L'educazione matematica, XXVI-VIII, I, 2, 8-26

Quantificatori esistenziali: simboli logici e linguaggio nella pratica didattica

GIORGIO T. BAGNI

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, UNIVERSITÀ DI ROMA «LA SAPIENZA»

Summary. In this paper we consider a problem related to the use of quantifiers in the High School (students aging 18-19), particularly dealing with existential quantifiers, and we propose a *case study* based upon an analytical example. We conclude that many students encounter obstacles with main logical concepts, particularly when considered propositions are expressed by a formal language. Symbols and language are linked with a wider socio-cultural dimension, so the presence of basic Logic in High Schools curricula must be considered as an important point.

1. INTRODUZIONE

La comprensione del significato dei simboli è una questione complessa: il ruolo epistemologico dei segni è collegato con gli individui, con le loro percezioni spazio-temporali, con allievi che vivono in una dimensione socio-culturale della quale è necessario tenere conto. Ma tale impostazione teorica non sempre è riflessa nei programmi scolastici e nei processi di insegnamento-apprendimento: talvolta gli allievi sono forzati ad usare i simboli, e particolarmente i simboli logici, senza una piena comprensione dei loro significati (la bibliografia è vastissima; ad esempio: Speranza, 1993).

Nel presente lavoro considereremo alcuni aspetti del ruolo didattico dei quantificatori e dei simboli mediante i quali essi vengono indicati, con particolare riferimento al quantificatore esistenziale. Metteremo in evidenza la presenza di un comune errore ed esamineremo alcune caratteristiche del comportamento degli allievi relativamente a tale errore, tenendo inoltre conto dei diversi registri rappresentativi impiegati.

Un noto esempio analitico ci consentirà di introdurre la ricerca sperimentale che sarà oggetto del presente articolo[1].

2. QUANTIFICATORI ESISTENZIALI NELLA PRATICA DIDATTICA

2.1. Un esempio dall'analisi matematica

La tesi del teorema di Cauchy (*degli incrementi finiti*), riferita a due funzioni reali di variabile reale f, g definite in $[a; b]$ con le note ipotesi di derivabilità (e $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a; b[$) è:

$$\exists c \in]a; b[\left(\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \right)$$

Si osservi che se valgono le ipotesi del teorema di Cauchy, allora anche le ipotesi del teorema di Lagrange sono verificate sia dalla f che dalla g; potremmo quindi applicare ad entrambe le funzioni quest'ultimo teorema e ottenere:

$$\exists c \in]a; b[\left(f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \right) \qquad \text{e} \qquad \exists c \in]a; b[\left(g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a} \right)$$

da cui, immaginando una (chiaramente errata) "divisione membro a membro", finiremmo per scrivere proprio la tesi del teorema di Cauchy. Un'eventuale "dimostrazione" (puramente sintattica) costruita secondo l'osservazione precedente non sarebbe ovviamente accettabile: infatti una

[1] Nel presente lavoro citeremo alcuni dati sperimentali proposti nel recente seminario SFIDA-20 (Nizza: Bagni, forthcoming-b). Riprendiamo l'esempio da: Prodi & Magenes, 1982. Esso coinvolge nozioni e risultati analitici di base e può quindi essere proposto efficacemente a livello dell'ultimo anno della scuola secondaria superiore.

scrittura didatticamente chiara[2] di quanto ottenuto applicando *due distinte volte* il teorema di Lagrange potrebbe essere:[3]

$$\exists c \in]a; b[\left(f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \right) \quad \text{e} \quad \exists d \in]a; b[\left(g'(d) = \frac{g(b) - g(a)}{b-a} \right)$$

con i reali individuati non necessariamente uguali; e da ciò non può essere fatta seguire la tesi del teorema di Cauchy (in cui si afferma l'esistenza "*di un c* dell'intervallo $]a; b[$ tale che...").[4]

Possiamo porre la questione, più in generale,[5] nel modo seguente:

$\exists c\,[\mathrm{A}(c)] \wedge \exists c\,[\mathrm{B}(c)]$ *non* porta a: $\exists c\,[\mathrm{A}(c) \wedge \mathrm{B}(c)]$

cioè non è detto che per qualche *c* si possa dedurre $\mathrm{A}(c) \wedge \mathrm{B}(c)$[6]

Dunque dalla congiunzione di due proposizioni quantificate esistenzialmente ad elementi dello stesso dominio nel quale sono considerate (*istanziazione*) non segue il contemporaneo verificarsi di esse con riferimento ad un elemento del dominio: indicheremo questo errore con il termine *scorretta doppia istanziazione*.

Abbiamo notato che $\exists c\,[\mathrm{A}(c)] \wedge \exists d\,[\mathrm{B}(d)] \rightarrow \exists c\,[\mathrm{A}(c) \wedge \mathrm{B}(c)]$ non vale; più in generale, con riferimento alle seguenti coppie di formule, nei primi due casi vale un'implicazione (nel primo caso, l'implicazione contraria a quella sopra considerata) ma non l'altra:

$$\exists c\,[\mathrm{A}(c) \wedge \mathrm{B}(c)] \rightarrow \exists a\,[\mathrm{A}(a)] \wedge \exists b\,[\mathrm{B}(b)]$$
$$\forall a\,[\mathrm{A}(a)] \vee \forall b\,[\mathrm{B}(b)] \rightarrow \forall c\,[\mathrm{A}(c) \vee \mathrm{B}(c)]$$

Si ha invece l'equivalenza in questi casi:

$$\exists a\,[\mathrm{A}(a)] \vee \exists b\,[\mathrm{B}(b)] \leftrightarrow \exists c\,[\mathrm{A}(c) \vee \mathrm{B}(c)]$$
$$\forall a\,[\mathrm{A}(a)] \wedge \forall b\,[\mathrm{B}(b)] \leftrightarrow \forall c\,[\mathrm{A}(c) \wedge \mathrm{B}(c)]$$

2.2. Altri esempi di *scorretta doppia istanziazione*

Dal punto di vista didattico, è utile esemplificare quanto presentato considerando due affermazioni (apparentemente) contraddittorie. Ci baseremo su di un predicato P e la scrittura P(x) significa *x gode della proprietà P*; in tale caso:

$$\exists c[\mathrm{P}(c)] \wedge \exists c[\neg \mathrm{P}(c)]$$

afferma che *esiste (almeno un) c per cui vale la proprietà P ed esiste (almeno un) c per cui non vale la proprietà P*.

La presenza della congiunzione porta a chiedersi: il richiesto contemporaneo verificarsi di $\exists c[\mathrm{P}(c)]$ e di $\exists c[\neg \mathrm{P}(c)]$ è una contraddizione? È necessario che gli allievi si rendano conto che la

---

[2] Osserviamo che una scrittura formale è corretta anche se una stessa variabile viene quantificata due o più volte: è preferibile tuttavia evitare tale situazione per chiarezza didattica (come suggerito in: D'Amore & Plazzi, 1992, p. 1032). Non possiamo non accennare ad usi incongrui delle parentesi (a volte presenti e a volte mancanti: ci occuperemo ancora della questione nella nota 5) nella letteratura didattica (notiamo inoltre l'abuso delle dizione "tale che").

[3] Per un lettore abituato alla logica, il passaggio da $\exists c$ a $\exists d$ non è un problema, ma per chi non ha consuetudine con tali argomenti può essere un passaggio… sorprendente!

[4] Notiamo insomma che $\exists c[\mathrm{A}(c)] \wedge \exists c[\mathrm{B}(c)]$ equivale a $\exists c[\mathrm{A}(c)] \wedge \exists d[\mathrm{B}(d)]$ e questa scrittura può "suggerire" meno il passaggio a $\exists c[\mathrm{A}(c) \wedge \mathrm{B}(c)]$; è però importante fare osservare sin d'ora che il passaggio da $\exists c[\mathrm{A}(c)] \vee \exists c[\mathrm{B}(c)]$ o da $\exists c[\mathrm{A}(c)] \vee \exists d[\mathrm{B}(d)]$ a $\exists c[\mathrm{A}(c) \vee \mathrm{B}(c)]$ è corretto, come ribadiremo tra breve.

[5] Alcune discrepanze possono avere un impatto didattico notevole, per un lettore non smaliziato a proposito delle tecniche logiche. Ad esempio, a volte i quantificatori sono relativizzati: non solo si trova $\exists c$, ma la scrittura più complessa $\exists c \in]a; b[$; inoltre a volte dopo il quantificatore si trova una parentesi che comprende una scrittura di una formula, talvolta tale parentesi è omessa. Chiaramente una dettagliata introduzione delle formule ben formate del calcolo usato consente di chiarire la situazione, ma il lettore non specialista può essere disorientato. Una possibilità è dunque utilizzare comunque le parentesi e scrivere dunque $\exists c[\mathrm{A}(c)]$ o $\exists c(\mathrm{A}(c))$ invece di $\exists c\mathrm{A}(c)$.

[6] È ovvio che interpretando i simboli in un dominio con un solo elemento, se in tale interpretazione è verificata $\exists c[\mathrm{A}(c)] \wedge \exists c[\mathrm{B}(c)]$, anche la formula $\exists c[\mathrm{A}(c) \wedge \mathrm{B}(c)]$ è verificata.

risposta è *no*: l'esistenza di un elemento c per cui è $P(c)$ e di un elemento c per cui è $\neg P(c)$ non implica che tali c siano lo stesso elemento (a meno che a x non sia imposto di variare in un dominio costituito da un solo elemento).[7] A tale conclusione si perviene anche ricordando il significato del quantificatore universale ed osservando che $\exists c[\neg P(c)]$ equivale a $\neg\forall c[P(c)]$, non a $\neg\exists c[P(c)]$.

Un semplice esempio potrà essere didatticamente efficace: sia x variabile nei numeri interi positivi e $P(x)$ significhi *x è un numero pari*. In questo caso la formula data $\exists c[P(c)] \wedge \exists c[\neg P(c)]$ significa *esiste (almeno) un intero positivo pari ed esiste (almeno) un intero positivo dispari*, affermazione vera (utilizzeremo anche questo esempio nella ricerca didattica esposta nel presente lavoro). Si osservi che l'applicazione della *scorretta doppia istanziazione* nel caso dei teoremi di Lagrange e di Cauchy aveva portato, seppure in modo non accettabile, ad un risultato corretto (la tesi del teorema di Cauchy). Quest'ultimo esempio sarebbe invece da riferire ad una conclusione errata: se da $\exists c[P(c)] \wedge \exists c[\neg P(c)]$ facessimo derivare $\exists c[P(c)\wedge\neg P(c)]$ e quindi, istanziando per un qualche a, $P(a)\wedge[\neg P(a)]$, dovremmo infatti ottenere un enunciato falso: abbiamo invece sopra visto che, nel caso in cui $P(x)$ si interpreti nei numeri interi positivi *x è un intero positivo pari*, $\exists c[P(c)] \wedge \exists c[\neg P(c)]$ è vera.

Nella pratica didattica possiamo incontrare altri casi di *scorretta doppia istanziazione*. Cambiamo ora interpretazione, considerandone una sui numeri reali: ad esempio, gli allievi sanno che, per qualsiasi funzione f di variabile reale, $[f(x)]^2$ assume, in corrispondenza ad ogni x del dominio di f, valori non negativi; dunque affinché l'equazione:

$$[f(x)]^2+[g(x)]^2 = 0$$

abbia soluzioni reali è necessario che entrambe le equazioni $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$ abbiano soluzioni reali. Ma ciò *non è sufficiente*; l'implicazione seguente è generalmente errata:

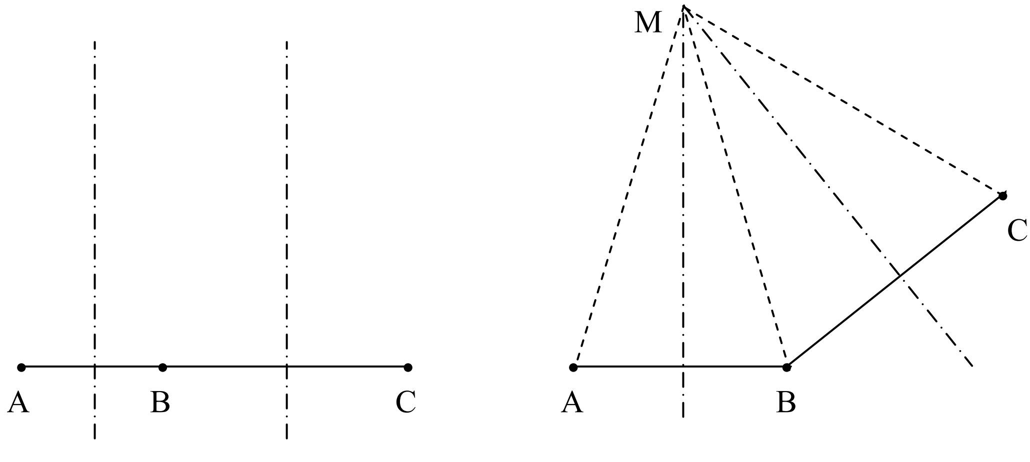
$$\exists x\in\mathbf{R}\ (f(x) = 0) \wedge \exists x\in\mathbf{R}\ (f(x) = 0) \quad\rightarrow\quad \exists x\in\mathbf{R}\ ([f(x)]^2+[g(x)]^2 = 0)$$

in quanto se esiste x tale che $f(x) = 0$ ed esiste x tale che $g(x) = 0$ non possiamo concludere che esiste uno stesso reale x tale che $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$ e dunque $[f(x)]^2+[g(x)]^2 = 0$.

Didatticamente interessante può essere un ulteriore esempio tratto dalla geometria elementare: è noto che per ogni coppia di punti (distinti) P, Q del piano esistono punti del piano equidistanti da essi (tutti e soli i punti dell'asse di PQ). Se consideriamo i tre punti (distinti) A, B, C potremmo essere tentati di scrivere, pensando al procedimento di costruzione del circocentro di un triangolo:

$$\forall A\ \forall B\ \exists M\ (AM=BM) \wedge \forall B\ \forall C\ \exists M\ (BM=CM) \quad\rightarrow\quad \forall A\ \forall B\ \forall C\ \exists M\ (AM=BM=CM)$$

Chiaramente ciò non è accettabile: se (e solo se) i punti A, B, C sono allineati, gli assi di AB e di BC sono paralleli e l'implicazione non è valida.



[7] La prima impressione della falsità della formula può essere proprio corroborata dal fatto che $\exists c[P(c)] \wedge \exists d[\neg P(d)]$ è falsa nell'interpretazione in un dominio con un solo elemento.

2.3. Logica e simboli nella didattica della matematica

Pur evitando, in questa sede, di esaminare a fondo l'argomento, notiamo che la questione di una significativa presenza della logica nei curricoli della Scuola secondaria superiore è ampia e dibattuta.[8] Per quanto riguarda i programmi,

> "la logica compare nei nuovi programmi di matematica a due livelli: come logica matematica e come logica nella matematica o per la matematica" (Paola, 1997, p. 149).[9]
>
> Dal punto di vista didattico, C. Bernardi nota che
>
> "la logica non può essere considerata come il primo o l'ultimo capitolo di un corso di matematica" (Bernardi, 1989, pp. 381-382)

e che i quantificatori sono essenziali in ogni corso di logica; spesso sono introdotti solo presentando i simboli $\exists$ e $\forall$ (D. Paola collega tale presentazione ad equazioni e disequazioni: Paola, 1997, p. 151; D. Palladino ne suggerisce l'introduzione ad allievi di 15-16 anni e nota che la logica dei predicati "è troppo astratta per poter essere sviluppata a livello di scuola secondaria e quindi bisogna far appello all'intuizione": Palladino, 1997, p. 26); a volte gli allievi non comprendono i collegamenti tra i quantificatori e ciò può dipendere dalle caratteristiche dell'insegnamento. Lacune di questo genere possono tradursi in ostacoli di non trascurabile importanza.[10]

3. METODOLOGIA

3.1. Un questionario in classe

Nella presente ricerca ci riferiremo alla *scorretta doppia istanziazione* e cercheremo innanzitutto di valutare la diffusione del problema in un campione di allievi (non rappresentativo di una popolazione ampia, dunque da considerarsi alla stregua di un *case study*). Per precisare la situazione ci poniamo alcune questioni (Bagni, forthcoming-b); osserviamo innanzitutto che il fenomeno può fare riferimento ad una proprietà particolare, esplicitamente indicata, oppure ad una proprietà qualsiasi (espressa da un generico predicato P):

Questione 1. Il riferimento a proposizioni generali o ad esempi particolari e tecnicamente più o meno impegnativi influenza la frequenza di *scorretta doppia istanziazione* da parte degli allievi?

Questione 2. La considerazione di un caso tecnicamente molto semplice in qualità di controesempio induce negli allievi una riflessione critica sulla *scorretta doppia istanziazione*?

Inoltre: qual è il ruolo del livello di formalizzazione (la questione è trattata, con riferimento alle dimostrazioni, in: Bernardi, 1998)? La proposizione considerata può essere espressa in registri simbolici o in registri verbali, nel linguaggio naturale[11]. Può essere plausibile un'influenza di un

---

[8] La bibliografia a riguardo è vasta; senza alcuna pretesa di completezza segnaliamo (con riferimento ai vari livelli della scuola italiana): Bernardi, 1987, 1989, 1990, 1991, 1993, 1994 e 1998; Bernardi & Tazza, 1990; Dapueto & Ferrari, 1988; Dapueto, 1989; Bonotto & Zanardo, 1990; Casarsa, 1991; D'Amore, 1991; D'Amore & Plazzi, 1992; Ferro, 1993; Marchini, 1989a, 1989b, 1990, 1993, 1994 e 1995; Ciarrapico & Mundici, 1996; Mundici, 1997; Palladino, 1997; Paola, 1997; Bonotto & Ferronato, 2003; il numero 11-12 del volume 16 de *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate* è interamente dedicato alla logica. Per quanto riguarda la comprensione di testi e la formalizzazione del linguaggio indichiamo: Ferrari, 1988; Speranza, 1989 e 1993; Furinghetti, 1991; Furinghetti & Paola, 1991; Grugnetti, 1992.

[9] Si veda: Ministero della Pubblica Istruzione 1992a, 1992B, 1996. Per una visione argomentata della situazione in Italia ed all'estero indichiamo: Bonotto & Ferronato, 2003: "Nonostante i cambiamenti avvenuti nei curricula nazionali, l'insegnamento della Logica [in Italia] non riesce ad avere il rilievo che merita. Essa compare infatti raramente tra gli argomenti effettivamente studiati in classe ed anche a livello universitario sono pochi i corsi che vengono dedicati allo studio di questa disciplina [...] In molti paesi europei i programmi [...] sono stati rinnovati, senza che questa disciplina riesca ad avere una sua ben precisa collocazione all'interno dell'insegnamento" (Bonotto & Ferronato, 2003).

[10] Si pensi alla questione della negazione dei quantificatori (Villani, 1994).

[11] Per quanto riguarda i registri rappresentativi, non è possibile parlare di un *singolo* registro rappresentativo in termini assoluti: esistono diversi registri rappresentativi, ad esempio verbali, ma anche simbolici, con riferimento a diverse

registro rappresentativo utilizzato sulle difficoltà incontrate dagli allievi (considerata la possibile carenza di coordinazione dei registri rappresentativi utilizzati: Duval, 1993 e 1995; D'Amore, 2001a e 2001b; Bagni, 2001):

Questione 3. Per quanto riguarda il ruolo della formalizzazione simbolica, quali fra i registri simbolici e verbali si ricollegano ad una maggiore frequenza di *scorretta doppia istanziazione* da parte degli allievi?

La nostra ricerca didattica consisterà nella successiva somministrazione di tre test:

- *Schede A.* Sarà proposta l'erronea "dimostrazione" del teorema di Cauchy ottenuta applicando due volte il teorema di Lagrange, come nell'esempio illustrato in precedenza. Tale scheda sarà preparata in due diverse versioni (ciascuna delle quali fornita ad uno dei due gruppi di allievi, 1, 2, che saranno ottenuti dividendo a caso il campione): nella prima (A-1), non verrà utilizzato il simbolo "∃" (sarà sostituito da una corrispondente espressione del linguaggio naturale), nella seconda (A-2) tale simbolo sarà utilizzato.
- *Schede B.* Per evidenziare un'eventuale influenza dell'ambito nel quale il primo esempio è stato espresso (alcuni allievi potrebbero trovare l'esempio tecnicamente impegnativo), sarà proposto un caso di *scorretta doppia istanziazione* riferito ad una situazione aritmetica elementare. Anche questa scheda sarà preparata in due versioni (ciascuna fornita al corrispondente gruppo 1 o 2 di allievi precedentemente ottenuti dividendo il campione): nella prima (B-1) non sarà utilizzato "∃", nella seconda (B-2) tale simbolo sarà utilizzato.
- *Schede C.* Sarà infine proposta una *scorretta doppia istanziazione* riferita ad una proprietà "qualsiasi", indicando i predicati coinvolti solo con A(x), B(x), ma senza precisarne il significato. Anche questa scheda sarà fornita in due versioni (ciascuna fornita al corrispondente gruppo 1 o 2 di allievi precedentemente individuati): nella prima (C-1) non sarà utilizzato "∃", nella seconda (C-2) tale simbolo sarà utilizzato.

Riassumiamo il ruolo delle schede che impiegheremo nello schema seguente:

	Registro verbale	*Registro simbolico* (uso di "∃")
Proprietà particolare	Scheda A-1 (Cauchy-Lagrange)	Scheda A-2 (Cauchy-Lagrange)
Proprietà particolare	Scheda B-1 (numeri pari e dispari)	Scheda B-2 (numeri pari e dispari)
Proprietà "qualsiasi"	Scheda C-1 (predicati generali)	Scheda C-2 (predicati generali)

Abbiamo esaminato 48 allievi di 18-19 anni (frequentanti la quinta classe di un *Liceo scientifico* di Treviso) che avevano trattato i primi elementi dell'analisi matematica; in particolare, avevano trattato le funzioni reali continue e derivabili, il teorema di Cauchy (con dimostrazione) e il teorema di Lagrange (con dimostrazione: entrambe tali dimostrazioni erano state condotte applicando il noto teorema di Rolle); gli allievi conoscevano i simboli "∃" e "∀". Il campione è stato suddiviso a caso in due gruppi (1 e 2) di 24 allievi. A ciascun allievo del primo gruppo (1) abbiamo fornito la scheda:

Scheda A-1

Ricorda il teorema di Cauchy e il teorema di Lagrange:

istituzioni culturali o a diversi usi. Inoltre ogni registro rappresentativo è implicitamente o esplicitamente collegato agli altri (Bagni, forthcoming-a).

Cauchy Ip. $\begin{cases} f \textit{ continua in } [a;b] \\ f \textit{ derivabile in }]a;b[\\ g \textit{ continua in } [a;b] \\ g \textit{ derivabile in }]a;b[\\ \textit{per ogni } x \in]a;b[, g'(x) \neq 0 \end{cases}$ Tesi: esiste (almeno un) $c\in]a; b[$ tale che $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Lagrange Ip. $\begin{cases} \varphi \textit{ continua in } [a;b] \\ \varphi \textit{ derivabile in }]a;b[\end{cases}$ Tesi: esiste (almeno un) $c\in]a; b[$ tale che $\varphi'(c) = \frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{b-a}$

Si osservi che se le ipotesi del teorema di Cauchy sono rispettate (con riferimento alle funzioni *f*, *g*), tali sono anche ipotesi del teorema di Lagrange, sia dalla funzione *f* che dalla *g*; potremo quindi applicare il teorema ad entrambe le *f*, *g* e scrivere:

esiste (almeno un) $c\in]a; b[$ tale che $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

esiste (almeno un) $c\in]a; b[$ tale che $g'(c) = \frac{g(b)-g(a)}{b-a}$

da cui, dividendo membro a membro (cosa resa possibile dall'ultima delle ipotesi del teorema di Cauchy), otteniamo:

esiste (almeno un) $c\in]a; b[$ tale che $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Questa è la tesi del teorema di Cauchy, che risulta così dimostrato.
La dimostrazione precedente è corretta? Giustifica la tua risposta.

A ciascun allievo del secondo gruppo (2) abbiamo fornito la scheda A-2, ottenuta sostituendo nella precedente scheda A-1 la scrittura "esiste (almeno un) $c\in]a; b[$" con "$\exists c\in]a; b[$" e la scrittura "per ogni $x\in]a; b[$" con "$\forall x\in]a; b[$".[12] Tempo concesso: 10 minuti.

	Gruppo 1 (scheda A-1)		*Gruppo 2 (scheda A-2)*	
dimostrazione corretta	12 allievi	50%	10 allievi	42%
dimostrazione non corretta	5 allievi	21%	3 allievi	12%
nessuna risposta	7 allievi	29%	11 allievi	46%

Alcune giustificazioni fornite dagli allievi sono interessanti. In particolare, abbiamo verificato le motivazioni degli 8 allievi (5 del gruppo 1 e 3 del gruppo 2) che hanno considerato non corretta la "dimostrazione" presentata. Solo un allievo (gruppo 1) ha però indicato una giustificazione corretta:

"Possono esserci più *c* per cui vale Lagrange per le due funzioni e bisognerebbe che questi *c* siano gli stessi nei due casi".

(In effetti non è necessario richiedere che *tutti* i punti individuati dall'applicazione del teorema di Lagrange nel primo caso coincidano con *tutti* i punti individuati nel secondo: ma riteniamo che l'allievo abbia ugualmente colto lo spirito della questione). Alcuni allievi forniscono motivazioni errate, in alcuni casi (4 su 8 che hanno dichiarato di non accettare la "dimostrazione" proposta) collegate al fatto che, nel corso frequentato, il teorema di Cauchy era stato presentato prima del teorema di Lagrange: la dimostrazione del teorema di Lagrange non era però basata su quella del teorema di Cauchy (come accennato, entrambe erano state ottenute applicando il teorema di Rolle), dunque la giustificazione non è accettabile. Altri allievi non hanno dato alcuna spiegazione.

[12] Si noti che la variabile utilizzata non è sempre la stessa: la stessa tradizione scolastica (ad esempio italiana) tende a privilegiare alcune variabili (c, x, x_0 etc.) rispetto ad altre e ciò pone il problema di valutare la presenza di eventuali convenzioni implicite. Ad esempio, nei casi ora presentati si adopera spesso la variabile c in presenza di una quantificazione esistenziale e x con una quantificazione universale.

Agli stessi allievi del primo gruppo (1) abbiamo quindi fornito la scheda seguente:

Scheda B-1

Sia x un numero intero positivo. Considera la proposizione:

Esiste (almeno un) x pari ed esiste (almeno un) x non pari

Tale proposizione è vera o falsa? Giustifica la tua risposta.

A ciascun allievo del secondo gruppo (2) abbiamo fornito la scheda seguente:

Scheda B-2

Sia x un numero intero positivo e sia P un predicato tale che P(x) significhi *x è un numero pari*. Considera la formula logica:

$[\exists x P(x)] \wedge \{\exists x [\neg P(x)]\}$

Essa è vera o falsa? Giustifica la tua risposta.

Tempo concesso: 10 minuti.[13]

	Gruppo 1 (scheda B-1)		*Gruppo 2 (scheda B-2)*	
vera	23 allievi	96%	17 allievi	71%
falsa	0 allievi	0%	6 allievi	25%
nessuna risposta	1 allievo	4%	1 allievo	4%

Alcune giustificazioni sono significative: in particolare, molti allievi del gruppo 2 che hanno ritenuto falsa la scrittura $[\exists x P(x)] \wedge \{\exists x [\neg P(x)]\}$ hanno dato giustificazioni collegate alla presenza della congiunzione di $\exists x P(x)$ e di $\exists x [\neg P(x)]$ mostrando di confondere quest'ultima scrittura con $\neg \exists x P(x)$.

Agli stessi allievi del primo gruppo (1) abbiamo fornito la scheda seguente:

Scheda C-1

Considera la proposizione seguente:

se esiste (almeno un) x tale che sia A(x) ed esiste (almeno un) x tale che sia B(x),
allora esiste (almeno un) x tale che risulti A(x) e B(x)

Essa è vera o falsa? Giustifica la tua risposta.

A ciascun allievo del secondo gruppo (2) abbiamo infine fornito la scheda seguente:

Scheda C-2

Considera la proposizione seguente:

se: $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$, allora: $\exists x [A(x) \wedge B(x)]$

Essa è vera o falsa? Giustifica la tua risposta.

Tempo concesso: 10 minuti.[14]

	Gruppo 1 (scheda C-1)	*Gruppo 2 (scheda C-2)*

[13] Si noti che nelle schede B-1 e B-2 l'interpretazione sui numeri interi positivi viene data per implicita. È importante sottolineare una differenza: formalmente, le schede A fanno riferimento alla correttezza di una dimostrazione, mentre le schede B riguardano la verità di una formula.

[14] Ovviamente la risposta a quanto chiesto nelle scheda C dovrebbe tenere conto della particolare interpretazione: come sopra osservato, in un'opportuna interpretazione (in un dominio su un unico elemento) si potrebbe rispondere che la formula è vera, in altre è falsa.

vera	16 allievi	67%	21 allievi	88%
falsa	5 allievi	21%	1 allievo	4%
nessuna risposta	3 allievi	12%	2 allievi	8%

L'elevata percentuale di risposte errate, la cui gravità aumenta nel caso del gruppo 2, indica che la situazione è ancora di difficile comprensione per gli allievi. Nel caso dell'uso di registri simbolici (scheda C-2) le giustificazioni fornite dagli allievi confermano che l'apprendimento è debole: molti richiamano la definizione di "$\wedge$" e il solo allievo che correttamente dichiara falsa la proposizione proposta non fornisce giustificazioni. Leggermente meno gravi sono i dati collegati alla scrittura non formalizzata (scheda C-1); soltanto un allievo (lo stesso che aveva correttamente inquadrato il problema nel caso dei teoremi di Cauchy e di Lagrange) fornisce una motivazione sostanzialmente corretta ("Per A e per B gli *x* devono essere gli stessi").

3.2. Analisi dei risultati

Visualizziamo nello schema seguente alcune caratteristiche dei risultati sopra riportati:

A)	*esempio analitico*	risposte esatte (globalmente):		**17%** (*)
	(contenuti matematici più elevati)		registro verbale (1):	21%
			registro simbolico (2):	12%
B)	*esempio aritmetico*	risposte esatte (globalmente):		**83%**
	(contenuti matematici elementari)		registro verbale (1):	96%
			registro simbolico (2):	71%
C)	*caso generale*	risposte esatte (globalmente):		**12%**
			registro verbale (1):	21%
			registro simbolico (2):	4%

(*) *Ricordiamo però che solo una tra le 8 risposte esatte era correttamente giustificata.*

Dunque soltanto l'esempio aritmetico è stato correttamente gestito dalla maggioranza degli allievi: il fatto che la ripresa di un caso generale *dopo* la considerazione dell'esempio aritmetico (che avrebbe potuto servire per alcuni allievi da controesempio, stimolando una riflessione) non abbia dato risultati soddisfacenti ci induce a pensare che molti abbiano tratto le proprie conclusioni a proposito dell'esempio aritmetico solo sulla base della consolidata conoscenza delle proprietà elementari dei numeri interi, non facendo riferimento alla struttura logica della proposizione.

Per quanto riguarda i registri, all'uso di registri simbolici sembrano essere collegati ostacoli leggermente più rilevanti; comunque la differenza tra i risultati dei gruppi 1 e 2 è piuttosto esigua.

Come notato, la ricerca presentata è stata finora condotta considerando un campione non molto ampio e non selezionato sulla base di specifici criteri di campionamento; inoltre le giustificazioni fornite dagli allievi sono state rilevate sulla base di dichiarazioni scritte e non confermate mediante interviste sistematiche. Per approfondire la conoscenza del fenomeno ci è sembrato interessante seguire più dettagliatamente un singolo caso, al quale proporre alcune delle schede sopra utilizzate (A-2, B-2, C-2, dunque in cui sono in parte impiegati registri simbolici, ed infine C-1, in cui sono in parte impiegati registri verbali).

3.3. Lo studio di un caso

Riportiamo la trascrizione di una breve esperienza che ha visto coinvolti un insegnante (*Ins.*) e un allievo (*Corrado*) frequentante il primo anno del corso di laurea in Scienze Biologiche; l'allievo (19 anni, curriculum regolare presso un Liceo scientifico italiano ad indirizzo tradizionale) stava seguendo le lezioni del corso di Calcolo e Biostatistica, comprendente elementi di analisi (limiti, derivate e integrali; al momento dell'esperienza erano già stati trattati i teoremi di Cauchy e di Lagrange e le loro dimostrazioni), di geometria e di statistica.

L'insegnante sottopone all'allievo un foglio sul quale è riportata la scheda A-2.

Corrado (dopo aver riflettuto per quasi due minuti): Mi sembra che vada bene.
Ins.: Sei sicuro?
Corrado: Direi di sì. Questa dimostrazione è diversa da quella che abbiamo fatto a lezione, ma anche questa va bene.
Ins.: Controlla con maggiore attenzione. Potrebbe esserci qualcosa che non va.
Corrado: Forse c'è qualche trucco nel modo in cui sono scritte le ipotesi *(sorride)*: a me pare di ricordarmele così, ma potrebbe sfuggirmi qualcosa.
Ins.: Non preoccuparti: nessun trucco, le ipotesi sono scritte bene.
Corrado (dopo circa un minuto): Forse nell'ultima ipotesi del teorema di Cauchy c'è qualcosa che non va.
Ins.: Qualcosa che non va? In che senso?
Corrado: Non compare tra quelle di Lagrange. Se mettiamo insieme le ipotesi dei due teoremi di Lagrange manca ancora quell'ipotesi per avere quelle di Cauchy.
Ins.: E allora?
Corrado: Non so, forse l'ultima ipotesi non serve.
Ins.: Ad esempio quell'ipotesi ti consente di fare la divisione senza rischiare di avere a che fare con un denominatore nullo.
Corrado: È vero, ma potrebbe essere troppo chiedere che la derivata non si annulli proprio mai.
Ins.: Non sarebbe comunque questo un motivo sufficiente per rifiutare la dimostrazione. In ogni caso, anche se tu imponessi un'ipotesi in più, quella tua dimostrazione potrebbe essere ugualmente considerata valida: il teorema di Lagrange vale anche se la derivata non si annulla mai. Se la rifiuti ci deve essere qualche altro motivo.
Corrado: Allora no, non saprei. Non vedo altro.

Dunque Corrado ha rilevato la presenza dell'ultima ipotesi del teorema di Cauchy ($\forall x \in]a; b[, g'(x) \neq 0$), ipotesi non presente tra quelle del teorema di Lagrange: egli sembra insomma "accostare" le due scritture dell'ipotesi del teorema di Lagrange per formare quella del teorema di Cauchy: un'analisi di questo comportamento, che sembra considerare la stessa impostazione grafica della scrittura delle ipotesi dei teoremi coinvolti potrà essere oggetto di ulteriori ricerche.

Ins.: Considera quest'altra scheda. Pensaci e rispondi.

L'insegnante ritira il foglio con la scheda A-2 e sottopone all'allievo un foglio sul quale è riportata la scheda B-2.[15]

Corrado (dopo una decina di secondi): Qui dice che esiste un numero pari ed esiste un numero che non è pari.
Ins.: E allora?
Corrado: È vera. Ci sono i numeri pari e i numeri dispari: va bene.
Ins.: Adesso considera questa nuova scheda.

L'insegnante ritira il foglio con la scheda B-2 e sottopone all'allievo un foglio sul quale è riportata la scheda C-2.

Corrado: Dunque, esiste x per cui A(x), esiste x per cui B(x) *(pausa)*, sì, dovrebbe essere vera.
Ins.: Convinto?
Corrado (deciso): Sì, la et vuol dire "contemporaneamente": qui c'è A(x), c'è B(x), dunque A(x) et B(x) va bene.
Ins.: Considera ancora questa scheda.

L'insegnante ritira il foglio con la scheda C-2 e sottopone all'allievo un foglio sul quale è riportata la scheda C-1.

Corrado: È la stessa cosa. È come quella di prima.
Ins.: Sì. Ma pensaci ancora un po'.

[15] Il dialogo con Corrado nella prima parte si svolge a livello sintattico (teorema, ipotesi, dimostrazione). La seconda parte dell'intervista si svolge, seguendo le schede, a livello semantico.

Corrado (leggendo lentamente): se esiste almeno un x tale che sia A(x) ed esiste almeno un x tale che sia B(x), allora esiste almeno un x tale che risulti A(x) e B(x) *(fissa il foglio per quasi un minuto senza parlare)*.

Ins.: Vera o falsa?

Corrado: Sì, direi vera.

Ins.: Quali sono le x per cui valgono A(x) e B(x)?

Corrado: Non posso dirlo così, dipende da che cosa sono A e B *(Riflette ancora per circa venti secondi)*. Però mi viene un dubbio, non è detto che le x siano sempre quelle.

Ins.: Spiegati meglio.

Corrado: La A vale almeno per una x *(accentua le parole "almeno per una x")*; anche la B vale almeno per una x, ma potrebbe non essere la stessa di prima: ad esempio A potrebbe valere solo per una x e anche B solo per una x, ma diversa da quella di prima. Allora non sarebbe più vero che per una qualche x A e B valgono tutt'e due.

Seppure a fronte di alcuni stimoli e indicazioni da parte dell'insegnante (in particolare decisiva sembra essere la domanda: "Quali sono le x per cui valgono A(x) e B(x)?"), Corrado ha inquadrato correttamente il problema. Quanto riportato non è forse sufficiente per affermare con certezza che il passaggio da un registro simbolico ad uno verbale, ovvero all'uso del linguaggio naturale, è decisivo per determinare un'esatta valutazione della situazione; ma ci sembra abbastanza indicativo che lo studente giunga alla comprensione dopo la considerazione della proposizione in questione espressa nel registro verbale e dopo aver riflettuto sugli aspetti linguistici di tale espressione (ad esempio sulle parole "almeno per una x").

4. CONCLUSIONI (E QUALCHE CITAZIONE)

I risultati dei test e l'analisi del caso illustrato nel paragrafo precedente sembrano suggerire alcune risposte alle domande indicate all'inizio del presente lavoro.

I risultati relativi alle schede A indicano una prima conclusione:

Risposta 1. La considerazione di un esempio particolare (tecnicamente non del tutto semplice) può ostacolare l'allievo nella corretta comprensione della struttura logica dell'argomentazione proposta.

La plausibilità di ciò non deve trarci in inganno: sarebbe azzardato associare alla difficoltà tecnica dell'esempio un'influenza assolutamente decisiva sul comportamento degli allievi; anche dopo avere proposto le schede B, i risultati relativi alle schede C sono stati deludenti:

Risposta 2. Neppure la considerazione di un caso tecnicamente molto semplice ha stimolato un'efficace riflessione critica a proposito della *scorretta doppia istanziazione*.

Naturalmente con ciò non neghiamo l'importanza didattica e l'utilità dei controesempi: ma l'efficacia del loro impiego non è scontata; appare necessario l'intervento dell'insegnante per realizzare l'istituzionalizzazione di quanto il controesempio può suggerire[16].

Per quanto riguarda il ruolo della formalizzazione e gli ostacoli ad essa connessi, il confronto tra i risultati del gruppo 1 e del 2 induce a concludere:

Risposta 3. Un registro simbolico ostacola più di un registro verbale. L'uso di uno stesso simbolo appare più vincolante rispetto all'indicazione di uno stesso elemento espressa nel linguaggio naturale.

Anche quest'ultima conclusione appare certamente plausibile, ma non è banale: gli allievi sanno bene che la scrittura "$\exists x$" significa "esiste (almeno un) x", ma la comprensione di tale significato finisce per essere, nel caso della notazione simbolica, meno incisiva: il linguaggio naturale sembra evocare in modo più efficace conoscenze ed esperienze, colpisce più direttamente l'allievo.

[16] Vasta è la bibliografia sulla fase di istituzionalizzazione: un primo riferimento è a: Brousseau, 1986, per la teoria delle situazioni; ma anche a: Perrin-Glorian, 1994 e 1997.

Naturalmente bisogna considerare anche la familiarità con entrambi i registri: l'impiego di una scrittura simbolica (in logica, in algebra etc.) può essere inizialmente fonte di ostacoli; è noto che la corretta formalizzazione degli enunciati usualmente espressi nel linguaggio naturale può essere difficoltosa per non pochi allievi. La valenza didattica del passaggio dall'espressione nel linguaggio naturale a quella simbolica va ricercata in una maggiore chiarezza (nel linguaggio naturale i quantificatori sono spesso sottintesi o confusi) e nella possibilità di affrontare situazioni che non sarebbe possibile dominare con il linguaggio usuale (un sommario della letteratura sull'argomento è in: Bazzini & Iaderosa, 2000).

Il registro simbolico è dunque più complesso proprio perché è più semplice e non si può avvalere in pieno dei significati di quello verbale. Ad esempio Corrado, pur male interpretando, ma con un anno in più dei ragazzi coinvolti nell'esperimento, è in grado di utilizzare l'avverbio "contemporaneamente" alla lettura del connettivo di congiunzione.[17]

Osserviamo che le differenze tra i risultati dei test relativamente ai gruppi 1 e 2, pur presenti, non sono elevate; tuttavia la conclusione sopra riportata può però essere confermata anche da alcuni passi del caso considerato nel paragrafo precedente. Ulteriori ricerche potranno essere dedicate a chiarire l'incidenza del diverso uso dei vari registri nell'apprendimento dei quantificatori.

Ribadiamo la necessità di un'adeguata attenzione nei confronti della logica nei curricoli della scuola secondaria superiore[18]: limitare l'introduzione di argomenti importanti ad una semplice questione di simbologia (Bernardi, 1989, p. 381) può essere causa di incertezze che si traducono in gravi ostacoli per gli allievi, soprattutto in caso di carente coordinazione dei registri rappresentativi. La presenza della logica nei curricoli non deve certamente restare isolata, confinata in un capitolo (Bonotto & Ferronato, 2003), ma è necessario che allievi e insegnanti siano consapevoli che una corretta conoscenza delle istituzioni della logica può influenzare in termini essenziali ogni fase dell'apprendimento e del "fare matematica". La ricerca in didattica della matematica ha il compito di sottolineare con forza il problema, di proporre sperimentazioni significative e stimolanti, di indicare dunque le soluzioni, sia in ambito curricolare che con riferimento alla formazione degli insegnanti (Ciarrapico & Mundici, 1996; AA.VV., 1997).

Gli allievi, dunque, devono poter apprendere con chiarezza ruoli e proprietà dei connettivi e dei simboli impiegati per la loro espressione. Ulteriori ricerche potranno inoltre chiarire, ben più in generale, quale sia l'effettiva importanza della formalizzazione strettamente logica nella didattica della matematica: ricordiamo che la questione dell'espressione logicamente rigorosa[19] affiancata ad un'espressione semanticamente fondata, ad esempio nelle dimostrazioni: W. P. Thurston (1994) si pone una domanda semplice ma dalle implicazioni vastissime:

> "Come i matematici dimostrano i teoremi?" (Thurston, 1994, p. 161; le traduzioni sono nostre)

e finisce con il sottolineare "le grandi differenze tra come pensiamo e come scriviamo la matematica" (Thurston, 1994, p. 167). Naturalmente la didattica della matematica non può ignorare queste grandi differenze:

> "le dimostrazioni umanamente comprensibili ed umanamente verificabili che attualmente facciamo sono le cose più importanti per noi, e (...) sono del tutto diverse dalle dimostrazioni formali" (Thurston, 1994, p. 169).

Ancora una volta è chiaro come sia pericoloso forzare gli allievi ad usare simboli, in particolare simboli logici, senza la piena, condivisa comprensione dei loro significati. L. Radford osserva:

---

[17] Ovviamente tutto da affrontare è il problema dei rapporti tra semantica e sintassi e di come il mancato chiarimento di essi interferisca.

[18] Così C. Bonotto e F. Ferronato sintetizzano le problematiche emerse: "Un generale bisogno formativo dei docenti [...]; difficoltà nella trasposizione didattica di una materia priva di una tradizione di insegnamento; la carenza di indicazioni ministeriali che aiutino nel lavoro di trasposizione didattica; lo scarso aiuto offerto dai libri di testo" (Bonotto & Ferronato, 2003).

[19] La questione del rigore è delicata: essa dovrebbe essere sempre riferita alle istituzioni culturali e dunque implica considerazioni legate alla storia ed alla geografia della matematica.

"Il pensiero matematico può essere antropologicamente concepito come espressione semiotica della razionalità della cultura nella quale l'attività matematica si manifesta" (Radford, 2003).[20]

Dunque è fondamentale collegare simboli e linguaggio con una più ampia dimensione socio-culturale e con la vita dei singoli soggetti: una comprensione insufficiente di tale connessione può essere causa di ostacoli alla comprensione dei significati dei simboli.

Appendice. Un esempio per ulteriori ricerche

L'esempio di *scorretta doppia istanziazione* riferito ai teoremi di Lagrange e di Cauchy, più volte precedentemente esaminato, suggerisce alcune possibilità didattiche: una variazione di contesto (ad esempio la considerazione di un ambito fisico) ed una variazione di registri rappresentativi possono infatti essere utili per il superamento dell'errore.

Consideriamo un'interpretazione cinematica: siano t il tempo, $s_P(t)$ e $s_Q(t)$ gli spazi percorsi dai due punti materiali P, Q all'istante t, riferiti ad uno stesso sistema di ascisse; in tale caso, le derivate $s'_P(t)$ e $s'_Q(t)$ sono le velocità di tali punti materiali all'istante t. Siano rispettate le ipotesi del teorema di Cauchy; esso afferma che il rapporto tra gli spazi percorsi da P e da Q nell'intervallo $[a; b]$ è uguale al rapporto delle velocità di A e di B in (almeno) uno stesso istante τ tale che $a < \tau < b$.

Facciamo però inizialmente riferimento al teorema di Lagrange: esso afferma che, sia nel (primo) caso del punto A che nel (secondo) caso del punto B, esiste (almeno) un istante κ, $a < \kappa < b$ in cui la velocità $s'(\kappa)$ è uguale alla velocità media calcolata nel tratto $[a; b]$. Tale valutazione va ripetuta *due volte*, una per ciascun punto materiale, e in generale porta a diversi valori di κ (che possiamo indicare, per chiarezza, κ_P e κ_Q).

Ad esempio, consideriamo l'intervallo di tempo [0; 1] e le seguenti leggi di moto:

$$s_P(t) = t^2+t \qquad\qquad s_Q(t) = t^3+2t$$

La verifica delle ipotesi del teorema di Cauchy è immediata. Le velocità sono rispettivamente:

$$s_P'(t) = 2t+1 \qquad\qquad s_Q'(t) = 3t^2+2$$

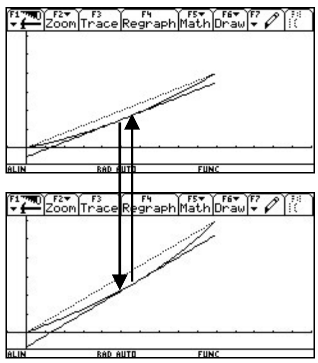
Verifichiamo il teorema di Lagrange con riferimento alla funzione s_P:

$$2\kappa_P + 1 = s_P'(\kappa_P) = \frac{s_P(b) - s_P(a)}{b-a} = \frac{1^2+1}{1} = 2 \quad \text{da cui:} \quad \kappa_P = \frac{1}{2} \quad (\kappa_P \text{ in }]0; 1[)$$

Verifichiamo il teorema di Lagrange con riferimento alla funzione s_Q:

$$3\kappa_Q^{\ 2} + 2 = s_Q'(\kappa_Q) = \frac{s_Q(b) - s_Q(a)}{b-a} = \frac{1^3+2\cdot 1}{1} = 3 \quad \text{da cui:} \quad \kappa_Q = \sqrt{\frac{1}{3}} > \frac{1}{2} \quad (\kappa_Q \text{ in }]0; 1[)$$

Già queste due prime verifiche (che portano ai due valori $\kappa_P \neq \kappa_Q$) rendono praticamente improponibile una successiva considerazione del teorema di Cauchy (infatti a quale "unico valore" τ dovremmo fare riferimento?).



Il registro rappresentativo visuale può essere molto utile per proporre una immediata verifica della situazione. I grafici delle due funzioni coinvolte possono essere facilmente ottenuti (anche mediante l'impiego di un software didattico) e ciò rende possibile un confronto diretto dei due punti la cui esistenza è prevista dal teorema di Lagrange.

Se invece verifichiamo il teorema di Cauchy con riferimento alle funzioni s_P e s_Q otteniamo:

---

[20] Radford sottolinea inoltre che non è possibile trattare il problema della rappresentazione delle conoscenze senza considerare una dimensione ontologica (Radford, 2002, p. 237).

$$\frac{2\tau+1}{3\tau^2+2}=\frac{s_P'(\tau)}{s_Q'(\tau)}=\frac{s_P(b)-s_P(a)}{s_Q(b)-s_Q(a)}=\frac{1^2+1}{1^3+2\cdot 1}=\frac{2}{3}\quad \text{da cui:}\quad \tau=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{6}\quad \text{oppure}\quad \tau=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}$$

entrambi accettabili in quanto inclusi nell'intervallo]0; 1[, peraltro (entrambi) diversi da κ_P, κ_Q.

Può essere utile far rilevare all'allievo che in qualche caso particolare κ_P, κ_Q e τ possono coincidere. Ad esempio, si può proporre l'esame in [0; 1] delle due funzioni di secondo grado: $s_P(t) = t^2+t$ e $s_Q(t) = 2t^2+3t$. Si ricava direttamente che $\kappa_P = \kappa_Q = 1/2$, e, verificando il teorema di Cauchy:

$$\frac{2\tau+1}{4\tau+3}=\frac{s_P'(\tau)}{s_Q'(\tau)}=\frac{s_P(b)-s_P(a)}{s_Q(b)-s_Q(a)}=\frac{1^2+1}{2\cdot 1^2+3\cdot 1}=\frac{2}{5}\qquad \text{da cui:}\qquad \tau=\frac{1}{2}$$

Naturalmente sarebbe necessario abbinare quest'ultimo esempio ad un efficace controesempio (del tipo di quello precedentemente illustrato), affinché l'allievo si renda conto che quest'ultima situazione riflette un caso particolare[21].

Grazie al prof. Claudio Bernardi, Università di Roma "La Sapienza"

Riferimenti bibliografici

AA.VV. (1993), *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, 16, 11-12, numero dedicato alla logica.

AA.VV. (1997), *I temi "nuovi" nei programmi di matematica (probabilità, statistica, logica...) e il loro inserimento nel curriculum*, IV Corso MPI-UMI in Didattica della Matematica, Liceo Scientifico Statale "A. Vallisneri", Lucca, 1-11 settembre 1997, Ministero della Pubblica Istruzione, Quaderno 26/2.

Bagni (forthcoming-a), Historical roots of limit notion. Development of its representative registers and cognitive development, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*.

Bagni (forthcoming-b), Logica e linguaggio nella pratica didattica: quantificatori esistenziali, funzioni ed uso di software, *Atti del Seminario Franco Italiano di Didattica dell'Algebra, V, (SFIDA 17, 18, 19, 20)*, Torino.

Bagni, G.T. (2001), Apprendimento, risoluzione di problemi ed uso dei registri rappresentativi nella Scuola Superiore, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 24B, 4, 311-329.

Bazzini, L. & Iaderosa, R. (2000), *Approccio all'Algebra*, Franco Angeli, Milano.

Bernardi, C & Tazza, C. (1990), I quantificatori in logica matematica, *Didattica delle scienze e informatica nella scuola*, XXV/148, 49-54.

Bernardi, C. (1987), La logica matematica: metodo e contenuti, *Atti XI Convegno Insegnamento della Matematica*, suppl. Notiziario UMI, 22-29.

Bernardi, C. (1989), The teaching of Logic, Ferro, R.; Bonotto, C.; Valentini, S. & Zanardo, A. (Eds.), *Logic Colloquium '88*, North-Holland, Amsterdam, 381-383.

Bernardi, C. (1990), L'educazione logica nella scuola media, *Scuola e Didattica,* XXV/16, 25-28.

Bernardi, C. (1991), L'insegnamento della logica, Dienes, Z. (Ed.) *Il Piacere della Matematica*, Cappelli, Bologna, 179-187.

Bernardi, C. (1993), La Logica nella Scuola Secondaria, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, 16, 11-12, 1041-1060.

Bernardi, C. (1994), Problemi per la Logica (ovvero, la Logica per problemi), *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 17AB, 5, 507-521.

Bernardi, C. (1998), How formal should a proof be in teaching of mathematics?, Félix, Y. (Ed.), *Logique dans l'enseignement des mathématiques*, Belgian Mathematical Society, Supplément Vol. 5 n° 5, 7-18.

Bonotto, C. & Ferronato, F. (2003), La logica nella scuola secondaria superiore: una proposta, *La matematica e la sua didattica*, forthcoming.

Bonotto, C. & Zanardo, A. (1990), Linguaggi naturali e linguaggi artificiali. Procedimenti logici e linguaggio della matematica, *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 13, 10 (1990), 955-974.

Brousseau, G. (1986), Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques: *Recherches en didactique del mathématiques*, 7, 2, 33-115.

Casarsa, F. (1991), L'albero del sì e del no. Quale logica nel Biennio? *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, 14, 6, 571-589.

---

[21] All'esempio ora proposto sono collegate diverse questioni che affidiamo ad ulteriori ricerche. Potrebbero essere formulate molte altre domande; ci limitiamo a segnalare le seguenti:

Questione 4. La visualizzazione della situazione (grafici delle funzioni) ad esempio mediante l'uso di un software didattico può determinare una minore incidenza della difficoltà tecnica di un esempio e dunque limitare la frequenza di fenomeni di *scorretta doppia istanziazione* o di errori analoghi?

Questione 5. Quali collegamenti sono instaurati dall'allievo tra il controesempio considerato nel registro rappresentativo visuale (grafici delle funzioni e loro "lettura": il contesto fisico rende l'esempio più concreto) e la struttura logica della proposizione?

Ciarrapico, L. & Mundici, D. (Eds.) (1996), *L'insegnamento della Logica*, Ministero della Pubblica Istruzione, Direzione generale Istruzione Classica, Scientifica e Magistrale (corsi AILA-MPI Lecce, 1993, ed Otranto, 1994).

D'Amore, B. & Plazzi, P. (1992), La didattica della logica dei predicati, *L'insegnamento della Matematica e delle Scienze integrate*, 15, 10, 1019-1039.

D'Amore, B. (1991), Logica e proprietà delle relazioni binarie, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 14, 8, 779-785.

D'Amore, B. (2001a), Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques, *Scientia Paedagogica Experimentalis*, XXXVIII, 1, 17-46.

D'Amore, B. (2001b), Conceptualisation, registres de représentations sémiotiques et noétique: interactions constructivistes dans l'apprentissage des concepts mathématiques et hypothèse sur quelques facteurs inhibant la dévolution, *Scientia Paedagogica Experimentalis*, XXXVIII, 2, 143-168.

D'Amore, B. (2003a), La complexité de la noétique en mathématiques ou les raisons de la dévolution manqué, *For the learning of mathematics*, 23, 1, 47-51.

D'Amore, B. (2003b), The noetic in mathematics, *Scientia Pedagogica Experimentalis*, XXXIX, 1, 75-82.

Dapueto, C. & Ferrari, P.L. (1988), Educazione logica ed educazione matematica nella scuola elementare, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 11, 9, 773-810.

Dapueto, C. (1989), Linguaggi e modelli nella scuola secondaria superiore, Barra, M. & Zanardo, A. (Eds.), Atti degli Incontri in Logica Matematica, XII Incontro: *La Logica Matematica nella didattica*, Padova, 219-223.

Duval, R. (1993), Registres de répresentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, IREM, Strasbourg.

Duval, R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang, Paris.

Ferrari, P.L. (1988), Razionalizzazione e formalizzazione: quali obiettivi per la scuola dell'obbligo?, Barra, M. & Zanardo, A. (Eds.), Atti degli Incontri in Logica Matematica, XII Incontro: *La Logica Matematica nella didattica*, Padova, 231-234.

Ferro, R. (1993), Iniziazione alla logica matematica, *Atti del XV Convegno Insegnamento della Matematica*, suppl. Notiziario UMI, 49-64.

Furinghetti, F. & Paola, D. (1991), On some obstacles in understanding mathematical texts, Proceedings *PME 15*, Assisi, 2, 56-63.

Furinghetti, F. (1991), Luci e ombre nell'approccio "intuitivo", Furinghetti, F. (Ed.) *Definire, argomentare e dimostrare nel biennio e nel triennio: opinioni, esperienze e risultati di ricerche a confronto*, CNR-TID, FMI, 13, 83-96.

Grugnetti, L. (1992), Language: an obstacle in understanding the problem statement of a word problem, Weinzweig, A.I. & Cirulls, A. (Eds.), Proceedings *CIEAEM 44*, Chicago, 164-172.

Lakoff, G. & Nuñez, R. (2000), *Where Mathematics come from? How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being*, Basic Books, New York.

Marchini, C. (1989a), Aspetti didattici del calcolo dei predicati, *La Matematica e la sua Didattica*, III(3), 23-35.

Marchini, C. (1989b), Modelli e logica, *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 12B, 2, 187-192.

Marchini, C. (1990), Le sostituzioni e la Didattica della Matematica, *Bollettino UMI*, 7, IV(A), 145-153.

Marchini, C. (1993), L'insegnamento della Logica, *Notizie di Logica*, XII, 1-2, 22-27.

Marchini, C. (1994), Aspetti didattici della Logica Matematica nella Scuola Media I, *Scuola e Didattica*, XL, 6, 31-42.

Marchini, C. (1995), Aspetti didattici della Logica Matematica nella Scuola Media II, *Scuola e Didattica*, XL, 9, 36-42.

Ministero della Pubblica Istruzione (1992a), Piani di studio della scuola secondaria superiore e programmi di prini due anni. Proposte della Commissione Brocca, *Collana Studi e Documenti degli Annali della P.I.*, Le Monnier, 56.

Ministero della Pubblica Istruzione (1992b), Piani di studio della scuola secondaria superiore e programmi di prini due anni. Proposte della Commissione Brocca, *Collana Studi e Documenti degli Annali della P.I.*, Le Monnier, 59-60.

Ministero della Pubblica Istruzione (1996), *Piano Nazionale per l'introduzione dell'informatica nelle scuole secondarie superiori. Indicazioni programmatiche relative all'insegnamento della matematica nel triennio del liceo ginnasio e del liceo scientifico e nel secondo biennio dell'istituto magistrale*, Circolare ministeriale n. 615 del 27/9/1996.

Mundici, D. (1997), Logica e computer dai fondamenti alle applicazioni, *I temi "nuovi" nei programmi di matematica (probabilità, statistica, logica...) e il loro inserimento nel curriculum*, IV Corso MPI-UMI in Didattica della Matematica, Liceo Scientifico Statale "A. Vallisneri", Lucca, 1-11 settembre 1997, Ministero della Pubblica Istruzione, Quaderno 26/2, 111-123.

Palladino, D. (1997), Logica, dimostrazioni e teorie matematiche, *I temi "nuovi" nei programmi di matematica (probabilità, statistica, logica...) e il loro inserimento nel curriculum*, IV Corso MPI-UMI in Didattica della Matematica, Liceo Scientifico Statale "A. Vallisneri", Lucca, 1-11 settembre 1997, Ministero della Pubblica Istruzione, Quaderno 26/2, 11-35.

Paola, D. (1997), Elaborazione di un percorso di logica relativo all'intero quinquennio, *I temi "nuovi" nei programmi di matematica (probabilità, statistica, logica...) e il loro inserimento nel curriculum*, IV Corso MPI-UMI in Didattica della Matematica, Liceo Scientifico Statale "A. Vallisneri", Lucca, 1-11 settembre 1997, Ministero Pubblica Istruzione, Quaderno 26/2, 149-153.

Perrin-Glorian, M.-J. (1994), Théorie des situations didactiques: naissance, développment, perspectives, Artigue, M.; Gras, R.; Laborde, C. & Tavignot, P. (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 97-147.

Perrin-Glorian, M.-J. (1997), Que nous apprennent les èléves en difficulté en mathematiques? *Rep. IREM*, 29, 43-66.

Prodi, G. & Magenes, E. (1982), *Elementi di analisi matematica*, D'Anna, Messina-Firenze.

Radford, L. (2002), The Object of Representations: Between Wisdom and Certainty, Hitt, F. (Ed.), *Representations and Mathematics Visualization*, 219-240, Cinvestav-IPN, Mexico.

Radford, L. (2003), On Culture and Mind. A post-Vygotskian Semiotic Perspective, with an Example from Greek Mathematical Thought, Anderson, M. & Al. (Ed.), *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*, 49-79, Legas, Ottawa.

Speranza, F. (1989), Matematica e linguaggio, *L'Educazione Matematica*, II (4), 97-114.

Speranza, F. (1993), Linguaggio e simbolismo in matematica, Jannamorelli, B. (Ed.), *Atti I Seminario Internazionale di Didattica della Matematica*, Sulmona, 17-23.

Thurston, W.P. (1994), On Proof and Progress in Mathematics, *Bulletin of American Math. Society*, 30, 2, 161-177.

Villani, V. (1994), Errori nei testi scolastici: calcolo numerico, logica, informatica, *Archimede*, XLVI, 3-18.