2 a $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, 3 a $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$ etc.; si verifica che risulta per $a<b$ sia $a\in b$ che $a\subseteq b$. Segnaliamo che si definisce *insieme transitivo* un insieme a tale che $\forall x$ $(x\in a \rightarrow x\subseteq a)$]

Presenteremo due esperienze collegate a diversi livelli scolastici: la prima (A) riguarderà l'introduzione degli insiemi ad allievi di 11 anni (in Italia: primo anno della scuola secondaria inferiore) e ci consentirà di mettere a fuoco elementi utili per l'interpretazione della seconda (B), collegata ad allievi di 15 anni (in Italia: primo biennio della scuola secondaria superiore).

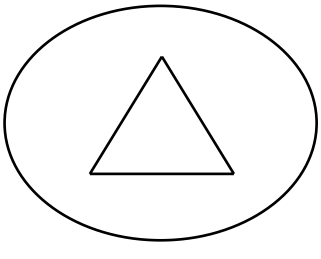
IV. Esperienza A

Iniziamo con la descrizione di una breve esperienza in cui sono coinvolte due allieve di 11 anni (frequentanti la classe I di una Scuola Media, in provincia di Treviso) e l'insegnante di matematica. L'esperienza ha avuto luogo durante una lezione, in classe, in situazione non valutativa.

L'insegnante scrive alla lavagna:

Rappresenta graficamente l'insieme costituito dai lati di un triangolo

S. (*alla lavagna, disegna un triangolo e lo racchiude con una linea ellittica*): "Ecco".



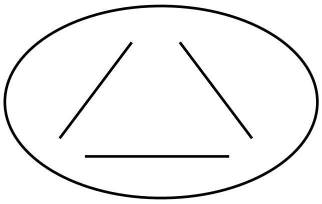
Insegnante: "Non è sbagliato, hai fatto un bel disegno. Però guardando potrebbe essere un insieme con un elemento solo".

S.: "Perché uno? Ho fatto tre lati".

Insegnante: “Sì, ma fanno parte del triangolo: è un triangolo che ti viene in mente, tutta la figura, non i tre lati”.

G. (*interviene dal posto*): “Eh, anch’io ci vedo il triangolo e no i tre lati!”.

S. (*un po’ contrariata, rivolgendosi alla compagna*): “Già, e cosa devo fare? Devo romperlo?” (*cancella il triangolo e ridisegna i tre lati separati*).



G.: “No, così non è un triangolo, l’esercizio diceva triangolo”.

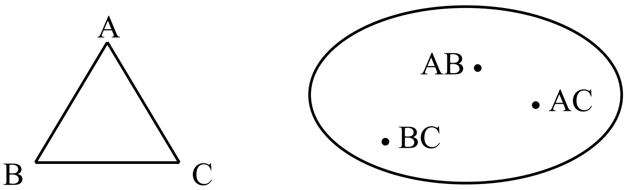
Insegnante (*rivolta a S.*): “Momento, la tua risposta andava bene se si interpreta bene la figura. Provi a pensare a un’altra rappresentazione?”

S.: “Ancora con quei disegni lì?”

Insegnante: “Sì, coi diagrammi di Eulero-Venn”.

S. (*dopo qualche secondo*): “Mm, no”.

Insegnante: “Senti, cerco di darti un’idea. Ti ricordi che quando facciamo geometria usiamo le lettere per dare i nomi ai punti e ai lati? Proviamo anche qui. Eh, ti va?”. (*Disegna alla lavagna le figure seguenti*).



G.: “Secondo me è questo disegno che va bene perché si vede che ce ne hai tre”.

S. (*perplessa*): “Sì però dentro non c’è mica scritto che quelli lì sono i lati, cioè come faccio a saperlo, devo guardare fuori...”

Fermiamoci qui. Come accennato, la breve esperienza descritta, pur essendo limitata ad uno scambio di battute, è utile per introdurre il problema. Alcuni spunti sono interessanti: le tre rappresentazioni proposte differiscono tra di loro soprattutto per quello che potremo chiamare il grado di *verosimiglianza* rispetto alla situazione geometrica rappresentata:

- nella prima rappresentazione, gli elementi dell’insieme sono disegnati, *riprodotti* come segmenti e come lati di un triangolo, più che semplicemente rappresentati;
- nella seconda, gli elementi restano segmenti, ma vengono disegnati in una reciproca posizione che non corrisponde a quella dei lati di un triangolo;
- nella terza gli elementi sono rappresentati solamente da punti: la loro interpretazione come lati di un triangolo richiede una figura esplicativa, esterna alla rappresentazione.

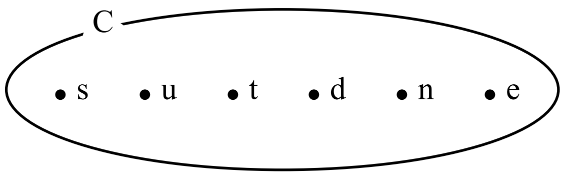
Significativa è inoltre l’osservazione dell’insegnante secondo la quale le rappresentazioni devono essere interpretate (“la tua risposta andava bene se si interpreta bene la figura”). Approfondiremo queste tematiche esaminando la seconda esperienza.

V. Esperienza B

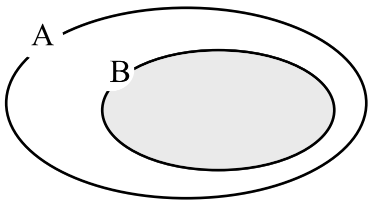
K., 15 anni, frequenta il primo anno del corso di Ginnasio-Liceo Classico (IV ginnasio, a Treviso). Il suo profitto è medio-alto in tutte le materie.

Per valutare l'esperienza sarà utile conoscere alcune caratteristiche dell'insegnamento (ci baseremo sul libro di testo di K.). Tra gli argomenti introdotti nella classe di K. segnaliamo:

- elementi, insiemi, appartenenza: (dal libro di testo di K.) "In matematica si usa la parola *insieme* per indicare un raggruppamento, una raccolta, una collezione di *elementi*: questi possono essere oggetti, individui, simboli, numeri, figure geometriche etc. Riterremo che gli elementi di un insieme siano ben definiti e distinti tra loro. (...) Generalmente gli insiemi si indicano con lettere maiuscole; gli elementi di un insieme si indicano con lettere minuscole. La scrittura $a \in \mathrm{A}$ si legge *a appartiene ad A*";
- i diagrammi di Eulero-Venn: (dal libro di testo di K.) "Si dà una rappresentazione geometrica: si delimita con una linea chiusa una regione del piano e si rappresentano gli elementi dell'insieme mediante punti all'interno di tale regione (eventualmente indicando il nome di ciascun elemento accanto al punto che lo rappresenta)"; riportiamo l'esempio riguardante l'insieme C delle consonanti della parola *studente*:



- sottoinsiemi, inclusione: (dal libro di testo di K.) "Considerati due insiemi A e B si dice che B è un sottoinsieme di A quando ogni elemento di B appartiene anche ad A. In simboli si scrive $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ che si legge *B è contenuto in A o è uguale ad A* o *B è incluso in A o è uguale ad A*"; riportiamo l'esempio indicato:



- insieme delle parti: (dal libro di testo di K.) "Dato un insieme A si definisce insieme delle parti di A quell'insieme, indicato con $\wp(\mathrm{A})$, che ha per elementi tutti i possibili sottoinsiemi di A. (...) In generale, se A contiene n elementi, $\wp(\mathrm{A})$ ha 2^n elementi".

Prima di proseguire ci sembrano opportune due osservazioni: innanzitutto va sottolineato l'uso ambiguo del termine *contiene*: parlando di sottoinsiemi si equiparano esplicitamente le espressioni *è incluso* ed *è contenuto*; ma parlando dell'insieme delle parti si afferma: *se A contiene n elementi, $\wp(A)$ ha 2^n elementi* e si utilizza il termine *contiene* con riferimento all'appartenenza. Inoltre è interessante notare l'uso leggermente diverso dei diagrammi di Eulero-Venn nei due esempi riportati: nel primo, gli elementi sono indicati da alcuni (singoli) punti, ben evidenziati e con il nome dell'elemento rappresentato a fianco; nel secondo, invece, i singoli elementi non sono specificati: tutti i punti della parte di piano interna alla linea chiusa potrebbero essere considerati elementi dell'insieme.

Nel corso delle lezioni, in classe, a K. erano stati presentati esempi collegati principalmente ad insiemi di oggetti e di numeri; non raramente è stata indicata la rappresentazione visuale con i diagrammi di Eulero-Venn. Erano stati proposti esempi riguardanti figure geometriche in generale, per illustrare la nozione di sottoinsieme (ad esempio: l'insieme dei quadrati è un sottoinsieme dell'insieme dei rettangoli il quale è un sottoinsieme dell'insieme dei parallelogrammi etc.).

Durante un'esercitazione orale in classe (non in un'occasione di valutazione), a K. è stato proposto l'esercizio seguente:

I è l'insieme dei punti del piano. R è l'insieme dei punti di una retta data nel piano.

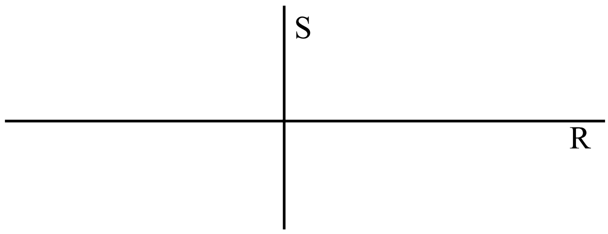
S è l'insieme dei punti di una retta data nel piano perpendicolare alla precedente.

A è l'insieme che ha per elementi R e S.

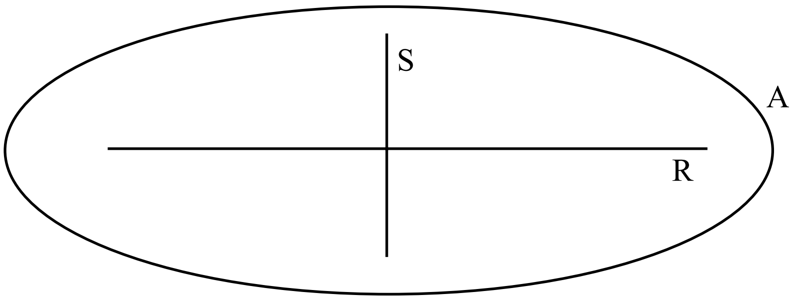
A appartiene all'insieme delle parti di I?

La traccia dell'esercizio, dettata dallo sperimentatore (che interveniva alla lezione ma non era l'insegnante di matematica nella classe di K.), è stata scritta sulla lavagna dall'allieva. K. è stata poi lasciata libera di procedere per la sua risoluzione.

K. (senza parlare) traccia sulla lavagna due rette perpendicolari e le contrassegna con R e S.



Subito dopo, K. racchiude quanto tracciato con una linea ellittica e scrive "A".



K.: "Questo è l'insieme A". (*Rilegge velocemente la traccia dell'esercizio*). "Adesso guardiamo se appartiene all'insieme delle parti di I".

K. (*dopo aver guardato lo sperimentatore*): "delle parti di I contiene tutti i sottoinsiemi. Le figure sono fatte di punti e quindi tutte le figure sono elementi dell'insieme delle parti di I".

K. (*dopo dieci secondi*)*:* "A contiene le due rette… e allora è una figura del piano" (*indica le rette*).

K. (*fissa lo sperimentatore*): "Sì, sì, A è un elemento dell'insieme delle parti".

Iniziamo ad esaminare il ragionamento di K. dal punto di vista della sua espressione verbale:

- "L'insieme delle parti di I *contiene* i sottoinsiemi di I".
- "Tutte le figure del piano sono degli elementi dell'insieme delle parti di I".
- "A *contiene* le due rette ed *è una figura del piano*".
- "Dunque A è un elemento dell'insieme delle parti di I".

Qui emerge l'ambiguità del termine *contiene*: nella prima frase K. si riferisce ad una situazione di appartenenza; ma nella terza frase dice "A *contiene* le due rette" e in base a ciò "*è una figura del piano*": dunque intende: $R \subseteq A$ e $S \subseteq A$. Possiamo quindi confermare l'impressione già segnalata a proposito della potenziale problematicità dell'uso di un termine il cui significato non sia stato sufficientemente chiarito.

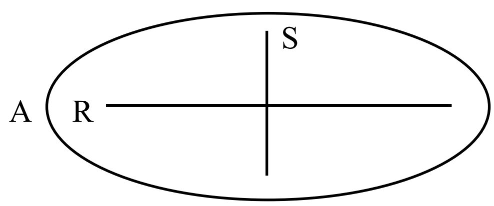
Osserviamo che non è questa l'unica situazione di termini che in matematica possono assumere significati diversi: ad esempio, talvolta il *pari* è riferito all'uguaglianza (*è pari a...*) e talvolta agli interi multipli di due. Queste diverse accezioni (a parte i chiari collegamenti tra di esse: un numero pari di oggetti può essere diviso in due parti uguali) non creano però occasioni di malinteso. Inoltre nel caso del termine *contiene* riferito all'appartenenza e all'inclusione sono disponibili sinonimi efficaci (cioè tali da non causare ambiguità).

Cerchiamo di capire perché in una prima fase K. ha utilizzato il termine *contiene* con riferimento all'appartenenza e successivamente per indicare l'inclusione. Che cosa ha indotto K. a fare ciò? Ripercorriamo brevemente le fasi della risoluzione con particolare riferimento ai registri rappresentativi coinvolti:

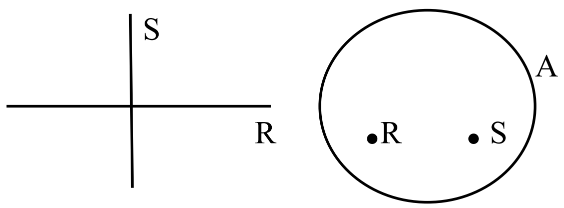
- l'esercizio dato è espresso verbalmente;
- subito K. traduce la situazione in un registro visuale e traccia le due rette;
- in tale registro K. accorpa le rette tracciando attorno ad esse una linea ellittica;
- poi continua a riferirsi a quanto tracciato e parla dell'insieme A dicendo "le due rette".

L'uso (precipitoso?) di un registro visuale sembra quindi aver impedito a K. di apprezzare la sfumatura chiave: A è l'insieme che ha *per elementi* i due oggetti R e S. Invece K. fa riferimento all'intera "figura" $A = R \cup S$: le rette perpendicolari tracciate hanno forse indotto l'allieva a considerare una *figura unica* (ed il termine *contiene* viene collegato all'inclusione).

È essenziale rilevare che durante la propria risoluzione K. ha costruito l'insieme A in un registro visuale, ma utilizzando tale registro (cioè interpretando i diagrammi di Eulero-Venn) impropriamente. Sottolineiamo infatti che quello di K. è *un* uso del registro visuale, ben diverso, ad esempio, da quello corretto dei diagrammi di Eulero-Venn: ma il fatto di usare una rappresentazione *legittimata* (riprendiamo il termine da: Radford, 2002a, p. 236) induce l'allieva a trarre dai diagrammi disegnati alcune conclusioni che si rivelano inesatte.



Questa situazione (alla quale evidentemente K. si riferisce) ha indotto l'allieva a considerare R, S come sottoinsiemi di A. In questo caso il diagramma di Eulero-Venn è utilizzato in modo improprio.



La situazione illustrata a lato (in cui il diagramma di Eulero-Venn viene utilizzato adeguatamente) suggerirebbe invece il corretto riferimento all'appartenenza di R e di S all'insieme A.

La rappresentazione alla quale fa riferimento K. è impropria perché la rappresentazione geometrica delle rette perpendicolari non è rilevante rispetto al concetto di insieme: la scelta di stabilire una relazione tra gli elementi dell'insieme è arbitraria.

Anticipiamo un'osservazione che riprenderemo nella discussione finale: con quanto notato non vogliamo sostenere che l'uso del registro visuale sia controproducente. Ma ribadiamo che, nella situazione in esame, sarebbe stato preferibile per K. evitare il ricorso ad un registro visuale *il cui uso improprio (o non sufficientemente chiarito) ha portato ad un errore*.

Quale avrebbe potuto essere una strategia per raggiungere il risultato esatto? A parte l'uso corretto dei diagrammi di Eulero-Venn, a cui abbiamo sopra fatto cenno, una possibilità è la seguente: invece di passare subito ad un registro visuale, K. avrebbe dunque potuto mantenere il riferimento alla traccia dell'esercizio (espressa verbalmente) e costruire l'insieme A solo sulla base di quanto indicato in tale traccia.

Proponiamo la prosecuzione dell'esperienza:

Sperim.: "Torniamo un po' alle definizioni". (*Cancella il disegno alla lavagna e scrive*):

$$\{R; S\} \in \wp(I) \quad \text{significa} \quad \{R; S\} \subseteq I \quad \text{e ciò significa} \quad R \in I \text{ e } S \in I$$

Sperim.: "Adesso pensa: è vero o non è vero che R appartiene a I e S appartiene a I?"

K.: "I è il piano e R e S sono delle rette" (*sta per disegnarle ancora*).

Sperim.: "No per favore, non disegnare per adesso. Hai detto che I è il piano, ecco, puoi dirlo meglio, insomma puoi essere più precisa?"

K. (*dopo alcuni secondi, rilegge la traccia dell'esercizio*): "Beh, I sarebbe l'insieme di punti, dei punti del piano. Sì, cioè non è una cosa da sola, è un insieme, si scrive con la maiuscola".

Sperim.: "un insieme di... che cosa?"

K.: "Mm, punti. Punti del piano".

Sperim. (*indica l'ultima parte di quanto precedentemente scritto alla lavagna: $R \in I$ e $S \in I$*): "Allora R e S, sono elementi di I?"

K. (*dopo alcuni secondi, un po' incerta*): "Ah no, già, è vero, R e S sarebbero insiemi, mica elementi. Anche loro si scrivono con la maiuscola".

L'argomentazione non appare convincente (né convinta): sembra basata su di un'alternativa tra "insiemi" ed "elementi" e non evidenzia il fatto più semplice: R e S *non sono punti del piano e pertanto non appartengono a I*. In particolare il fatto che R, S (e I) siano "scritti con le maiuscole" è poco significativo per la risoluzione. Ciò rende opportuna un'annotazione: l'uso tradizionale delle lettere minuscole per gli elementi e delle lettere maiuscole per gli insiemi può avere alcune controindicazioni importanti. Si rischia una suddivisione degli oggetti matematici in due categorie separate: dal punto di vista didattico una tale distinzione può essere inizialmente utile, ma l'appartenenza di un insieme ad un altro (ad esempio quando si considera l'insieme delle parti) può determinare dei conflitti con le tradizioni di notazione simbolica. Si potrebbe addirittura giungere alla formazione di una pericolosa misconcezione secondo la quale *un insieme non può appartenere ad un altro insieme*.

Notiamo tuttavia che la presenza di lunghe "catene" di oggetti matematici del tipo $a \in b \in c$... è piuttosto rara, nei testi di matematica (a parte testi specifici di teoria degli insiemi) e ancora più rara nei testi scolastici. Dunque il tradizionale impiego delle lettere minuscole per gli elementi e delle maiuscole per gli insiemi può essere accettabile, se adeguatamente chiarito.

Nonostante il tentativo messo in atto nella seconda parte dell'esperienza, K. non sembra trovarsi a proprio agio nell'applicare formalmente le definizioni (l'allieva tende a riprendere il registro visuale). I registri visuali appaiono concreti, rassicuranti, aderenti all'esempio considerato: l'argomento ha a che vedere con oggetti geometrici, uno dei settori tradizionalmente associati all'uso di registri visuali (per i fenomeni di settorializzazione: Schoenfeld, 1986). I registri simbolici sono invece più generali (anche se non raramente si usano simboli con un valore implicito: si pensi alla differenza tra x e x_0, a n per indicare un naturale, a p per un numero primo etc.) e richiedono una più impegnativa astrazione.

VI. Conclusioni

Come anticipato, non intendiamo scoraggiare l'uso dei registri visuali (né delle altre forme di rappresentazione). Ma l'uso di un registro non è neutro, naturale, bensì è fondato su convenzioni, tradizioni, norme: lo stesso significato di un linguaggio può essere basato sull'uso (Wittgenstein, 1999) e tutto ciò deve essere considerato dall'insegnante.

Per quanto riguarda i diagrammi di Eulero-Venn, è necessario tenere conto delle connessioni tra l'azione con la quale gli allievi racchiudono alcuni elementi con una linea ellittica e la formazione del concetto di insieme (Radford, 2002b e 2003). Questa operazione porta ad una rappresentazione visuale, ma è collegata a molti altri aspetti, ad esempio simbolici, e tali connessioni devono essere analizzate e studiate. L'uso di un registro collega altri aspetti concettuali, e ciò vale in generale: ad esempio, i registri verbali fanno riferimento alle parole e dunque ai significati di tali parole, significati che coinvolgono ovviamente altri registri.

Non c'è un solo registro rappresentativo di un tipo considerato: ad esempio ci sono diversi registri visuali e, più propriamente, diversi modi di proporre e di intendere la stessa rappresentazione. Una rappresentazione non può dunque essere considerata in termini assoluti: la sua legittimazione deve fare riferimento ad un contesto e non è possibile dissociare gli aspetti politico ed epistemologico (come notato in: Radford, 2002a, p. 237).

Tornando ai registri visuali, una rappresentazione non è sempre esatta: i diagrammi di Eulero-Venn operano in ambito visuale, ma coinvolgono aspetti collegati alla simbolizzazione (quando indichiamo un elemento non ne proponiamo la rappresentazione accurata). Se inconsciamente ci riferiamo ad una qualche esattezza della rappresentazione rischiamo di introdurre implicitamente relazioni improprie tra gli elementi dell'insieme considerato.

Spesso le rappresentazioni si chiariscono facendo riferimento all'uso (Wittgenstein, 1999): dunque suggeriamo un'adeguata negoziazione dei significati che coinvolga insegnante e allievi. Ciò può essere riferito ad ogni tipo di rappresentazione: i significati dei termini devono essere fissati senza ambiguità, i simboli usati e le loro caratteristiche (ad esempio: lettere minuscole e maiuscole) devono essere chiariti. Un uso superficiale o scorretto di termini, simboli e rappresentazioni visuali può rivelarsi didatticamente pericoloso e causare la formazione di ostacoli e di misconcezioni.

> "In primo luogo il nostro linguaggio descrive un'immagine. che cosa si debba fare di quest'immagine, in qual modo la si debba impiegare, rimane oscuro. Ma è chiaro che, se vogliamo comprendere il senso di quello che diciamo, dobbiamo esplorare l'immagine. Ma l'immagine sembra risparmiarci questa fatica; allude già a un impiego determinato. Così si beffa di noi".
>
> Ludwig Wittgenstein (1999, p. 244)

Ringraziamenti e nota

L'autore ringrazia vivamente Claudio Bernardi e Paolo Boero per le preziose osservazioni.

Nel presente lavoro sono commentati alcuni dati ripresi da: Bagni, in stampa-a.

Riferimenti bibliografici

Bagni, G.T.: in stampa-a, Some cognitive difficulties related to the representations of two major concepts of set theory, *Educational Studies in Mathematics*.

Bagni, G.T.: in stampa-b, Historical roots of limit notion. Development of its representative registers and cognitive development, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*.

Casari, E.: 1964, *Questioni di filosofia della matematica*, Feltrinelli, Milano.

D'Amore, B.: 2001, Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution, *Scientia Paedagogica Experimentalis* 38-2, 143-168.

Duval, R.: 1993, Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, ULP, IREM Strasbourg, 5, 235-253.

Duval, R.: 1995, *Sémiosis et pensée humaine*, Lang, Paris.

Ferro, R.: 1993, La Teoria degli Insiemi, p. II, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 16, 11-12, 1077-1099.

Freudenthal, H.: 1983, *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*, Reidel, Dordrecht.

Godino, J. & Batanero, C.: 1994, Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3, 325-355.

Kaput, J.J.: 1993, The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience, Bieler, R.; Scholz, R.W., Strasser, R. & Winkelman, B. (Eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, 379-397, Kluwer, Dordrecht.

Lakoff, G. & Núñez, R.: 2000, *Where Mathematics come from? How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York.

Rabardel, P.: 1995, *Les hommes et les technologies: Approche cognitive des instruments contemporains*, A. Colin, Paris.

Radford, L.: 2002a, The Object of Representations: Between Wisdom and Certainty, Hitt, F. (Ed.), *Representations and Mathematics Visualization*, 219-240, Cinvestav-IPN, Mexico.

Radford, L.: 2002b, The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge, *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14-23.

Radford, L.: 2003, Gestures, speech and the sprouting of signs, *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.

Schoenfeld, A.H.: 1986, On having and using geometric knowledge, Hiebert, J. (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge, the case of mathematics*, Erlbaum, Hillsdale, 225-263.

Vygotsky, L.S.: 1962, *Thought and Language*, MIT Press, Cambridge.

Wittgenstein, L.: 1982, *Lezioni sui fondamenti della matematica*, Boringhieri, Torino.

Wittgenstein, L.: 1999, *Ricerche filosofiche*, Einaudi, Torino.