

L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,
24B, 4, 311-329

Apprendimento, risoluzione di problemi ed uso dei registri rappresentativi nella Scuola Superiore

GIORGIO T. BAGNI

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DI ROMA "LA SAPIENZA"

Summary. Several previous studies showed that the role of semiotic representations is very important in the learning of Mathematics: in this paper we analyse the behavior of High School pupils (aged 17-19 years) with reference to some exercises in Trigonometry, in Analytic Geometry, in Calculus; four experimental research considered 337 pupils. In particular, as regard strategies and didactical implications, we conclude that many pupils try to solve a problem only in the sector explicitly considered: and sometimes this is an obstacle to reach good performances and it is ineffective for the development of the ability to coordinate different registers of representation.

Apprendimento, risoluzione di problemi ed uso dei registri rappresentativi nella Scuola Superiore

GIORGIO TOMASO BAGNI

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DI ROMA "LA SAPIENZA"

INTRODUZIONE*

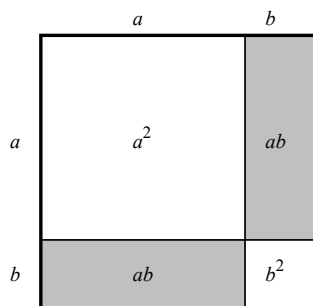
Abbiamo introdotto una recente ricerca (Bagni, 2000a), ricordando le frasi pronunciate da due allievi della scuola secondaria italiana.

Citiamo innanzitutto Marco, un dodicenne che, riferendosi all'enunciato del teorema di Pitagora ed alla figura che la illustra, chiese: "Ma un teorema... è meglio dirlo con delle parole o disegnarlo?" A Marco fu chiesta la sua personale opinione, e dopo una breve riflessione egli dichiarò: "Disegnarlo: siamo in geometria!"

La seconda citazione riguarda Anna, diciottenne allieva del Liceo scientifico, chiamata a scegliere "il più appropriato" tra i due metodi per provare che $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$:

1.
$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+ba+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2$$

2.



Anna scelse il primo metodo, affermando che "è più appropriato perché dimostra una proprietà algebrica con un procedimento algebrico" (Kaldrimidou, 1987 e 1995; Bagni, 1997).

(*) Le traduzioni nel presente articolo sono nostre.

Le analogie tra i comportamenti dei due allievi sono chiare: entrambi sembrano “settorializzare” il proprio approccio alla matematica, quasi volendosi collocare in un ben determinato ambito (la *geometria*, l'*algebra*), in un particolare settore della disciplina. Essi operano quindi esclusivamente in tale ambito, quasi volendo evitare contaminazioni con altri settori della matematica.

Il presente lavoro evidenzierà alcuni fenomeni di *settorializzazione* (Bagni, 2000a); proporremo quindi ulteriori ricerche incentrate sullo stesso argomento, miranti a sottolineare le difficoltà che possono emergere da una scarsa capacità, negli allievi, di coordinare l'apprendimento e l'operatività nei diversi registri rappresentativi.

ALCUNI PROBLEMI DI SETTORIALIZZAZIONE

Un primo elemento da rilevare collegato ai comportamenti sopra descritti può essere individuato nel ruolo della rappresentazione visuale (si veda ad esempio: Vinner, 1992, pp. 197, 212). Ad esempio, la didattica della geometria e la risoluzione, da parte dell'allievo, di un problema geometrico si sviluppano naturalmente in un ambito visuale, nel quale la presenza di figure e di immagini è fondamentale (indichiamo ad esempio: D'Amore, 1997 e il capitolo 5 di: D'Amore, 1999).

Ma la corretta gestione dell'apprendimento mediante le rappresentazioni visuali può essere causa di difficoltà; Fischbein afferma che “l'integrazione delle proprietà concettuali e figurali in strutture mentali unitarie, con la predominanza dei contenuti concettuali su quelli figurali, non è un processo naturale. Essa dovrebbe costituire una continua, sistematica, principale attività del docente” (Fischbein, 1993, p. 156). Se con il termine *concetto figurale* intendiamo una “fusione tra concetto e figura” (Fischbein, 1993, p. 143), dobbiamo rilevare che “il processo di costruzione dei concetti figurali nella mente dello studente non può essere considerato un effetto spontaneo dei tradizionali corsi di geometria” (Fischbein, 1993, p. 156).

Abbiamo ipotizzato (Bagni, in via di pubblicazione) che la difficoltà di coordinamento dei diversi registri rappresentativi può essere causa di problemi di *settorializzazione* delle conoscenze. Schoenfeld, seppure esaminando diverse situazioni segnala con forza pericoli di questo genere e afferma: “Gli studenti sono competenti quando si tratta di dedurre e sono competenti quando si tratta di costruire, ma settorializzano spesso le loro conoscenze [...] Una gran parte delle loro conoscenze resta quindi inutilizzata ed i loro risultati nella risoluzione di problemi sono di molto inferiori di quelli che potrebbero (e che dovrebbero) essere” (Schoenfeld, 1986, p. 226).

Isoliamo dunque le tre domande seguenti:

Domanda 1. Il fatto che gli allievi siano “preparati” a risolvere esercizi in più àmbiti (separatamente), intesi come settori della stessa disciplina, implica buone performance in esercizi che coinvolgano più àmbiti?

Domanda 2. Nel caso in cui il coinvolgimento di più àmbiti si presentasse come un ostacolo, la presentazione dello stesso esercizio in forma “segmentata”, ovvero con la suddivisione della traccia in più punti, divisi per àmbiti, aiuta gli allievi a superare (o ad eludere) tale ostacolo?

Domanda 3. Il tempo a disposizione è elemento decisivo per ottenere buone performance nel caso di risoluzione di un esercizio che si articola in più àmbiti?

Sono stati quindi elaborati i seguenti test, da somministrare a gruppi diversi di allievi:

Test 1. Abbiamo preparato tre schede, A, B, C nelle quali un esercizio analogo viene proposto rispettivamente negli àmbiti goniometrico (A), di geometria analitica (B) ed in entrambi questi àmbiti (C). Confrontando le percentuali di successo degli allievi intendiamo valutare se ad eventuali buone performance in àmbito goniometrico ed analitico (separatamente considerati) corrispondono buone performance anche per quanto riguarda esercizi che coinvolgono entrambi tali àmbiti.

Test 2. Abbiamo suddiviso esplicitamente in due punti la traccia relativa alla scheda C in modo da evidenziare le due fasi della risoluzione (svolte in due àmbiti diversi).

Test 3. Abbiamo riproposto la scheda C lasciando agli allievi il doppio del tempo originariamente previsto.

L'analisi sperimentale del comportamento degli allievi è stata condotta esaminando quattro classi di IV Liceo scientifico (98 allievi di 17-18 anni) e quattro classi di V Liceo scientifico (97 allievi di 18-19 anni), a Treviso, per un totale di 195 allievi, i quali avevano seguito, fino al momento del test, un corso tradizionale di matematica; gli allievi sono stati suddivisi casualmente in cinque gruppi (approssimativamente equinumerosi) che indicheremo con A, B, C, D, E.

Test 1

A ciascun allievo dei gruppi A è stata fornita la scheda seguente:

Scheda A

Siano α e β due reali tali che $0 \leq \alpha \leq \pi \wedge 0 \leq \beta \leq \pi$. Determina la relazione tra α e β sapendo che essi hanno lo stesso seno.

Separatamente, a ciascun allievo dei gruppi B è stata fornita la scheda:

Scheda B

Disegna nel piano cartesiano la relazione espressa da:

$$y = x \quad \vee \quad y = \pi - x \quad \text{con } 0 \leq x \leq \pi \wedge 0 \leq y \leq \pi$$

Separatamente, a ciascun allievo dei gruppi C è stata fornita la scheda:

Scheda C

Disegna nel piano cartesiano la relazione espressa da:

$$\text{sen } x = \text{sen } y \quad \text{con } 0 \leq x \leq \pi \wedge 0 \leq y \leq \pi$$

Tempo concesso a ciascun allievo: 5 minuti.

Riassumiamo i risultati del test 1 nelle seguenti tabelle:

Scheda A

(39 allievi: 20 di IV liceo scientifico, 19 di V liceo scientifico)

	IV liceo	V liceo	Totale
$\alpha = \beta \vee \alpha = \pi - \beta$	16 (80%)	11 (58%)	27 (69%)
Soltanto $\alpha = \beta$	3 (15%)	5 (26%)	8 (21%)
Altre risp. o nessuna risp.	1 (5%)	3 (16%)	4 (10%)

Scheda B

(40 allievi: 20 di IV liceo scientifico, 20 di V liceo scientifico)

	IV liceo	V liceo	Totale
Diagramma corretto	17 (85%)	14 (70%)	31 (78%)
Soltanto segm. di $y = x$	1 (5%)	0 (0%)	1 (2%)
Altre risp. o nessuna risp.	2 (10%)	6 (30%)	8 (20%)

Scheda C

(39 allievi: 20 di IV liceo scientifico, 19 di V liceo scientifico)

	IV liceo	V liceo	Totale
Diagramma corretto	4 (20%)	5 (26%)	9 (23%)
Soltanto segm. di $y = x$	3 (15%)	6 (32%)	9 (23%)
Altre risp. o nessuna risp.	13 (65%)	8 (42%)	21 (54%)

Da questi primi risultati appare una consistente differenza della percentuale degli allievi che risolvono correttamente l'esercizio proposto: infatti a percentuali di successo abbastanza alte per le schede A e B (rispettivamente 69% e 78%) si affianca una bassa percentuale per la scheda C (soltanto 23%).

Test 2

A ciascun allievo del gruppo D è stata fornita la scheda seguente:

Scheda D

Siano x e y due reali tali che $0 \leq x \leq \pi \wedge 0 \leq y \leq \pi$. Determina la relazione tra x e y sapendo che essi hanno lo stesso seno.

Disegna quindi nel piano cartesiano la relazione espressa da:

$$\text{sen } x = \text{sen } y \quad \text{con } 0 \leq x \leq \pi \wedge 0 \leq y \leq \pi$$

Tempo concesso a ciascun allievo: 5 minuti.

Riassumiamo i risultati del test 2 nella seguente tabella:

<i>Scheda D</i>			
<i>(39 allievi: 20 di IV liceo scientifico, 19 di V liceo scientifico)</i>			
	IV liceo	V liceo	Totale
Diagramma corretto	12 (60%)	9 (47%)	21 (54%)
Soltanto segm. di $y = x$	4 (20%)	3 (16%)	7 (18%)
Altre risp. o nessuna risp.	4 (20%)	7 (37%)	11 (28%)

Dai risultati emerge che la percentuale di successo, pur mantenendosi a livelli non molto elevati, è nel complesso sensibilmente superiore nel caso della scheda D (54%) rispetto a quanto riscontrato per la scheda C (23%).

Test 3

A ciascun allievo del gruppo E è stata fornita la scheda C, concedendo però 10 minuti, il doppio del tempo concesso in precedenza (gruppo C). Riassumiamo i risultati:

<i>Scheda C (tempo 10 minuti)</i>			
<i>(38 allievi: 19 di IV liceo scientifico, 19 di V liceo scientifico)</i>			
	IV liceo	V liceo	Totale
Diagramma corretto	3 (16%)	7 (37%)	10 (26%)
Soltanto segm. di $y = x$	6 (31%)	7 (37%)	13 (34%)
Altre risp. o nessuna risp.	10 (53%)	5 (26%)	15 (40%)

Non appaiono differenze significative sulla risoluzione dell'esercizio proposto rispetto ai risultati della scheda C con un tempo di 5 minuti.

Da tali risultati emergono alcune tendenze abbastanza nette, che ci portano a rispondere alle domande sopra formulate:

Risposta 1. Il fatto che gli allievi siano "preparati" a risolvere esercizi in più ambiti considerati separatamente, non implica buone performance, per l'esercizio esaminato, quando la formulazione coinvolge più ambiti.

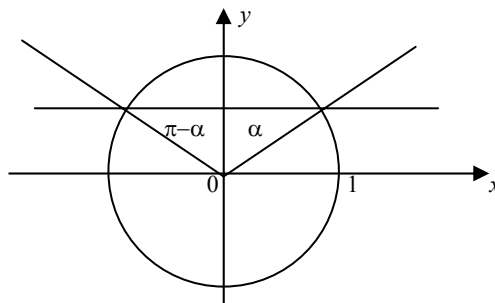
Risposta 2. La presentazione dello stesso esercizio in forma “segmentata”, con la suddivisione della traccia in più punti, aiuta gli allievi ad eludere (più che a superare) l’ostacolo costituito dalla sovrapposizione di più ambiti.

Risposta 3. Il tempo a disposizione non appare elemento decisivo per ottenere buone performance nel caso di risoluzione di un esercizio che si svolge in più ambiti.

Non pochi allievi, dunque, appaiono disorientati, stentano a prendere coscienza dell’opportunità di operare in ambiti diversi e con diversi registri rappresentativi ⁽¹⁾. Ci troviamo davvero di fronte a fenomeni di *settorializzazione*: le percentuali di successo aumentano quando l’esercizio è scomposto nelle sue fasi risolutive ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Tutti i test descritti nel presente lavoro sono stati condotti con riferimento ad un numero esiguo di allievi (peraltro relativi al solo Liceo Scientifico); dal punto di vista statistico non è stata effettuata alcuna campionatura: dunque i risultati, di carattere essenzialmente qualitativo, non pretendono di essere riferiti ad un’ampia popolazione.

⁽²⁾ La risoluzione goniometrica (scheda A) coinvolge il registro rappresentativo algebrico; tuttavia circa la metà degli allievi che hanno dato la risposta esatta hanno ricordato il “grafico” che illustra la proprietà secondo cui angoli supplementari hanno uguale seno:



Ciò fa pensare al coinvolgimento del registro rappresentativo grafico; ed in tale caso riscontriamo coordinazione tra i due registri rappresentativi considerati (in Bagni, 2000a ci rifacciamo a: Duval, 1993, 1994 e 1996). La coordinazione di registri diversi non sembra derivare soltanto da capacità dell’allievo, ma anche dal contratto didattico (Bagni, 1999). La componente affettiva può assumere una chiara importanza (si veda, con riferimento ad un diverso livello scolastico: Poli & Zan, 1996, pp. 454-455): la convinzione di operare in un determinato contesto è vissuta come vincente da parte dell’allievo e determina quindi alcune strategie nell’approccio alla risoluzione dell’esercizio, strategie che possono rivelarsi decisive per quanto riguarda il successo.

ANALOGIA FORMALE ED ERRORI

Quanto rilevato nella ricerca sopra presentata merita un ulteriore approfondimento; abbiamo ritenuto opportuno esaminare altre occasioni nelle quali un approccio evidentemente settoriale ad un problema possa essere causa di errori.

Premettiamo che chiameremo *analogia formale* un'analogia che appaia in un registro rappresentativo, in particolare nel registro simbolico, ma non necessariamente in altri. Così due entità matematiche ⁽³⁾, sulle quali ad esempio si basino due esercizi, possono apparire formalmente analoghi se esaminate dal punto di vista della loro presentazione simbolica, ma una loro considerazione più profonda, condotta nell'ambito di diversi registri rappresentativi (ad esempio tenendo conto dell'aspetto grafico), può rivelare differenze decisive.

Illustriamo la situazione con un esempio semplicissimo: agli allievi liceali è ben noto che la disequazione:

$$x^2+1 > 0$$

è verificata da tutte i valori reali della variabile x . Analoga "universalità" potrebbe essere (sbrigativamente) attribuita per analogia formale alle soluzioni di:

$$[f(x)]^2+1 > 0$$

e ciò non considererebbe le caratteristiche della funzione f , ad esempio il suo dominio il quale potrebbe *non* essere esteso a tutto il campo reale. In pratica, la considerazione della situazione algebrica (l'esame del segno di una somma di quadrati) risulterebbe primaria ed esclusiva, nella mente dell'allievo.

Ci siamo quindi posti la domanda seguente:

Domanda 4. La presentazione di esercizi (diversi) formalmente analoghi può indurre in errore un allievo, portandolo ad estendere impropriamente una soluzione ottenuta coinvolgendo soltanto il registro rappresentativo simbolico?

Per rispondere a questa domanda abbiamo predisposto il seguente test:

Test 4. Abbiamo proposto agli allievi le disequazioni (scheda F):

$$(\arctg x)^2+2 > 0$$

$$(\arcsen x)^2+5 > 0$$

⁽³⁾ Usiamo volontariamente questo termine generico, per non parlare qui esplicitamente di "oggetti". Del resto, ricordiamo con L. Bazzini che "Linchevski e Sfard hanno evidenziato che spesso gli studenti concepiscono un'espressione algebrica (per esempio un'equazione o una disequazione) come una mera successione di simboli privi di ogni semantica e per le quali le trasformazioni formali usate per arrivare alla soluzione sono l'unica fonte di significato" (Bazzini, 1995b, p. 44, lavoro in cui si citano: Linchevski & Sfard, 1991; Sfard, 1991; Sfard & Linchevski, 1992).

per esaminare il loro comportamento in presenza dell'analogia formale dei due esercizi: potremmo ipotizzare che in entrambi i casi gli allievi siano portati a

riconoscere che la somma di un quadrato e di un numero positivo è senz'altro positiva (privilegiando, dunque, l'aspetto algebrico); ma affermando ciò incorrerebbero in un evidente errore, in quanto non considererebbero il dominio delle funzioni arcotangente ed arcoseno.

Test 4

L'analisi sperimentale del comportamento degli allievi è stata condotta esaminando due classi di IV Liceo scientifico (46 allievi di 17-18 anni), a Treviso, i quali avevano seguito, fino al momento del test, un corso tradizionale di matematica (in particolare, conoscevano le funzioni goniometriche inverse ed i loro grafici cartesiani).

A ciascun allievo è stata fornita la scheda seguente:

Scheda F

Risolvi le seguenti disequazioni in x reale:

$$(\arctg x)^2 + 2 > 0$$

$$(\arcsen x)^2 + 5 > 0$$

Tempo concesso a ciascun allievo: 5 minuti.

Le percentuali di successi e segnatamente la sensibile presenza dell'errore secondo il quale la disequazione $(\arcsen x)^2 + 5 > 0$ sarebbe verificata da ogni x reale hanno confermato la nostra ipotesi:

<i>Scheda F</i>	
<i>(46 allievi di IV liceo scientifico)</i>	
$(\arctg x)^2 + 2 > 0 \Rightarrow$ ogni x reale	41 (89%)
$(\arcsen x)^2 + 5 > 0 \Rightarrow$ $-1 \leq x \leq 1$	24 (52%)
$(\arcsen x)^2 + 5 > 0 \Rightarrow$ ogni x reale	18 (39%)

Nessun allievo ha fatto ricorso alla rappresentazione grafica per affrontare le disequazioni proposte.

Siamo ora in grado di rispondere alla domanda precedentemente posta, almeno relativamente all'esercizio considerato:

Risposta 4. L'analogia formale di esercizi (diversi) formalmente analoghi talvolta induce in errore un allievo, portandolo ad estendere impropriamente una soluzione ottenuta coinvolgendo soltanto il registro rappresentativo simbolico.

IL COINVOLGIMENTO DI PIÙ REGISTRI RAPPRESENTATIVI

Un'ulteriore riflessione riguarda le modalità di prevenzione o di correzione dell'errore: al fine di eludere il problema precedentemente rilevato potrebbe infatti essere utile il coinvolgimento di più registri rappresentativi.

Consideriamo ancora l'esempio sopra esaminato: se si inserisse un controllo grafico basato sui diagrammi cartesiani di $y = (\arctg x)^2$ e di $y = (\arcsen x)^2$ la situazione potrebbe migliorare, in quanto il disegno stesso potrebbe portare l'allievo a considerare la (visibile!) differenza dei rispettivi domini. Ma un allievo liceale non sarebbe spontaneamente portato a far ricorso alla rappresentazione grafica per affrontare una disequazione come $(\arcsen x)^2 + 5 > 0$: peraltro il grafico cartesiano di $y = (\arcsen x)^2$ non è alla diretta portata di uno studente ancora ignaro degli elementi dell'analisi matematica.

Diversa sarebbe la situazione se l'esercizio *richiedesse* (anche implicitamente) di considerare il grafico cartesiano. Ad esempio, la prima delle disequazioni:

$$\begin{aligned} \arcsen x &< 4 \\ \arcsen x &< x+1 \end{aligned}$$

potrebbe essere risolta anche senza considerare il diagramma di $y = \arcsen x$ (basta infatti ricordare che i valori assunti da $\arcsen x$ non superano $\pi/2$, informazione immediatamente alla portata degli studenti liceali), mentre la risoluzione della seconda richiede il confronto dei diagrammi di $y = \arcsen x$ e di $y = x+1$.

Il secondo esercizio, dunque, può apparire ad una prima lettura più "impegnativo" del primo, richiedendo uno svolgimento che coinvolge in termini decisivi anche il registro rappresentativo grafico. Ma il primo esercizio potrebbe però rivelarsi più insidioso, in quanto la non necessaria considerazione dell'aspetto grafico non contribuirebbe a neutralizzare il rischio, precedentemente evidenziato, di trascurare il dominio. Ci siamo posti la domanda seguente:

Domanda 5. L'impiego anche della rappresentazione grafica per risolvere un esercizio rende più completa ed organica la considerazione delle caratteristiche delle funzioni impiegate?

Osserviamo sin d'ora che il riferimento è qui ad un particolare tipo di esercizio (disequazioni che coinvolgono funzioni con dominio limitato) e non pretendiamo dunque di estrapolare da tale esempio conclusioni del tutto generali.

Per rispondere alla domanda 5 abbiamo predisposto il seguente test:

Test 5. Abbiamo proposto agli allievi di risolvere le disequazioni $\arcsen x < 4$, $\arcsen x < x+1$, ma ad alcuni di essi (scheda G) abbiamo lasciato libertà di scelta del metodo risolutivo, mentre ad altri (scheda H) abbiamo chiesto di procedere confrontando i diagrammi di $y = \arcsen x$, $y = 4$ e $y = x+1$. Il confronto delle percentuali di successo ci indicherà se la forzata considerazione dell'aspetto grafico ha avuto l'effetto di migliorare le performance degli allievi.

Test 5

L'analisi sperimentale del comportamento degli allievi è stata condotta esaminando due classi di IV Liceo scientifico (48 allievi di 17-18 anni), a Treviso, i quali avevano seguito, fino al momento del test, un corso tradizionale di matematica (in particolare, conoscevano le funzioni goniometriche inverse ed i loro grafici cartesiani). Gli allievi sono stati suddivisi casualmente in due gruppi (equinumerosi), che indicheremo con G, H.

A ciascun allievo del gruppo G è stata fornita la scheda seguente:

Scheda G

Risolvi le seguenti disequazioni in x reale:

$$\begin{aligned} \arcsen x &< 4 \\ \arcsen x &< x+1 \end{aligned}$$

Tempo concesso a ciascun allievo: 10 minuti.

Separatamente, a ciascun allievo del gruppo H è stata fornita la scheda:

Scheda H

Dopo avere disegnato i diagrammi cartesiani di:

$$y = \arcsen x \qquad y = 4 \qquad y = x+1$$

risolvi le seguenti disequazioni in x reale:

$$\begin{aligned} \arcsen x &< 4 \\ \arcsen x &< x+1 \end{aligned}$$

Tempo concesso a ciascun allievo: 10 minuti.

Osserviamo che gli allievi di entrambi i gruppi sono stati invitati a rispondere alle domande seguendo l'ordine indicato e a non effettuare correzioni.

Le percentuali di successo sembrano confermare l'ipotesi espressa:

<i>Scheda G</i>	
<i>(24 allievi di IV liceo scientifico)</i>	
$\arcsen x < 4 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$	12 (50%)
$\arcsen x < 4 \Rightarrow$ ogni x reale	8 (33%)
$\arcsen x < x+1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$	10 (42%)
$\arcsen x < x+1 \Rightarrow$ ogni x reale	5 (21%)
<i>Scheda H</i>	
<i>(24 allievi di IV liceo scientifico)</i>	
$\arcsen x < 4 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$	19 (79%)

$\arcsen x < 4 \Rightarrow$ ogni x reale	3 (12%)
$\arcsen x < x+1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$	15 (62%)
$\arcsen x < x+1 \Rightarrow$ ogni x reale	3 (12%)

Particolarmente significativo è il miglioramento per quanto riguarda le percentuali di successi nella disequazione $\arcsen x < 4$: la presenza dell'esplicita indicazione di considerare il metodo grafico ha ridotto l'errore dipendente dalla mancata considerazione della limitatezza del dominio della funzione arcoseno.

Siamo dunque in grado di rispondere alla domanda precedente:

Risposta 5. L'impiego anche della rappresentazione grafica per risolvere un esercizio rende più completa ed organica la considerazione delle caratteristiche delle funzioni impiegate e migliora le performance degli allievi.

La risposta precedente può apparire scontata: che la considerazione della rappresentazione grafica di una funzione finisca per migliorare la conoscenza degli allievi delle caratteristiche della funzione stessa (ad esempio, metta in evidenza il suo dominio) è affermazione quasi ovvia. Meno scontate sono invece le implicazioni didattiche di tale constatazione: la gestione di un esercizio, la sua stessa risoluzione operando in più ambiti richiedono una buona capacità di coordinamento dei registri rappresentativi e non sempre tale coordinamento è esplicitamente considerato un obiettivo didattico di primaria importanza.

UN ESEMPIO TRATTO DALL'ANALISI MATEMATICA

Per confermare le considerazioni precedenti, concludiamo la nostra trattazione presentando una situazione tratta dalla didattica dell'analisi matematica.

Esaminiamo un diffuso esercizio, esemplificato nel modo seguente:

Data la funzione $x \rightarrow f(x)$ espressa da:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{x} \\ x \geq 1 \end{array} \right.$$

determina l'espressione della funzione integrale $x \rightarrow F(x)$, con:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Consideriamo il seguente errore:

$$\begin{array}{ccc}
 \left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{x} \\ x \geq 1 \end{array} \right. & & F(x) = \int_0^x f(t) dt \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \left\{ \begin{array}{l} F(x) = \int_0^x t^2 dt \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} F(x) = \int_0^x \frac{1}{t} dt \\ x \geq 1 \end{array} \right. & & \leftarrow
 \end{array}$$

L'improprio uso dell'analogia è evidente: la "risoluzione" è stata tentata limitandosi ad integrare da 0 a x le due espressioni della $x \rightarrow f(x)$ (senza tenere conto, cioè, degli intervalli in cui tali espressioni devono essere considerate), eseguendo dunque due volte una semplice integrazione, operazione ben nota agli allievi della classe terminale della scuola secondaria superiore.

Un coinvolgimento del registro rappresentativo grafico avrebbe però forse consentito una riflessione ben più articolata e completa: infatti la funzione integrale $F: x \rightarrow \int_0^x f(t) dt$ corrisponde numericamente all'area compresa tra l'asse delle ascisse ed il grafico della funzione $x \rightarrow f(x)$; e il calcolo di tale area, impostato nei vari casi, porta correttamente a:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} F(x) = \int_0^x t^2 dt \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} F(x) = \int_0^1 t^2 dt + \int_1^x \frac{1}{t} dt \\ x \geq 1 \end{array} \right. \Rightarrow \\
 & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{3} x^3 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{3} + \log_e x \\ x \geq 1 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Abbiamo proposto l'esercizio ora ricordato agli allievi due classi di V Liceo scientifico (47 allievi di 18-19 anni), a Treviso, i quali avevano seguito, fino al momento del test, un corso tradizionale di matematica (in particolare, conoscevano l'integrale secondo Riemann, la sua interpretazione geometrica e la funzione integrale). Gli allievi sono stati suddivisi casualmente in due gruppi (approssimativamente equinumerosi) che indicheremo con I, L.

A ciascun allievo del gruppo I è stata fornita la scheda seguente:

Scheda I

Data la funzione $x \rightarrow f(x)$ espressa da:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{x} \\ x \geq 1 \end{array} \right.$$

determina l'espressione della funzione integrale $x \rightarrow F(x)$ con: $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Tempo concesso a ciascun allievo: 15 minuti.

Separatamente, a ciascun allievo del gruppo L è stata fornita la scheda seguente:

Scheda L

Data la funzione $x \rightarrow f(x)$ espressa da:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = x^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{x} \\ x \geq 1 \end{array} \right.$$

disegna il suo diagramma cartesiano e determina quindi l'espressione della funzione integrale $x \rightarrow F(x)$ con: $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

Tempo concesso a ciascun allievo: 15 minuti.

Scheda I

(23 allievi di V liceo scientifico)

risultato esatto	$\left\{ \begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{3} x^3 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{3} + \log_e x \\ x \geq 1 \end{array} \right.$	7 (30%)
------------------	--	---------

errore	$\left\{ \begin{array}{l} F(x) = \int_0^x t^2 dt \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right. \cup \left\{ \begin{array}{l} F(x) = \int_0^x \frac{1}{t} dt \\ x \geq 1 \end{array} \right.$	10 (43%)
--------	---	----------

Scheda L

(24 allievi di V liceo scientifico)

$$\text{risultato esatto} \left\{ \begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{3}x^3 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{3} + \log_e x \\ x \geq 1 \end{array} \right\} \quad 11 \text{ (46\%)}$$

$$\text{errore} \left\{ \begin{array}{l} F(x) = \int_0^x t^2 dt \\ 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{l} F(x) = \int_0^x \frac{1}{t} dt \\ x \geq 1 \end{array} \right\} \quad 6 \text{ (25\%)}$$

Tali risultati, nonostante le differenze siano piuttosto contenute, sembrano confermare che la forzata considerazione del diagramma cartesiano tende a migliorare, nel caso in esame, le performance degli studenti.

Ulteriori e più approfondite analisi potranno basarsi su campioni più ampi e significativi di quelli, di carattere essenzialmente qualitativo, considerati nella ricerca qui presentata.

CONCLUSIONI

I risultati dei test precedentemente esposti possono essere sintetizzati nelle due osservazioni seguenti:

- il comportamento degli allievi risente di fenomeni di *settorializzazione*; tali fenomeni rivelano la presenza di un ostacolo di tipo didattico: l'ambito risolutivo indicato dalla traccia evoca le tecniche da usare ed in questa fase appare plausibile l'azione di alcune clausole del contratto didattico (per cui gli allievi opererebbero soltanto secondo le modalità che ritengono suggerite dall'insegnante mediante la traccia loro assegnata: Bagni, in via di pubblicazione).
- il mantenimento all'interno di un certo ambito dei procedimenti risolutivi porta talvolta a fenomeni di *uso improprio dell'analogia*: in particolare la mancanza di coordinamento dei registri rappresentativi fa sì che lo svolgimento tenda a restare in ambito algebrico generalizzando, in alcuni casi erroneamente, procedimenti e proprietà algebriche (per la parte riguardante l'algebra è possibile rifarsi a: Matz, 1982, che esamina alcuni errori di allievi di 11-18 anni e ad: Arzarello, Bazzini & Chiappini, 1994; Bazzini, 1995a) e non giunga a sfruttare, ad esempio, le potenzialità della visualizzazione grafica. Naturalmente ulteriori ricerche potranno indagare più a fondo i casi sopra proposti per evidenziare i vari comportamenti degli allievi nella gestione dei singoli esercizi (⁴).

Osserviamo che alcuni dei risultati sperimentali riportati potrebbero essere interpretati anche in modo leggermente diverso. Ad esempio, nel caso del Test 1 si non si può trascurare la questione della “segmentazione” del problema proposto rispetto a quella, sopra rilevata, della settorialità; per quanto riguarda i test 4 e 5, inoltre, la difficoltà legata all’individuazione del dominio delle funzioni goniometriche inverse si aggiunge evidentemente ai problemi considerati della sovrapposizione degli ambiti grafico e algebrico e dell’uso scorretto dell’analogia e naturalmente interferisce con questi. Ulteriori ricerche potranno essere dedicate ad individuare la portata dei diversi elementi nell’interpretazione del comportamento degli allievi.

Per quanto riguarda il difficile coordinamento dei registri rappresentativi, non raramente riscontrato, è interessante rilevare che alcune ricerche (Trouche, 1996; Artigue & Al., 1997; Artigue, 1998) sottolineano come l’impiego didattico dei nuovi mezzi tecnologici tenda a favorire comportamenti di validazione spesso basati sul confronto di diversi punti di vista e tale modo di procedere dunque richieda una buona capacità di articolazione dei registri semiotici.

Con riferimento, infine, ai citati fenomeni di generalizzazione impropria, è opportuno precisare che l’importanza del ragionamento analogico non può ovviamente essere trascurata: è ben noto infatti che su di esso si sono basati, e tuttora si basano, molti importanti procedimenti di ricerca matematica. Ma è del resto evidente che il matematico professionista si mantiene sensibile ed attento al controllo della correttezza delle analogie impiegate, mentre i giovani allievi sono talvolta portati, come sopra rilevato, ad effettuare estensioni e generalizzazioni improprie e talvolta illecite (ricordiamo ad esempio quelle esaminate in: Bagni, 2000b).

⁴) La questione si sposta naturalmente sul vasto problema concernente il significato attribuito (o non attribuito) al linguaggio algebrico. Citiamo ad esempio F. Arzarello, L. Bazzini e C. Chiappini: “Come osservato dalla Laborde, lo sviluppo di un linguaggio simbolico specializzato può spogliare di significato il linguaggio in cui l’attività algebrica si era precedentemente espressa. L’algebra retorica e quella sincopata erano abbastanza facili da seguire e da capire. Ma il salto ad un sistema simbolico può nascondere i significati dei termini e delle operazioni che agiscono su di essi. Il linguaggio simbolico ha il potere di rimuovere molte delle distinzioni che il linguaggio naturale preserva, espandendo in questo modo la sua applicabilità. Ne risulta una certa debolezza semantica” (Arzarello, Bazzini & Chiappini, 1994, p. 11; il riferimento è a: Laborde, 1982; indichiamo a tale riguardo anche: Clement, 1982; Chevallard, 1989; Boero, 1992; Malara, 1997).

Bibliografia

- Artigue, M.; Defouad, B.; Dupérier, M.; Juge, G. & Lagrange, J.B. (1997), *L'intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée*, Rapport de recherche, Equipe DIDIREM, IREM Paris 7.
- Artigue, M. (1998), L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18.2, 231-262.
- Arzarello, F.; Bazzini, L. & Chiappini, G. (1994), *L'Algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche*, Progetto strategico CNR, Technologie e innovazioni didattiche, Quaderno n. 6.
- Bagni, G.T. (1997), La visualizzazione nella scuola secondaria superiore, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 20B, 4, 309-335.
- Bagni, G.T. (1999), Limite e visualizzazione: una ricerca sperimentale, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 22B, 4, 353-372.
- Bagni, G.T. (2000a), Learning, problem solving and use of representative registers in Italian High School, Gagatsis, A.; Constantinou, C.P. & Kyriakides, L. (Eds.), *Learning and Assessment in Mathematics and Science*, 45253-IC-2-CY-Erasmus-IP-1, Department of Education, University of Cyprus, Nicosia, 157-170.
- Bagni, G.T. (2000b), «Simple» rules and general rules in some High School students' mistakes, *Journal fur Mathematik Didaktik*, 21 (2000), 2, 124-138.
- Bagni, G.T. (in via di pubblicazione), Apprendimento, risoluzione dei problemi ed uso dei registri rappresentativi nella Scuola Superiore, *Atti del XXI Convegno nazionale UMI-CIIM sull'Insegnamento della Matematica, Nuclei fondanti del sapere matematico nella scuola del 2000 (in ricordo di Francesco Speranza)*, Salsomaggiore Terme, 13-15 aprile 2000.
- Bazzini, L. (Ed.) (1995a), *La didattica dell'Algebra nella scuola secondaria superiore*, Atti del V Convegno Internuclei per la scuola secondaria superiore, Pavia, 16-18 marzo 1995.
- Bazzini, L. (1995b), Equazioni e disequazioni: riflessioni sul concetto di equivalenza, Bazzini, L. (Ed.), *La didattica dell'Algebra nella scuola secondaria superiore*, Atti del V Convegno Internuclei per la scuola secondaria superiore, Pavia, 16-18 marzo 1995, 44-53.
- Boero, P. (1992), Sulla specificità delle ricerche in didattica della matematica. Il caso del formalismo algebrico, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 15, 10.
- Chevallard, Y. (1989), Arithmetique, algebre, modelisation, *Publications de l'IREM d'Aix-Marseille*.
- Clement, J. (1982), Algebra word problems solutions: thought processes underlying a common misconception, *Journal for Research in Mathematical Education*, 13.
- D'Amore, B. (1997), Matite – Orettole – Przetqzyw. Le immagini mentali dei testi delle situazioni-problema influenzano davvero la risoluzione?, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 20A, 3, 241-256.
- D'Amore, B. (1999), *Elementi di didattica della matematica*, Pitagora, Bologna.
- Duval, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg.
- Duval, R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique, *Repres IREM*, 17, ottobre.

- Duval, R. (1996), Quale cognitivo per la didattica della matematica?, *La matematica e la sua didattica*, 3, 250-269.
- Fischbein, E. (1993), The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.
- Kaldrimidou, M. (1987), *Images mentales et représentations en mathématiques chez les mathématiciens et les étudiants en mathématiques*, Thèse, Université Paris 7, Paris.
- Kaldrimidou, M. (1995), Lo status della visualizzazione presso gli studenti e gli insegnanti di matematica, *La matematica e la sua didattica*, 2, 181-194.
- Laborde, C. (1982), *Language naturelle et écriture symbolique*, These, Université J. Fourier, Grenoble.
- Linchevski, L. & Sfard, A. (1991), Rules without reasons as processes without objects, the case of equations and inequalities, Furinghetti, F. (Ed.), *Proceedings of PME XV*, Assisi, 2, 317-324.
- Malara, N.A. (1997), Problemi di insegnamento-apprendimento nel passaggio dall'aritmetica all'algebra, *La matematica e la sua didattica*, 2, 176-186.
- Matz, M. (1982), A process model for high school algebra errors, Sleeman & Brown (Eds.), *Intelligent tutoring systems*, Academic, London.
- Poli, P. & Zan, R. (1996), Il ruolo delle convinzioni nella risoluzione di problemi, *La matematica e la sua didattica*, 4, 440-466.
- Schoenfeld, A.H. (1986), On having and using geometric knowledge, Hiebert, J. (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: the case of mathematics*, 225-263, Erlbaum, Hillsdale.
- Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1, 1-36.
- Sfard, A. & Linchevski, L. (1992), Equations and inequalities. Processes without objects?, *Proceedings of PME XVI*, Durham, 3, 136.
- Trouche, L. (1996), *Etude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*, Thèse de Doctorat, Université de Montpellier 2.
- Vinner, S. (1992), Function concept as prototype for problems in mathematics, Harel, G. & Dubinsky, E. (a cura di), *The concept of Function: aspects of Epistemology and Pedagogy*, MAA Notes, 25, 195-213.

Giorgio Tomaso Bagni
 Dipartimento di Matematica
 Università di Roma "La Sapienza"
 Piazzale Aldo Moro 5
 I-00185 Roma (Italia)